Soluciones Práctico 3 – Sucesiones

1. Estudiar monotonía, acotación y convergencia de las siguientes sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde:

   a) $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ *b*) $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ *c*) $a_n = n + \dfrac{1}{n}$ *d*) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ *e*) $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

   Solución:

   a) Monótona decreciente, acotada, convergente (converge a 1).
   b) No es monótona, acotada, convergente (converge a 1).
   c) Monótona creciente, no acotada, divergente (tiende a $+\infty$).
   d) Monótona creciente, acotada, convergente (converge a 1).
   e) Monótona decreciente, acotada, convergente (converge a 0).

2. Sean a_n y b_n dos sucesiones reales convergentes tal que $\lim_{n\to+\infty} a_n = A$ y $\lim_{n\to+\infty} b_n = B$.

   a) Probar que la sucesión $c_n = a_n + b_n$ es convergente y $\lim_{n\to+\infty} c_n = A + B$
   b) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la sucesión $\tilde{a}_n = \lambda a_n$ converge y $\lim_{n\to+\infty} \tilde{a}_n = \lambda A$
   c) Probar que la sucesión $d_n = a_n b_n$ converge y $\lim_{n\to+\infty} d_n = AB$
   d) Sea e_n una sucesión acotada y suponga que $A = 0$, probar que $\lim_{n\to+\infty} e_n a_n = 0$

   Solución:

   a) Dado $\epsilon > 0$, como a_n y b_n convergen a A y B respectivamente, existe un N_1 tal que $|a_n - A| < \epsilon/2$ si $n \geq N_1$ y un N_2 tal que $|b_n - B| < \epsilon/2$ si $n \geq N_2$.
   Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, se tiene entonces, que si $n \geq N$,

   $$|c_n - (A+B)| = |a_n - A + b_n - B| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

   b) Está en las notas de sucesiones (Proposición 2.3.2).

   c) Sea $\epsilon > 0$. Tenemos que b_n es una sucesión acotada por ser convergente, es decir existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|b_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, como a_n y b_n convergen a A y B respectivamente, existe un N_1 tal que $|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2M}$ si $n \geq N_1$ y un N_2 tal que $|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2|A|}$ si $n \geq N_2$.
   Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, se tiene entonces, que si $n \geq N$,

   $$\begin{aligned} |d_n - AB| &= |a_n b_n - AB| \\ &= |a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB| \\ &= |(a_n - a)b_n + A(b_n - B)| \\ &\leq |a_n - A||b_n| + |A||b_n - B| \\ &< \frac{\epsilon}{2M} M + |A| \frac{\epsilon}{2|A|} = \epsilon \end{aligned}$$

   d) Está en las notas de sucesiones (Proposición 2.3.7).

3. Encontrar los límites de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde

$$a)\quad a_n = \frac{\cos(n)}{n} \qquad b)\quad a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad c)\quad a_n = \frac{2n-5}{n+3-5^{1/n}} \qquad d)\quad a_n = \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n}\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$$

$$e)\quad a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\cos(n) \qquad f)\quad a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}\ ,\ \alpha \in \mathbb{R} \qquad g)\quad a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$$

Solución:

a) Converge a 0.
b) Converge a 0.
c) Converge a 2.
d) Converge a $\max\{\alpha, \beta\}$.
e) Converge a 0.
f) Converge a 0.
g) Converge a $\frac{1}{3}$.

4. Las siguientes sucesiones son convergentes ($\lim_{n\to+\infty} a_n = L$), es decir que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de $\varepsilon > 0$) tal que $\forall\ n \geq n_0,\ |a_n - L| < \varepsilon$. Determinar en cada caso el primer valor de n_0 que corresponde a los siguientes valores de ε: 1; 0,1; 0,01.

$$a)\quad a_n = \frac{1}{n} \qquad b)\quad a_n = \frac{n}{n+1} \qquad c)\quad a_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad d)\quad a_n = \frac{1}{n!} \qquad e)\quad a_n = \frac{2n}{n^3+1}$$

Solución:

a) $n_0 = 2$; $n_0 = 11$; $n_0 = 101$
b) $n_0 = 1$; $n_0 = 10$; $n_0 = 100$
c) $n_0 = 2$; $n_0 = 11$; $n_0 = 101$
d) $n_0 = 2$; $n_0 = 4$; $n_0 = 5$
e) $n_0 = 2$; $n_0 = 5$; $n_0 = 15$
Veamos en detalle la parte e). Es claro que la sucesión converge a 0, por lo tanto lo que buscamos es el primer n tal que

$$\frac{2n}{n^3+1} < 1; \frac{1}{10}; \frac{1}{100}$$

Además, como $n^3 + 1 > 1$, tenemos que $\frac{2n}{n^3+1} < \frac{2n}{n^3}$. Por lo que resolvemos para el caso $\frac{2}{n^2}$ y vemos si ese mismo valor de n nos sirve o alguno de sus contiguos.

