Resoluciones del examen del 24-2-21

Juan Piccini

1 Problema 1 (Número Complejo)

Sean $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ y w dos números complejos donde $r > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$ tales que:

- $z^4 = i$
- $\theta \in \left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$,
- $e^{z-w} = 1$
- $5 < Im(w) < 7$

Hallar $z + w$ (siguen las cuatro opciones)
Resolución:

Versión 1:: El dato $z^4 = i$ nos dice que z es una de las cuatro raíces cuartas de la unidad imaginaria i. Como $|z|^4 = |i| = 1$, z debe tener módulo 1.

Las raíces cuartas de i están sobre la cfa de centro en el origen y radio 1 y forman los vértices de un cuadrado. Llamemos z_0, z_1, z_2, z_3 a estas cuatro raíces cuartas, enumeradas en sentido antihorario.

El argumento de z_0 es la cuarta parte del argumento de i, que es $\pi/2$. Por tanto z_0 tiene módulo 1 y argumento $\pi/8$, $z_0 = \cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8)$.

Obtenemos z_1 sumando $\pi/2$ al argumento de z_0, $z_1 = \cos(5\pi/8) + i\sin(5\pi/8)$. Sumando $\pi/2$ pasamos a $z_2 = \cos(p\pi/8) + i\sin(9\pi/8)$.

Del mismo modo, $z_3 = \cos(13\pi/8) + i\sin(13\pi/8)$, que equivale a $z_3 = \cos(-3\pi/8) + i\sin(-3\pi/8)$ (z_0 y z_3 están en el primer y cuarto cuadrante respectivamente).

El dato $\theta \in \left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ nos dice que z es z_0, $z = \cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8)$.

Supongamos que $z = a + bi$ y $w = c + di$, $z - w = a - c + (b - d)i$. Por la definición de exponencial compleja, $e^{z-w} = e^{a-c}(\cos(b-d) + i\sin(b-d))$

El dato $e^{z-w} = 1 = 1 + 0i$ nos dice que $\cos(b-d) = 1$ y que $\sin(b-d) = 0$, lo que nos deja $b - d = 2k\pi$, de donde $d = b + 2k\pi = \pi/8 + 2k\pi$. Como $e^{a-c} = 1$, tenemos que $c = a$.

Entonces $Re(w) = Re(z) = \cos(\pi/8)$ mientras que $Im(w) = Im(z) + 2k\pi = \sin(\pi/8) + 2k\pi$.

Por último, el dato $5 < Im(w) < 7$ nos dice que $k = 1$.

Por tanto $w = \cos(\pi/8) + i(\sin(\pi/8) + 2\pi)$ y

$$z + w = 2\cos(\pi/8) + 2i(\sin(\pi/8) + \pi)$$

Versión 2: Mismo enunciado pero ahora los datos son

- $z^4 = i$
- $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$,
- $e^{z-w} = 1$
- $0 < Im(w) < 2$

El dato $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ nos dice que $z = z_1$, la raíz que está en el segundo cuadrante, $z = z_1 = \cos(5\pi/8) + i\sin(5\pi/8)$.

El dato $e^{z-w} = 1$ nos lleva (mismas cuentas que en la versión anterior, solamente cambian a, b) a obtener:

$c = a = \cos(5\pi/8)$, $d = b + 2k\pi = \sin(5\pi/8) + 2k\pi$.

Como ahora es $0 < Im(w) < 2$, tenemos que $k = 0$.

Por tanto $w = \cos(5\pi/8) + i\sin(5\pi/8)$ y

$$z + w = 2\cos(5\pi/8) + 2i\sin(5\pi/8)$$

Versión 3: Misma letra pero ahora los datos son

- $z^4 = i$
- $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
- $e^{z-w} = 1$
- $0 < Im(w) < 2$

Los dos primeros datos nos dicen que $z = z_0 = \cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8)$, el dato $e^{z-w} = 1$ nos dice que $c = a = \cos(\pi/8)$ y $d = b + 2k\pi$, $d = \sin(\pi/8) + 2k\pi$.

