2do. parcial - Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

PARTE I: VERDADERO O FALSO

Verdadero o Falso #1

V1: Sea

$$z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2021}.$$

Entonces

$$\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Im}(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- Verdadero.
- Falso.

V2: Sea

$$z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2021}.$$

Entonces

$$\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Im}(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- Verdadero.
- Falso.

V3: Sea

$$z = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2021}.$$

Entonces

$$\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- Verdadero.
- Falso.

V4: Sea

$$z = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2021}.$$

Entonces

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- Verdadero.
- Falso.

Verdadero o Falso #2

V1: Considere la sucesión dada por

$$a_n = \frac{\cos(2\pi/n)}{n^2}$$

para $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Entonces, (a_n) es monótona y convergente.

- Verdadero.
- Falso.

V2: Considere (a_n) la sucesión dada por

$$a_n = \frac{\cos(2\pi/n)}{n^2}$$

para $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Entonces, tanto (a_n) como la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergen.

- Verdadero.
- Falso.

V3: Considere (a_n) la sucesión dada por

$$a_n = \frac{\sin(2\pi/n) + 1}{n}$$

para $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Entonces, (a_n) es monótona y convergente.

- Verdadero.
- Falso.

V4: Considere (a_n) la sucesión dada por

$$a_n = \frac{\sin(2\pi/n) + 1}{n}$$

para $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Entonces, (a_n) converge y la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

- Verdadero.
- Falso.

Verdadero o Falso #3

V1: Considere la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \times \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$$

con $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Entonces,

$$\operatorname{int}\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \bigcap_{n\geq 1} \operatorname{int}(A_n).$$

- Verdadero.
- Falso.

V2: Considere la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$A_n = \left[-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right] \times \left[-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$$

con $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Entonces,

$$\bigcap_{n\geq 1} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \operatorname{int}(A_n).$$

- Verdadero.
- Falso.

V3: Considere la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \times \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$$

con $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Entonces,

$$\partial\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \bigcap_{n\geq 1} \partial(A_n).$$

- Verdadero.
- Falso.

V4: Considere la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$A_n = \left(-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) \times \left(-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$$

con $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Entonces,

$$\bigcap_{n\geq 1} A_n = \operatorname{int}\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right).$$

- Verdadero.
- Falso.

Verdadero o Falso #4

V1: Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y $U_n = \overline{B}((0,0), 1 + 1/n)$ la bola cerrada de centro $(0,0)$ y radio $1 + 1/n$. Si $U = \bigcap_{n\geq 1} U_n$ es la intersección de todas las bolas anteriores, entonces la restricción $f|_U$ de f sobre U posee máximo y mínimo absoluto.

- Verdadero.
- Falso.

V2: Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y $U_n = \overline{B}((0,0), 2 + 1/n)$ la bola cerrada de centro $(0,0)$ y radio $2 + 1/n$. Si $U = \bigcap_{n\geq 1} U_n$ es la intersección de todas las bolas anteriores, entonces la restricción $f|_U$ de f sobre U no posee máximo absoluto.

- Verdadero.
- Falso.

V3: Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y $U_n = B((0,0), 3 - 1/n)$ la bola abierta de centro $(0,0)$ y radio $3 - 1/n$. Si $U = \bigcup_{n\geq 1} U_n$ es la unión de todas las bolas anteriores, entonces la restricción $f|_U$ de f sobre U no posee necesariamente mínimo absoluto.

- Verdadero.
- Falso.

V4: Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y $U_n = B((0,0), 4 - 1/n)$ la bola abierta de centro $(0,0)$ y radio $4 - 1/n$. Si $U = \bigcup_{n\geq 1} U_n$ es la unión de todas las bolas anteriores, entonces la restricción $f|_U$ de f sobre U posee necesariamente máximo y mínimo absoluto.

- Verdadero.
- Falso.

