Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Funciones de variable compleja.
Curso 2022

Práctico 1 - Generalidades de números complejos

1. a) Calcular la parte real e imaginaria de los complejos $\dfrac{1}{a+bi}$, $(a+bi)^2$.
   b) Probar que $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
   c) Probar que $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
   d) Probar que $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
   e) Probar que $\overline{\overline{z}} = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

2. Bosquejar los $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z - 1 + i| \leq 4$

3. Hallar los $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z+1| \leq 4 - |z-1|$.

4. Definimos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z = e^{x+\mathrm{i}y} = e^x(\cos y + \mathrm{i} \operatorname{sen} y)$. Probar que:
   a) Si z es real entonces e^z coincide con e^x.
   b) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.
   c) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.
   d) $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
   e) $e^z = 1$ sii $z = 2k\pi\mathrm{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Si $z \neq 0$, probar que existen n raíces enésimas de z (es decir: probar que la ecuación $w^n = z$ admite n soluciones) y que ellas son:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right)\right),\ k = 0, 1 \ldots, n-1$$

   siendo $\varphi = \arg z$. Observar que forman un polígono regular.

6. Estudiar las transformaciones $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que se listan a continuación:
   a) U es el sector angular con vértice en el origen y comprendido entre el semieje real positivo y la semirrecta recta $y = \tan\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)x$, $\ x > 0$, donde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Es decir, U es el sector angular $0 < \theta \leq \dfrac{2\pi}{n}$. La transformación f está definida por

$$f : U \to \mathbb{C} \text{ tal que } f(z) = z^n \ \ \forall\ z \in U.$$

   Mostrar que f es biyectiva. Mostrar que $f(z) = z^n$ no es biyectiva si el dominio de f en vez de ser U es todo el plano complejo $\mathbb{C}$. Hallar la imagen por f de las semirrectas contenidas en U que pasan por el origen y de los arcos de circunferencia $|z| = \text{cte}$, $0 < \theta \leq \dfrac{2\pi}{n}$. Hallar la imagen de las rectas paralelas a los ejes coordenados (estas son $\mathcal{R}e(z) = \text{cte}$ e $\mathcal{I}m(z) = \text{cte}$). Observar que las imágenes de estas rectas ortogonales son curvas ortogonales.

b)

$$U = \{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < \ \mathrm{Im}(z) < a\}, \ f(z) = e^z. \text{ Discutir según } a > 0\,.$$

Hallar las imágenes de las rectas paralelas a los ejes coordenados. Observar que si $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ es un polinomio con $a_n \neq 0$, entonces $\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty$. De esto concluir que la función exponencial $f(z) = e^z$ no puede ser un polinomio ni un cociente de dos polinomios $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$.

7. Definimos $f : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \log(z) = \log|z| + iArg(z)$, donde $Arg(z) \in [0, 2\pi)$ y le llamamos logaritmo principal de z. ¿Dónde es f continua? Calcular:

a)	$\log(2+3i)$	c)	$\log(-i)$
b)	$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \log(1+i\varepsilon)$	d)	$\lim_{\varepsilon\to 0^-} \log(1+i\varepsilon)$

Mostrar que una vez elegida una determinación del argumento, la función logaritmo es continua en todo el plano menos una semirrecta que parte del origen. Probar que $e^{\log z} = z$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

8. Hallar el error en la siguiente paradoja de J. Bernoulli, donde log denota el logaritmo principal.

$$(-z)^2 = z^2 \Rightarrow \log\left((-z)^2\right) = \log\left(z^2\right) \Rightarrow 2\log(-z) = 2\log(z) \Rightarrow \log(-z) = \log(z).$$

9. Una sucesión $z_n = x_n + iy_n$ de complejos se dice que converge a $z = x + iy$ sii $|z_n - z| \to 0$.

   a) Probar que $z_n \to z$ si y solo si $x_n \to x$ y $y_n \to y$.
   b) Probar que si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|$ converge entonces $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ también converge.

10. Indicar cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos conexos.

$\mathbb{C} - \{0\}$	$\mathbb{C} - \{z_0, ..., z_n\}$
$\{z : r < \lvert z\rvert < R\}$	$\mathbb{C} - \mathbb{R}$
$\{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}$	$\{z \neq 0 : \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z) > 0\}$
$\{z : \mathrm{Im}(z) > a\} \cup \{z : \lvert z\rvert < 1\}$	

discutir según a.

11. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) \ + \ i\,v(x, y)$, donde $x = Re(z)$, $y = Im(z)$, $u = Re(f)$, $v = Im(f)$. Analizar la validez de la siguiente afirmación: f es continua en $z_0 = x_0 + iy_0$ sii u y v son continuas en (x_0, y_0) como funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

12. Dados tres números complejos a, b y c de módulo 1 y tales que $a + b + c = 0$ muestre que los mismos (como puntos del plano) forman un triángulo equilátero.

13. Considere un círculo de radio 1 y un polígono regular de n-lados inscripto en el mismo.

    a) Halle una expresión para el perímetro de dicho polígono. *Sugerencia: podemos suponer que cada vértice es una raíz del polinomio* $z^n - 1$
    b) Si P_n es el perímetro del polígono de n lados, calcule el límite $\lim_{n\to\infty} P_n$. *Sugerencia: recordar la expresión del desarrollo de Taylor de la función* $\cos(x)$ *centrada en* $x = 0$.
    c) Si Q_1, Q_2, ...,Q_n son los vértices del polígono, considere los $n-1$ segmentos Q_1Q_i, $i = 2, \ldots, n$ y llamemos λ_i a su longitud. Muestre que $\prod\limits_{i=2}^{n} \lambda_i = n$.
    Sugerencia: desarrollar $(x^n - 1)/(x - 1)$ *y evaluar en* $x = 1$.