El dato $0 < Im(w) < 2$ nos dice $k = 0$, de donde $w = \cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8)$ y por tanto

$$z + w = 2\cos(\pi/8) + 2i\sin(\pi/8)$$

2 Problema 2 (Topología)

1. Considere el siguiente conjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$A = [0,1]^2 \cap \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^c.$$

Donde el conjunto $\mathbb{Q}$ denota a los números racionales y $\mathbb{Q}^c$ representa el conjunto de los números irracionales (en algunas versiones se intercambian los roles, y se intersecta con $\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}$, de cualquier modo el problema es simétrico en ese aspecto).
Considere las las siguientes afirmaciones:.... (Las afirmaciones varían según la versión, pero todas giran en torno a la compacidad, acotación, puntos de acumulación y puntos aislados de A, por tanto veremos c/u de ellas).

Resolución:

El conjunto A es la intersección del producto cartesiano $[0,1] \times [0,1]$ (denotado como $[0,1]^2$ del mismo modo que el producto cartesiando $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se denota como $\mathbb{R}^2$), con el producto cartesiano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^c$.

Recordemos que dados dos conjuntos $A_1,\ A_2$ no vacíos, el producto cartesiano $A_1 \times A_2$ es el conjunto de pares $(a,b):\ a \in A_1,\ b \in A_2$, son todas las parejas donde la primera componente es un elemento de A_1 y la segunda componente es un elemento de A_2.

El producto $[0,1]^2$ son todas las parejas $(x,y) : x \in [0,1], y \in [0,1]$, mientras que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^c$ son las parejas (x,y) donde x es racional e y es irracional (en algunas versiones x e y intercambian roles).

Entonces A son los puntos del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ que además tienen una coordenada racional y la otra irracional.

Una vez que tenemos claro quién es A, veamos las afirmaciones.

- **Acotación:**
  Es claro que el cuadrado $[0,1]^2$ es acotado y que $A \subset [0,1]^2$, **por tanto A es acotado**.
- **P. de Acumulación:**
  Recordemos que los puntos de acumulación de A son aquellos puntos tales que si tomamos bolas reducidas centradas en ellos, sin importar su radio siempre tendrán al menos un punto de A.

  Sea $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ y para un $\delta > 0$ dado tomemos la bola $B^*_{(x_0,y_0,\delta)}$. Como los racionales y los irracionales son densos en $[0,1]$, siempre habrá un x racional y un y irracional suficientemente cerca de x_0 e y_0 respectivamente (o al revés según la versión), esto es, $d((x_0,y_0),(x,y)) < \delta$.

  Por tanto este punto (x,y) será un elemento de A, porque estará en el cuadrado $[0,1]^2$ y tendrá una coordenada racional y la otra irracional, según sea la versión.

  Esto prueba que cualquier punto del cuadrado $[0,1]^2$ es punto de acumulación de A. En particular, A **no contiene a todos sus puntos de acumulación**, ya que alcanza con elegir un $(x,y) \in [0,1]^2$ con sus dos coordenadas racionales (o ambas irracionales), este punto es de acumulación de A pero no pertenece a A.
- **Puntos Aislados:** El que los racionales sean densos y los irracionales también permite probar que A **no tiene puntos aislados**, si tomamos un punto $(x,y) \in A$, cualquier bola centrada en él tendrá puntos de A ya que puedo acercarme tanto como quiera a la coordenada racional mediante racionales y a la irracional mediante irracionales.

  Es imposible construír una bola donde el único elemento de A sea el centro de la bola.
- **Compacidad:** Para que A sea compacto tiene que ser acotado y cerrado. Sabemos que es acotado, pero no puede ser cerrado ya que un conjunto cerrado contiene a todos sus puntos de acumulación y A no lo hace (todo punto de $[0,1]^2$ con las dos coordenadas racionales o las dos irracionales es de acumulación de A pero no pertenece a A).

Por tanto A no es compacto.

Resumen: A es acotado, no es compacto porque no es cerrado, **no tiene puntos aislados, sus puntos de acumulación son todo el cuadrado** $[0,1]^2$.