Múltiple Opción #1

V1: Se considera la ecuación diferencial

$$x'' + \alpha x' + \beta x = 2e^{2t}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sabemos que

$$x(t) = t^2 e^{2t}$$

es solución de la ecuación. Entonces $\alpha + \beta$ vale:

- 0
- -1
- -2
- 1
- 2

V2: Se considera la ecuación diferencial

$$x'' + \alpha x' + \beta x = 2e^{3t}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sabemos que

$$x(t) = t^2 e^{3t}$$

es solución de la ecuación. Entonces $\alpha + \beta$ vale:

- 3
- 0
- 1
- 2
- 4

V3: Se considera la ecuación diferencial

$$x'' + \alpha x' + \beta x = 2e^{-2t}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sabemos que

$$x(t) = t^2 e^{-2t}$$

es solución de la ecuación. Entonces $\alpha + \beta$ vale:

- 8
- 2
- 4
- 6
- 10

Múltiple Opción #2

V1: Se considera el sólido

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1 \right\}.$$

Entonces la integral $\iiint_D z^3 + z \; dxdydz$ vale

- 0
- $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\frac{2\pi}{3}$
- $-\frac{\pi^2}{4}$
- $\sqrt{3}\pi$

V2: Se considera el sólido

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; \frac{x^2}{9} + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$

Entonces la integral $\iiint_D z^3 + z \; dxdydz$ vale

- 0
- $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\frac{4\pi}{9}$
- $-\frac{\pi^2}{9}$
- $\sqrt{6}\pi$

V3: Se considera el sólido

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + \frac{y^2}{16} + z^2 \leq 1 \right\}.$$

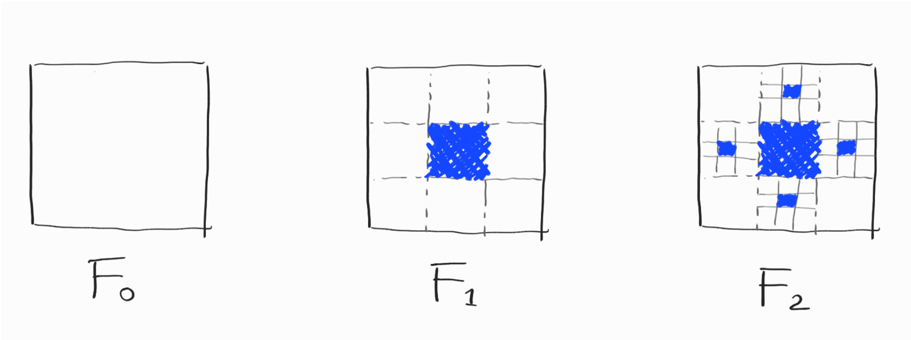
Entonces la integral $\iiint_D z^3 + z \; dxdydz$ vale

- 0
- $-\frac{1}{2}$
- $\frac{\pi}{3}$
- $-\frac{\pi^2}{16}$
- 4π

Múltiple Opción #3

V1: Sea F_0 un cuadrado de lado 3, que está todo pintado de blanco.

- A partir de F_0, construimos la figura F_1 de la siguiente manera: subdividimos el cuadrado grande en 9 cuadrados iguales, tomamos el cuadrado central, y lo pintamos de azul.
- Ahora construimos F_2: subdividimos cada uno de los **cuatro** cuadrados adyacentes con el central, en nueve cuadrados iguales, y pintamos los cuatro cuadrados centrales respectivos, de azul.
- Repetimos este proceso inductivamente hasta el infinito.

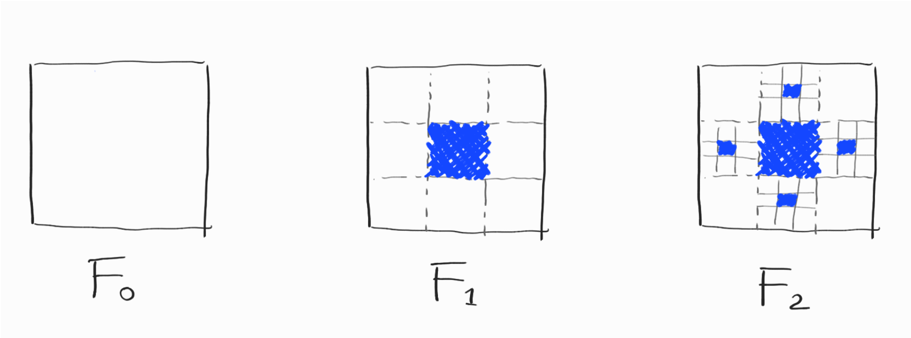


Al terminar el proceso, ¿cuál es el área que queda pintada de azul?