5. Estudiar los límites de las siguientes sucesiones. ¿Existen subsucesiones convergentes? Indicar los límites de las subsucesiones convergentes.

$$a)\quad a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \qquad b)\quad a_n = (-1)^n n \qquad c)\quad a_n = 3^{\cos(n\pi)} \qquad d)\quad a_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$$

$$e)\quad a_n = n^2\ (1+(-1)^n) \qquad f)\quad a_n = n^{(-1)^n} \qquad g)\quad a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$$

Solución:

a) No es convergente. Sin embargo, la subsucesion de los pares es constante igual a 1 y la subsucesion de los impares es constante igual a 0. Por tanto cualquier subsucesion que a partir de un momento tome solo valores de n pares converge a 1 y toda subsucesión que a partir de un momemento tome sólo valores impares de n converge a 0.

b) No es convergente y no tiene subsucesiones convergentes.

c) No es convergente. Sin embargo, la subsucesion de los pares es constante igual a 3 y la subsucesion de los impares es constante igual a $1/3$. Por tanto cualquier subsucesion que a partir de un momento tome solo valores de n pares converge a 3 y cualquier subsucesión que a partir de un momento tome sólo valores impares de n converge a $1/3$.

d) No es convergente. Sin embargo la subsucesion de los multiplos de 3 converge a 1 y la subsucesion de los que no son multiplos de 3 converge a $-1/2$. Por tanto cualquier subsucesion que a partir de un momento tome solo valores de n multiplos de 3 converge a 1 y cualquier subsucesion que a partir de un momento no tome valores de n multiplos de 3 converge a $-1/2$.

e) No es convergente. Las únicas subsucesiones convergentes son las que a partir de un momento toman sólo valores de n impares, las cuales convergen a 0.

f) No es convergente. Las únicas subsucesiones convergentes son las que a partir de un momento toman sólo valores de n impares, las cuales convergen a 0.

g) No es convergente. Sin embargo, la subsucesion de los pares converge a 1 y la subsucesion de los impares converge a 0. Por lo tanto cualquier subsucesion que a partir de un momento tome solo valores de n pares converge a 1 y toda subsucesión que a partir de cierto momento tome sólo valores impares de n converge a 0.

6. Un punto se llama *de aglomeración* de una sucesión si existe una subsucesión que converge a este punto.

   a) Dar un ejemplo de una sucesión cuyos puntos de aglomeración sean $1, 2, 3$ y 4.

   b) Dar un ejemplo de una sucesión cuyos puntos de aglomeración sean todos los naturales.

   c) ¿Existe alguna sucesión cuyos puntos de aglomeración sean *exactamente* los del conjunto $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$?

   Solución:

   a) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = \dot{4} \\ 2 & \text{si } n = \dot{4}+1 \\ 3 & \text{si } n = \dot{4}+2 \\ 4 & \text{si } n = \dot{4}+3 \end{cases}$

   b) Consideremos la sucesión que toma valores $1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5$,etc, es decir definida de la siguiente manera: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$, $a_5 = 3$, $a_6 = 1$, $\ldots$, $a_9 = 4$, $a_{10} = 1$ y así sucesivamente.

   c) No existe una sucesión donde el conjunto de puntos de aglomeración sea **exactamente** $A = \{1/n : \ n \in \mathbb{N}\}$, pues si aglomera en estos puntos, necesariamente deberá aglomerar en 0.

7. Sea a_n una sucesión tal que sus subsucesiones a_{2n}, a_{2n+1} y a_{3n} convergen. Probar que a_n es convergente.

   Solución: Observamos que las subsucesiones a_{2n} y a_{3n} tienen una subsucesión en común, al igual que a_{2n+1} y a_{3n}. Como cada una de las subsucesiones converge, se tiene que los limites tienen que ser iguales por tener subsucesiones en común, es decir $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{3n}$ y también $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} a_{3n}$. De donde se tiene que $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$, por lo que a_n converge.

8. Sea A un subconjunto de números reales no vacío y acotado superiormente. Demostrar que $L = \sup(A)$ si y solo si:

   a) $L \geq x$, $\forall\, x \in A$.

   b) Existe $\{x_m\}$ una sucesión de A tal que $\lim_{m\to+\infty} x_m = L$

Solución:

($\Rightarrow$) Como $L = \sup(A)$, tenemos que L es una cota superior de A, por lo que $L \geq x$ para todo $x \in A$. Además, como L es la menor de las cotas superiores, dado $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A$ tal que $|L - x_n| < \frac{1}{n}$, es decir tenemos una sucesión que converge a L.

($\Leftrightarrow$) Por a) tenemos que L es cota supeior de A. Supongamos que existe K cota superior de A tal que $K < L$. Dado que existe una sucesión x_m en A tal que $\lim x_m = L$, tenemos que $K < x_0 < L$ para algún $m_0 \in \mathbb{N}$ por lo que K no puede ser cota superior.

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Probar que f está acotada si y solamente si para toda sucesión a_n, la sucesión $b_n = f(a_n)$ está acotada.

   Solución:

   ($\Rightarrow$) Si f es acotada existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular, $|f(a_n)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $f(a_n)$ está acotada.

   ($\Leftarrow$) Supongamos por absurdo que f no está acotada. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x_n)| > n$. Construímos así una sucesión x_n tal que $f(x_n)$ no está acotada lo que es absurdo.

10. Probar que si a_n converge a 0, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n^2 < |a_n|$ para todo $n \geq n_0$.

    Solución: Dado que a_n converge a 0 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < 1$ para todo $n \geq n_0$. Luego, si $n \geq n_0$, tenemos que

    $$-1 < a_n < 1$$

    y por lo tanto,

    $$-a_n < a_n^2 < a_n$$

    es decir, $a_n^2 < |a_n|$.

11. Probar que si a_n converge a $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en α, entonces $b_n = f(a_n)$ converge a $f(\alpha)$.

    Solución: Sea $\epsilon > 0$. Dado que f es continua en α, existe $\delta > 0$ tal que si $|x-\alpha| < \delta$ entonces $|f(x)-f(\alpha)| \leq \epsilon$. Además, dado que a_n converge a α, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \alpha| < \delta$ para todo $n \geq n_0$.

    Entonces, si $n \geq n_0$, tenemos que $|x_n - \alpha| < \delta$ y por lo tanto $|f(a_n) - f(\alpha)| \leq \epsilon$, es decir $f(a_n)$ converge a $f(\alpha)$.