Con esto presente, veamos las versiones:

Versión

Considere las las siguientes afirmaciones:

(I) A compacto. (Falsa)

(II) A acotado. (Verdadera)

(III) A tiene puntos aislados. (Falsa)

A) Las únicas verdaderas son la afirmación (I) y la (III).

B) Todas las afirmaciones son verdaderas.

C) La única afirmación verdadera es la (II) es la correcta

D) Las únicas afirmaciones verdaderas son la (II) y la (III)

Versión

Considere las las siguientes afirmaciones:

(I) A acotado (Verdadera)

(II) A compacto. (Falsa)

(III) A no tiene puntos aislados. (Verdadera)

A) Las únicas verdaderas son la afirmación (I) y la (III). es la correcta

B) Todas las afirmaciones son verdaderas.

C) La única afirmación verdadera es la (I)

D) Las únicas afirmaciones verdaderas son la (II) y la (III)

Versión

Considere las las siguientes afirmaciones:

(I) A acotado. (Verdadera)

(II) A no tiene puntos de acumulación. (Falsa)

(III) A compacto. (Falsa)

A) Las únicas verdaderas son la afirmación (I) y la (III).

B) Todas las afirmaciones son verdaderas.

C) La única afirmación verdadera es la (I). es la correcta

D) Las únicas afirmaciones verdaderas son la (II) y la (III)

3 Problema 3 (Sucesiones y Series)

Una pelota de goma cae verticalmente desde 10 mt. de altura sobre una superficie dura y comienza a rebotar. En cada rebote la pelota alcanza 2/3 de la altura alcanzada en el rebote anterior (en otras versiones es 4/5 por ejemplo).

Sean N el primer rebote cuya altura es menor o igual a 1 mt. y H la suma de las alturas de los rebotes $1, 2, \ldots, N$.

Entonces: (siguen las opciones donde se presentan distintos valores para N y para H).

Resolución:

La altura del primer rebote es $\frac{2}{3} \times 10$, la del segundo es 2/3 de la anterior, la del tercero es 2/3 de la anterior.

Dichas alturas forman la sucesión $10(\frac{2}{3}), 10(\frac{2}{3})^2, 10(\frac{2}{3})^3, \ldots, 10(\frac{2}{3})^N, \ldots$.

Buscamos el primer rebote cuya altura no supera un 1 mt. (o 1.25 mt. según la versión). Esto es, buscamos el primer $N : 10(\frac{2}{3})^N \leq 1$.

Esto es lo mismo que el primer $N : (\frac{2}{3})^N \leq \frac{1}{10}$, o $N \log(2/3) \leq \log(1/10)$. De aquí despejamos $N \geq \dfrac{\log(1/10)}{\log(2/3)}$ (recordemos que cuando multiplicamos ambos miembros de una desigualdad por un número negativo, la misma cambia de signo).

Obtenemos $N \geq 5.67$, **de donde** $N = 6$ (en el quinto rebote se alcanza una altura que es mayor a 1 mt., en el sexto por primera vez no se supera 1 mt.).

Como H es la suma de las alturas de los rebotes 1,2,...,N, tenemos que hallar

$$H = 10(\frac{2}{3}) + 10(\frac{2}{3})^2 + 10(\frac{2}{3})^3 + \cdots + 10(\frac{2}{3})^6$$

Recordemos que $\sum_{k=1}^{N} p^k = \frac{1-p^{N+1}}{1-p} - 1$. Sustituyendo $p = 2/3$ $N = 6$ y sacando 10 de factor común obtenemos

$$H = 10\left(\frac{1-\frac{2^7}{3^7}}{1-\frac{2}{3}} - 1\right) = 10\left(\frac{1-\frac{2^7}{3^7}}{\frac{1}{3}} - 1\right)$$

Recordemos que dividir entre 1/3 es lo mismo que multiplicar por 3, por tanto

$$H = 10\left(3(1-\frac{2^7}{3^7}) - 1\right) = 10\left((3-\frac{2^7}{3^6}) - 1\right) = 10\left(2-\frac{2^7}{3^6}\right)$$

Las otras versiones se resuelven igual, para quienes no dispongan de calculadora, recordar que 1.25 mt. es lo mismo que 5/4 mt.