- $\frac{9}{5}$
- $\frac{7}{3}$
- 5
- $\frac{3}{2}$
- 4

V2: Sea F_0 un cuadrado de lado 6, que está todo pintado de blanco.

- A partir de F_0, construimos la figura F_1 de la siguiente manera: subdividimos el cuadrado grande en 9 cuadrados iguales, tomamos el cuadrado central, y lo pintamos de azul.
- Ahora construimos F_2: subdividimos cada uno de los **cuatro** cuadrados adyacentes con el central, en nueve cuadrados iguales, y pintamos los cuatro cuadrados centrales respectivos, de azul.
- Repetimos este proceso inductivamente hasta el infinito.

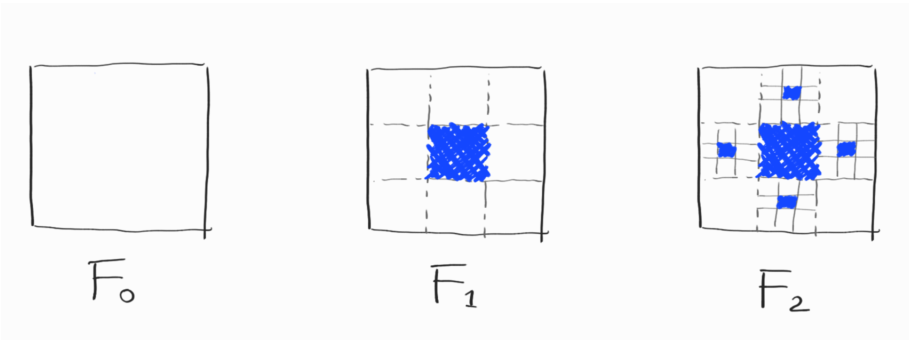


Al terminar el proceso, ¿cuál es el área que queda pintada de azul?

- $\frac{36}{5}$
- $\frac{28}{3}$
- $\frac{21}{2}$
- 6
- 16

V3: Sea F_0 un cuadrado de lado 9, que está todo pintado de blanco.

- A partir de F_0, construimos la figura F_1 de la siguiente manera: subdividimos el cuadrado grande en 9 cuadrados iguales, tomamos el cuadrado central, y lo pintamos de azul.
- Ahora construimos F_2: subdividimos cada uno de los **cuatro** cuadrados adyacentes con el central, en nueve cuadrados iguales, y pintamos los cuatro cuadrados centrales respectivos, de azul.
- Repetimos este proceso inductivamente hasta el infinito.



Al terminar el proceso, ¿cuál es el área que queda pintada de azul?

- $\frac{81}{5}$
- $\frac{62}{3}$
- $\frac{27}{2}$
- 36
- 45

PARTE III: DESARROLLO

Desarrollo #1 **[25 puntos]**

(a) Sea

$$f(t) = \frac{1}{t\ \log^2(t-3)}.$$

Determine la convergencia o divergencia de las integrales

$$\int_4^{2021} f(t)\ dt \quad \text{y} \quad \int_{2021}^{+\infty} f(t)\ dt.$$

Luego, clasifique la integral impropia $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(t)\ dt.$ `[12 puntos]`

(b) Enuncie el criterio serie-integral para clasificación de series. `[5 puntos]`

(c) Se considera la serie

$$\sum_{n=2021}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n\ \log^2(n-3)}.$$

Demuestre que esta serie converge absolutamente. `[8 puntos]`

Desarrollo #2 **[25 puntos]**

Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \lambda & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Hallar el valor de λ para el cual f es continua en $(0,0)$. `[3 puntos]`

Para el valor de λ hallado en la parte (a):

(b) Calcule las derivadas parciales de f en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$. `[6 puntos]`

(c) Determine la diferenciabilidad de f en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$. `[12 puntos]`

(d) Calcule las derivadas direccionales $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ donde $\vec{v} = (1,1)$. `[4 puntos]`