Universidad de la República **Cálculo diferencial e integral en varias variables**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo Semestre 2020**

Solución Práctico 3 - Sucesiones

Ejercicio 1

a) Es decreciente, $a_n \leq 2$ y converge a 1

b) No es monótona, $a_n \leq 2$ y converge a 1

c) Es creciente, no está acotada y diverge a $+\infty$

d) Es creciente, $a_n < 1$ y converge a 1

e) A partir de $n = 3$ es decreciente, $a_n \leq 9/8$ y converge a 0

Veamos con detalle el ejercicio **1d**. La sucesión a estudiar es

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Observar que al ser la raíz cuadrada una función inyectiva se tiene $\sqrt{n^2+1} > \sqrt{n^2} = n$, de donde se sigue que $a_n < 1$.

Observar además, que $\sqrt{n^2+1} - n > \sqrt{(n+1)^2+1} - (n+1)$, de donde se sigue que a_n es creciente.

Es claro entonces que converge a 1.

Ejercicio 2

a) Probemos directamente que el $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = A + B$. Dado $\epsilon > 0$, como a_n y b_n convergen a A y B respectivamente, existe un N_1 tal que $|a_n - A| < \epsilon/2$ si $n \geq N_1$ y un N_2 tal que $|b_n - B| < \epsilon/2$ si $n \geq N_2$.

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, se tiene entonces, que si $n \geq N$,

$$|c_n - (A+B)| = |a_n - A + b_n - B| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

b) Está en las notas de sucesiones (Proposición 2.3.2).

c) Observar primero que

$$|a_nb_n - AB| = |a_nb_n - AB - a_nB + a_nB| = |a_n(b_n - B) + B(a_n - A)| \leq |a_n||b_n - B| + |B||a_n - A|.$$

Al ser a_n convergente, sabemos que es acotada, de donde existe $M \geq 0$ tal que $|a_n| < M$. Además, dado $\epsilon > 0$, como a_n y b_n convergen a A y B respectivamente, existe un N_1 tal que $|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2|B|}$ si $n \geq N_1$ y un N_2 tal que $|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2M}$ si $n \geq N_2$.

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, se tiene entonces, que si $n \geq N$,

$$|a_nb_n - (AB)| \leq |a_n||b_n - B| + |B||a_n - A| < M\frac{\epsilon}{2M} + |B|\frac{\epsilon}{2|B|} < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Por lo tanto se tiene $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = AB$

d) Está en las notas de sucesiones (Proposición 2.3.7).

Ejercicio 3

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n)}{n} = 0$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-5}{n+3-5^{1/n}} = 2$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n} = \text{máx}\{\alpha, \beta\}$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{sen}(1/n)\cos(n) = 0$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{e^n} = 0$

g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} = 1/3$

Ejercicio 4

a) $n_0 = 2$; $n_0 = 11$; $n_0 = 101$

b) $n_0 = 1$; $n_0 = 10$; $n_0 = 100$

c) $n_0 = 2$; $n_0 = 11$; $n_0 = 101$

d) $n_0 = 2$; $n_0 = 4$; $n_0 = 5$

e) $n_0 = 2$; $n_0 = 5$; $n_0 = 15$

Veamos en detalle el **4e**: Es claro que la sucesión converge a 0, por lo tanto lo que buscamos es el primer n tal que

$$\frac{2n}{n^3+1} < 1; \frac{1}{10}; \frac{1}{100}$$

Además, como $n^3+1 > n^3$, tenemos que $\frac{2n}{n^3+1} < \frac{2}{n^2}$. Por lo que resolvemos para el caso $\frac{2}{n^2}$ y vemos si ese mismo valor de n nos sirve o alguno de sus contiguos.

Ejercicio 5

a) Diverge, pero si nos consideramos la subsucesion de los pares, es constante 1 y si nos tomamos la subsucesion de los impares es constante 0 y por tanto cualquier subsucesion que a partir de un momento tome solo valores de n pares o impares también converge a 1 o 0 respectivamente.

b) Diverge y no tiene subsucesiones convergentes.

c) Diverge, pero si nos consideramos la subsucesion de los pares, es constante 3 y si nos tomamos la subsucesion de los impares es constante $1/3$ y por tanto cualquier subsucesion que a partir de un momento tome solo valores de n pares o impares también converge a 3 o $1/3$ respectivamente.

d) Diverge, pero si nos consideramos la subsucesion de los multiplos de 3, converge a 1 y si nos tomamos la subsucesion de los que no son multiplos de 3 converge a $-1/2$ y por tanto cualquier subsucesion que a partir de un momento tome solo valores de n multiplos de 3 o no los tome ningún valor multiplo de 3 converge a 1 o $-1/2$ respectivamente.

e) Diverge, las únicas subsucesiones convergentes son las que a partir de un momento toman solo valores de n impares, las cuales convergen a 0.

f) Diverge, las únicas subsucesiones convergentes son las que a partir de un momento toman solo valores de n impares, las cuales convergen a 0.

g) Diverge, pero si nos consideramos la subsucesion de los pares, es converge a 1 y si nos tomamos la subsucesion de los impares es converge a 0 y por tanto cualquier subsucesion que a partir de un momento tome solo valores de n pares o impares también converge a 1 o 0 respectivamente.