4 Problema 4 (Diferenciabilidad: Regla de la Cadena)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = (e^{-(x+y)} - cos(x^2+y^2), xy - x + y)$$

y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla g(0,0) = (3,2)$. Consideremos $h = g \circ f$ (según la versión cambia la segunda componente de f y el valor de $\nabla g(0,0)$). Entonces (siguen opciones para el valor de $\nabla h(0,0)$).

Resolución:

Para $h = g \circ f$, tenemos que $\mathbb{J}_h(0,0) = \mathbb{J}_g(f(0,0))\mathbb{J}_f(0,0)$.

Como $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, su matriz jacobiana será una matriz fila, que llamamos $\nabla h(0,0)$.

Lo mismo para g, pero como $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (donde $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son las dos funciones componentes, $f_1(x,y) = e^{-(x+y)} - cos(x^2+y^2)$ y $f_2 = xy - x + y$), la matriz jacobiana de f será 2 x 2, la primera fila es $\nabla f_1(0,0)$ y la segunda es $\nabla f_2(0,0)$.

Por tanto $\nabla h(0,0) = \nabla g(0,0) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix}$

- **Versión** $f(x,y) = (e^{-(x+y)} - cos(x^2+y^2), xy - x + y)$ $\nabla g(0,0) = (3,2)$**:**

  $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = -e^-(x+y) + 2xsen(x^2+y^2)$, evaluada en $(0,0)$ queda igual a -1.

  $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -e^-(x+y) + 2ysen(x^2+y^2)$, evaluada en $(0,0)$ queda igual a -1 (f_1 es simétrica en x e y).

  $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = y - 1$, evaluada en $(0,0)$ queda igual a -1.

  $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = x + 1$, evaluada en $(0,0)$ queda igual a 1.

  Por tanto $\nabla h(0,0) = (3\ 2) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (-5\ \ -1)$

- **Versión** $f(x,y) = (e^{-(x+y)} - cos(x^2+y^2), xy - x + y)$ $\nabla g(0,0) = (2,3)$**:** solamente cambia $\nabla g(0,0)$ que ahora es la matriz fila (2 3).

  Por tanto $\nabla h(0,0) = (2\ 3) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (-5\ \ 1)$

- **Versión** $f(x,y) = (e^{-(x+y)} - cos(x^2+y^2), xy + x - y)$ $\nabla g(0,0) = (3,2)$**:**

  Es como la primera versión, solamente cambia f_2 por lo que solamente cambia la segunda fila de $\mathbb{J}_f$.

  Las derivadas parciales de $f_2(x,y) = xy + x - y$ evaluadas en $(0,0)$ ahora valen 1 y -1, por tanto $\nabla h(0,0) = (3\ 2) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (-1\ \ -5)$

5 Problema 5 (Límites y Continuidad)

Sean $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}:\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } \frac{x^2}{2} < y < x^2 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$ y
$g:[0,+\infty)\times[0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$: $g(r,\theta) = f(rcos(\theta), rsen(\theta))$.

Considere las siguientes afirmaciones: (vienen afirmaciones sobre el límite de f y g en el origen, sobre la continuidad de f en el origen, sobre si f es una función acotada).

f es una función constante a trozos, vale $1/2$ en la región limitada entre dos parábolas y 0 en el resto del plano.

Lo que cambia en las versiones es la región donde $f = k$, $(k > 0)$ y el valor de k. Las regiones siempre están limitadas entre dos parábolas.

Resolución:
Que el límite en polares sea cero significa que al acercarnos al origen por restricciones $y = mx$ el límite es cero (sin importar la pendiente de la recta, tarde o temprano sale de la región parabólica y termina llegando al origen por la región donde $f = 0$).

Sin embargo alcanza con tender al origen en una curva que esté entre las dos parábolas (región donde $f = 1/2$) para tener límite $=1/2$.

Por tanto **no existe el límite de f en el origen**.

Tampoco puede ser f continua en el origen, por lo anterior.

f sí es acotada en su dominio $\mathbb{R}^2$, ya que $0 \leq f(x,y) \leq 1/2\ \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Nada de esto cambia en las restantes versiones: f **acotada, no tiene límite en el origen y no es continua en el origen**.

Con esto presente, veamos las distintas versiones:

Versión

Considere las siguientes afirmaciones:

I) $\lim\limits_{r\to 0} g(r,\theta) = 0\ \forall\theta \in [0,2\pi)$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ (Falsa)

II) $\lim\limits_{r\to 0} g(r,\theta) = 0\ \forall\theta \in [0,2\pi)$ pero $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ (Verdadera)

III) f es continua en $(0,0)$ (Falsa)

IV) f es no acotada en $\mathbb{R}^2$ (Falsa)

Entonces:

A Solamente II es verdadera. es la correcta

B Solamente I y III son verdaderas.

C Solamente II y IV son verdaderas.

D Solamente I, III y IV son verdaderas.

Versión

Considere las siguientes afirmaciones:

I) $\lim\limits_{r\to 0} g(r,\theta) = 0\ \forall\theta \in [0,2\pi)$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ (Falsa)

II) $\lim\limits_{r\to 0} g(r,\theta) = 0\ \forall\theta \in [0,2\pi)$ pero $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ (Verdadera)

III) f es continua en $(0,0)$ (Falsa)

IV) f es acotada en $\mathbb{R}^2$ (Verdadera)

Entonces:

A Solamente IV es verdadera.

B Solamente I y III son verdaderas.

C Solamente II y IV son verdaderas. es la correcta

D Solamente I, III y IV son verdaderas.

Versión

Considere las siguientes afirmaciones:

I) $\lim\limits_{r \to 0} g(r, \theta) = 0 \; \forall \theta \in [0, 2\pi)$ y $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$ (Falsa)

II) $\lim\limits_{r \to 0} g(r, \theta) = 0 \; \forall \theta \in [0, 2\pi)$ pero $\nexists \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ (Verdadera)

III) f no es continua en $(0, 0)$ (Verdadera)

IV) f es no acotada en $\mathbb{R}^2$ (Falsa)

Entonces:

A Solamente II es verdadera.

B Solamente II y III son verdaderas. es la correcta

C Solamente II y IV son verdaderas.

D Solamente I, III y IV son verdaderas.

6 Problema 6 (Diferenciabilidad: Plano Tangente)

Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \log(x^2 + 2y^2 + 1).$$

Sea π el plano tangente al gráfico de f en el punto $(1, 1, \log(4))$.

Indicar cuál de los siguientes vectores es perpendicular a π (las distintas versiones difieren en ligeros cambios en f o en el punto de tangencia).

Resolución:

El plano tangente al gráfico de f por el punto (x_0, y_0, z_0) (donde $z_0 = f(x_0, y_0)$) son los

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)\}$$

En nuestro caso, $x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ z_0 = \log(4),\ \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1/2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1.$

Sustituyendo obtenemos $z = \log(4) + \frac{1}{2}(x - 1) + 1(y - 1)$ y haciendo distributiva y agrupando,

$$\frac{1}{2}x + y - z + \frac{3}{2} - \log(4) = 0$$

Que es la ecuación del plano tangente, los coeficientes de x, y, z son las componentes del vector normal.

Por tanto un vector normal es $(1/2, 1, -1)$.

- Para la versión $f(x, y) = \log(2x^2 + y^2 + 1)$, $(1, 1, \log(4))$, solamente intercambian roles x e y, por lo que ahora $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1/2$.

  El plano tangente nos queda
  $$x + \frac{1}{2}y - z - \frac{3}{2} + \log(4) = 0$$
  De donde el vector normal es $(1, 1/2, -1)$.

- Para la versión $f(x, y) = \log(2x^2 + 2y^2 + 1)$ y el punto $(1, 1, \log(5))$, cambian las derivadas parciales que ahora evaluadas en $(1, 1)$ valen $4/5$ (cambió la función).

  Ahora $z_0 = \log(5)$ mientras que x_0 e y_0 permanecen como antes.

  El plano tangente ahora será
  $$\frac{4}{5}x + \frac{4}{5}y - z + \log(5) - \frac{8}{5} = 0$$
  El vector normal es $(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}, -1)$.