Ejercicio 6

a) $a_n = \begin{cases} 1 & si \quad n = \dot{4} \\ 2 & si \quad n = \dot{4}+1 \\ 3 & si \quad n = \dot{4}+2 \\ 4 & si \quad n = \dot{4}+3 \end{cases}$

b) Consideremos la sucesión que toma valores $1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5$,etc, es decir definida de la siguiente manera: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$, $a_5 = 3$, $a_6 = 1, \cdots, a_9 = 4$, $a_{10} = 1$ y así sucesivamente.

c) No, porque si los puntos de la forma $1/n$ son de aglomeración se tiene que el 0 debería serlo.

Ejercicio 7

Observar que $\{a_{2n}\}$ y $\{a_{3n}\}$ tienen una subsucesión en común, al igual que $\{a_{2n+1}\}$ y $\{a_{3n}\}$. Como cada una de las subsucesiones converge, se tiene que los limites tienen que ser iguales, es decir $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{3n}$ y también $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{3n}$, de donde se tiene que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1}$ por lo que a_n converge.

Ejercicio 8

Si $L = \sup(A)$ entonces es una cota superior, por lo tanto $L \geq x$ para todo $x \in A$. Además como es la menor de las cotas superiores, dado $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A$ tal que $|L - x_n| < 1/n$, por lo tanto tenemos una sucesión $\{x_n\}$ que converge a L.

Reciprocamente, por la primer condición tenemos que L es una cota superior de A. Si existiera K una cota superior de A tal que $K < L$, por tener la sucesión $\{x_m\}$ que converge a L, existe un m_0 tal que $K < x_{m_0} < L$, por lo que K no sería una cota superior de A. Se tiene entonces que L es la menor de las cotas superiores.

Ejercicio 9

a) Hagamos inducción en n.

Es claro que $0 \leq a_1 = 3 \leq 3$, veamos entonces el paso inductivo. Es decir, que si $0 \leq a_n \leq 3$, entonces $0 \leq a_{n+1} \leq 3$.

Como $0 \leq a_n$ se tiene que $3 \leq 3(1 + a_n)$ y $3 \leq 3 + a_n$. Entonces es claro que $0 \leq a_{n+1}$.

Además, tenemos que $1 + a_n < 3 + a_n$ de donde $\frac{1+a_n}{3+a_n} < 1$, por lo que $a_{n+1} \leq 3$.

b) Observar que probar que es decreciente es lo mismo que probar que $a_{n+1} - a_n \leq 0$ para todo $n \geq 1$.

Ahora, $a_{n+1} - a_n = \frac{3-a_n^2}{3+a_n}$, por lo tanto tenemos que probar que $3 - a_n^2 < 0$ para $n \geq 1$.

Hagamos inducción en n.

Es claro que $3 - a_1^2 = 3 - 9 < 0$, veamos entonces el paso inductivo. Es decir, que si $3 - a_n^2 < 0$, entonces $3 - a_{n+1}^2 < 0$.

$$3 - a_{n+1}^2 = 3 - 9\frac{(1 + a_n)^2}{(3 + a_n)^2} = \frac{3(9 + 6a_n + a_n^2) - 9(1 + 2a_n + a_n^2)}{(3 + a_n)^2} = \frac{6(3 - a_n^2)}{(3 + a_n)^2} < 0.$$

c) Al ser monótona decreciente y acotada inferiormente, es convergente. El límite es $\sqrt{3}$.

Ejercicio 10

a) $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

b) Es claro que $a_n > 0$ para todo $n \geq 1$. Además veamos que $a_n < 2$. Es claro que $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Ahora supongamos que $a_n < 2$, entonces $2 + a_n < 4$ y por lo tanto $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < 2$.

En conclusión, acabamos de probar que $0 < a_n < 2$ para todo $n \geq 1$.

La sucesión es creciente, ya que como $0 < a_n < 2$ se cumple $a_n^2 < 2 + a_n$ y por lo tanto $a_n < \sqrt{(2 + a_n)} = a_{n+1}$ y el límite es 2.