En todos los casos la constante que aparece en la ecuación del plano no afecta al vector normal, dado que el mismo viene dado por los coeficientes en x, y, z.

7 Problema 7 (Taylor)

Sean $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\frac{xlog(y)}{y} - ax^2 - by^2 - cxy - dx - ey - f}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 0$$

Entonces la suma $a + b + c + d + e + f$ es: (luego vienen las opciones dentro de las cuales escoger).

Resolución:

Versión 1: Sustituímos $f(x, y) = \frac{xlog(y)}{y}$ por $f(x, y) =$ (Polinomio de Taylor en (1,1) de orden 2) + (Resto) con lo que en el numerador del límite a calcular quedará un polinomio en dos variables y un resto que luego separaremos.

Después agrupamos en las variables y vemos qué condiciones imponer para que dicho límite exista y sea cero.

Recordemos que

$$f(x,y) = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) + \frac{1}{2}\left((x-1\ y-1)\mathbb{H}_f(1,1)\begin{pmatrix} (x-1) \\ (y-1) \end{pmatrix}\right) + R(x,y)$$

Donde $\mathbb{H}_f(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) \end{pmatrix}$ es la matriz Hessiana de f en el punto $(1, 1)$ y R es el resto, del cual sabemos que

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{R(x,y)}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 0$$

Las derivadas cruzadas son iguales, de donde la Hessiana es una matriz simétrica.

Operando, tenemos que el término cudrático (para simplificar pongamos $\mathbb{H} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$), queda $\frac{1}{2}[A(x-1)^2 + 2B(x-1)(y-1) + C(y-1)^2]$ y por tanto (llamando D y E a las derivadas parciales de primer orden),

$$f(x,y) = f(1,1) + D(x-1) + E(y-1) + \frac{1}{2}[A(x-1)^2 + 2B(x-1)(y-1) + C(y-1)^2] + R(x,y)$$

Tenemos que $f(1, 1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\log(y)}{y}$, que evaluada en $(1, 1)$ da cero. Asimismo $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x\left(\frac{1-\log(y)}{y^2}\right)$, que evaluada en $(1, 1)$ da 1.

Por tanto nos queda $f(x, y) = E(y - 1) + \frac{1}{2}[A(x - 1)^2 + 2B(x - 1)(y - 1) + C(y - 1)^2] + R(x, y)$. El límite pedido puede escribirse entonces como

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{E(y-1) + \frac{1}{2}[A(x-1)^2 + 2B(x-1)(y-1) + C(y-1)^2] - ax^2 - by^2 - cxy - dx - ey - f}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

$$+ \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{R(x,y)}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

El segundo sumando tiene límite cero, de modo que hay que enfocarse en que

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{E(y-1) + \frac{1}{2}[A(x-1)^2 + 2B(x-1)(y-1) + C(y-1)^2] - ax^2 - by^2 - cxy - dx - ey - f}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 0$$

Si en el numerador llegasen a quedar términos de orden menor a 2, el límite sería ∞, si quedasen solamente términos cuadráticos el límite sería una constante no nula, por tanto el numerador tiene que valer cero.

Si hacemos distributiva en la parte de Taylor, obtenemos

$$E(y-1)+\frac{1}{2}[A(x-1)^2+2B(x-1)(y-1)+C(y-1)^2] = \frac{A}{2}x^2+\frac{C}{2}y^2+Bxy-(A+B)x-(E-B-C)y+\frac{A+C}{2}-E$$

Sumando $-ax^2-by^2-cxy-dx-ey-f$ y agrupando, el numerador queda

$$(\frac{A}{2}-a)x^2+(\frac{C}{2}-b)y^2+(B-c)xy-(A+B+d)x-(-E+B+C+e)y+\frac{A+C}{2}+B-E-f$$

Para que todo valga cero, tiene que cumplirse

$$a = A/2 \quad (1)$$
$$b = C/2 \quad (2)$$
$$c = B \quad (3)$$
$$d = -A-B \quad (4)$$
$$e = E-B-C \quad (5)$$
$$f = A/2+C/2+B-E \quad (6)$$

Por tanto $a+b+c+d+e+f =$ (sumamos todos los lados derechos de las igualdades) $= 0$.

Versión 2: Ahora tenemos

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} = \frac{\frac{2xlog(y)}{y}-ax^2-by^2-cxy-dx-ey-f}{(x-1)^2+(y-1)^2} = 0$$

El único cambio es que ahora $f(x,y)$ es la $f(x,y)$ de la versión anterior multiplicada por 2. Al derivar esta constante sale multiplicando, de donde ahora

$$\frac{2xlog(y)}{y} = 2f(1,1)+2\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+2\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)+2\frac{1}{2}\left((x-1\ y-1)2\mathbb{H}_f(1,1)\begin{pmatrix}(x-1)\\(y-1)\end{pmatrix}\right)+R(x,y)$$

Donde f es la misma función de la versión anterior. El 2 que multiplica a la Hessiana se debe a que si $g=2f$, entonces $\frac{\partial g}{\partial x^2} = 2\frac{\partial f}{\partial x}$ y por tanto $\frac{\partial^2 g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2\frac{\partial f}{\partial x}) = 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

Lo mismo sucede con las otras derivadas de segundo orden, por lo que la Hessiana de g es la misma que la de f pero con cada entrada multiplicada por 2.

El término cuadrático ahora queda $2[A(x-1)^2+2B(x-1)(y-1)+C(y-1)^2]$, y el límite a estudiar ahora es

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2E(y-1)+2[A(x-1)^2+2B(x-1)(y-1)+C(y-1)^2]-ax^2-by^2-cxy-dx-ey-f}{(x-1)^2+(y-1)^2} = 0$$

Agrupando, el numerador queda

$$(2A-a)x^2+(2C-b)y^2+(4B-c)xy-(4A+4B+d)x-(-2E+4B+4C+e)y+2(A+C)+4B-2E-f$$

Para que todo valga cero, tiene que cumplirse

$$a = 2A \quad (7)$$
$$b = 2C \quad (8)$$
$$c = 4B \quad (9)$$
$$d = -4A-4B \quad (10)$$
$$e = 2E-4B-4C \quad (11)$$
$$f = 2A+2C+4B-2E \quad (12)$$

Al igual que antes al sumar todos los términos se cancelan por lo que $a+b+c+d+e+f=0$.

8 Problema 8 (Integrales Dobles)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida por $f(x,y) = ye^x$ y sea R la región delimitada por $x \geq y^2 + 1$, $y \geq 0$, y $x \leq K$ donde $K > 1$.

Halle K para que $\displaystyle\iint_R f(x,y)dxdy = \frac{e}{2}$

Resolución: Si planteamos a R como región de tipo I, tenemos

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_1^K \left(\int_0^{\sqrt{x-1}} e^x y\ dy \right) dx = \int_1^K e^x \left(\int_0^{\sqrt{x-1}} y\ dy \right) dx$$

La integral en y queda $\frac{y^2}{2}|_0^{\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{2}$ por lo que la integral en x queda $\int_1^K e^x(\frac{x-1}{2})dx$.

Versión 1: Luego de aplicar distributiva y aplicar Barrow obtenemos $\int_1^K e^x(\frac{x-1}{2})dx = \frac{1}{2}\left(e^K(K-2)+e\right) = \frac{e}{2}$, igualdad que se cumple para $K = 2$.

Versión 2: Hay que hallar K de modo que $\displaystyle\iint_R f(x,y)dxdy = \frac{e^3+e}{2}$.

Repitiendo las mismas cuentas, llegamos a $\frac{1}{2}\left(e^K(K-2)+e\right) = \frac{e^3+e}{2}$, igualdad que se cumple para $K = 3$.

Versión 3: Hay que hallar K de modo que $\displaystyle\iint_R f(x,y)dxdy = \frac{2e^4+e}{2}$.

En esta ocasión es $\frac{1}{2}\left(e^K(K-2)+e\right) = \frac{2e^4+e}{2}$, igualdad que se cumple para $K = 4$.