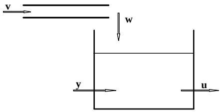
# SyC - Hoja 12 - Ej. 2

Exámen de Control I 16/11/89 - Problema N °2

Una cinta transportadora de retardo **T** alimenta un depósito de material. De este depósito otro proceso extrae material. Se desea controlar la entrada de material a la cinta de modo de mantener el nivel del depósito en un valor deseado.
Para ello se trabaja en tiempo discreto. Se divide el tiempo en intervalos de longitud **t**. Se cumple que **T = nt**.




Sean:

$\mathbf{v_k}$ material que entra a la cinta en el intervalo [kt,(k+1)t)
$\mathbf{w_k}$ material que sale de la cinta en el intervalo [kt,(k+1)t)
$\mathbf{u_k}$ material que sale del depósito en el intervalo [kt,(k+1)t)
$\mathbf{y_k}$ material acumulado en el depósito en el instante kt
(diferencia con el valor deseado)

Se realimenta la entrada a la cinta en la forma: $\mathbf{v_k = -ay_k + bu_k}$
El sistema resultante tiene a las sucesiones $\mathbf{(u_k)}$ como entrada y $\mathbf{(y_k)}$ como salida.

Se pide :

**a)** Obtener un diagrama de bloques y una representación en variables de estado del sistema.

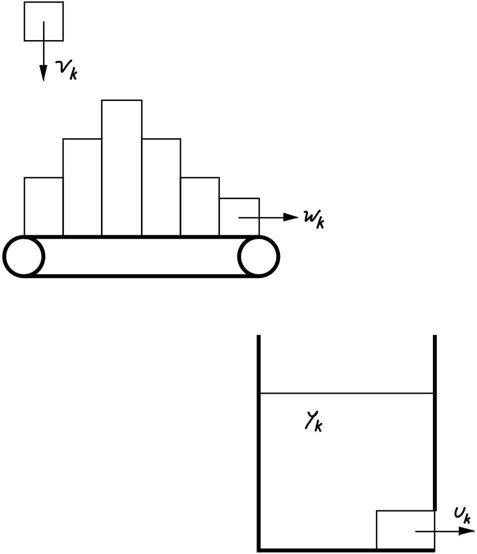
Se trabaja para las partes b), c) y d) con **n = 1** (T = t).

**b)** Hallar la condición en **a** para que el sistema sea estable.

**c)** Hallar la transferencia **H(z) = Y(z)/U(z)**.

**d)** Hallar **b** para que con $\mathbf{(u_k)}$ un escalón unitario, se cumpla asintóticamente el objetivo de control.
Para ese valor de **b** y con **a = 0,5**, calcular los 10 primeros términos de $\mathbf{(y_k)}$.

# Modelado




- $t$: longitud de los intervalos de tiempo.
- $T = nt$: retardo de la cinta.
- $v_k$: material que entra a la cinta en el intervalo $[kt, (k+1)\,t)$
- $w_k$: material que sale de la cinta en el intervalo $[kt, (k+1)\,t)$
- $u_k$: material que sale del depósito en el intervalo $[kt, (k+1)\,t)$
- $y_k$: material acumulado en el depósito en el instante $kt$ (diferencia con el valor deseado)
- $v_k = -ay_k + bu_k$

# Parte a - Modelado y diagrama de bloques

Cinta transportadora:

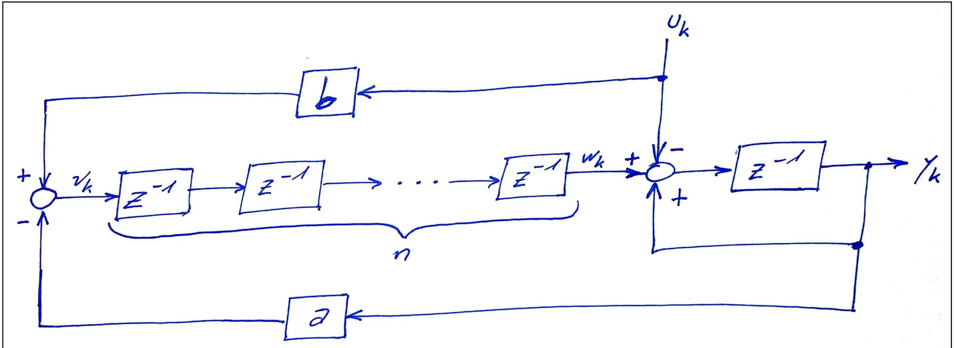
$$w_k = v_{k-n}$$

Balance de material en el depósito:

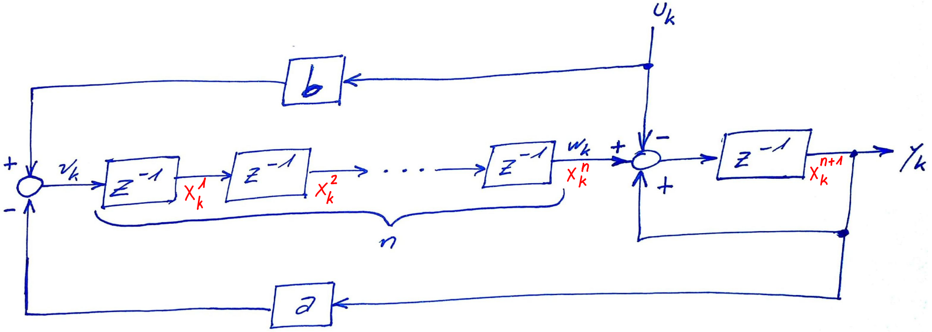
$$y_{k+1} = y_k + w_k - u_k$$

Alimentación de la cinta transportadora:

$$v_k = bu_k - ay_k$$



# Parte a - Representación en variables de estado




$$
\begin{aligned}
x_{k+1}^1 &= bu_k - ax_k^{n+1} \\
x_{k+1}^2 &= x_k^1 \\
&\vdots \\
x_{k+1}^n &= x_k^{n-1} \\
x_{k+1}^{n+1} &= x_k^{n+1} + x_k^n - u_k \\
y_k &= x_k^{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

# Parte a - Representación en variables de estado

$$\boldsymbol{B} := \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_k := \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \\ x_k^3 \\ \vdots \\ x_k^n \\ x_k^{n+1} \end{bmatrix}$$

Representación en variables de estado:

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{B}u_k \\ y_k = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{D}u_k \end{cases}}$$

donde

$$\boldsymbol{D} := 0.$$

# Simplificación

Para las partes b) a d), se asume que $n = 1$. Por lo tanto:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

# Parte c: Función de transferencia

$$H(z) := \frac{Y(z)}{U(z)}, \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$H(z) = \boldsymbol{C}(z\mathrm{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} = \boldsymbol{C}(z\mathrm{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}\frac{[\operatorname{cof}(z\mathrm{I} - \boldsymbol{A})]^{\mathsf{T}}}{\det(z\mathrm{I} - \boldsymbol{A})}\boldsymbol{B}$$

$$= \boldsymbol{C}\frac{\left[\operatorname{cof}\left(\begin{bmatrix} z & a \\ -1 & z-1 \end{bmatrix}\right)\right]^{\mathsf{T}}}{\det(z\mathrm{I} - \boldsymbol{A})}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}\frac{\begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ -a & z \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}}{z^2 - z + a}\boldsymbol{B}$$

$$= \boldsymbol{C}\frac{\begin{bmatrix} z-1 & -a \\ 1 & z \end{bmatrix}}{z^2 - z + a}\boldsymbol{B} = \frac{b - z}{z^2 - z + a}$$

$$\boxed{H(z) = \frac{b - z}{z^2 - z + a}}$$

# Criterios de estabilidad (5)

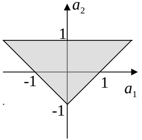
* Criterio de Juri – Schur – Kohn

Ejemplo: $A(z) = z^2 + a_1.z + a_2$

$$
\begin{array}{ccc|c}
1 & a_1 & a_2 & \\
a_2 & a_1 & 1 & \alpha_2 = a_2 \\
\hline
1 - a_2^2 & a_1.(1 - a_2) & & \\
a_1.(1 - a_2) & 1 - a_2^2 & & \alpha_1 = \dfrac{a_1}{1 + a_2} \\
\hline
\end{array}
$$

$$1 - a_2^2 - \frac{a_1^2.(1 - a_2)}{1 + a_2}$$

$$\text{Estable} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a_2^2 > 0 \\ \dfrac{1 - a_2}{1 + a_2}.\left[(1 + a_2)^2 - a_1^2\right] > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 < 1 \\ a_2 > -1 + a_1 \\ a_2 > -1 - a_1 \end{cases}$$



# Parte b - Estabilidad

La función de transferencia del sistema es

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b - z}{z^2 - z + a}.$$

Aplicando el resultado de estabilidad para sistemas de tiempo discreto de 2do. orden repasado anteriormente, se concluye que el sistema es estable si y solo si:

$$\boxed{0 < a < 1}$$

## Parte d - Cumplimiento asintótico del objetivo de control

Se debe hallar $b$ para que con una entrada en forma de escalón unitario, se cumpla asintóticamente el objetivo de control.

El objetivo de control se cumple asintóticamente si $\lim_{k\to\infty} y_k = 0$.

Como la entrada es un escalón unitario, $U(z) = \frac{z}{z-1}$ y entonces

$$Y(z) = H(z)U(z) = \left(\frac{b-z}{z^2-z+a}\right)\left(\frac{z}{z-1}\right).$$

Como todos los polos de $Y(z)$ están dentro del círculo unitario, excepto por un polo simple en $z=1$, existe el límite de $y_k$ para $k \to \infty$ y se puede aplicar el teorema del valor final:

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{z\to 1} (z-1)\, Y(z) = \frac{b-1}{a}.$$

Entonces, se debe elegir:

$$\boxed{b=1}$$

# Parte d - Diez primeros valores de $y_k$ ante una entrada escalón para $a = \frac{1}{2}$ y $b = 1$

$$Y(z) = H(z)U(z) = \left(\frac{1-z}{z^2 - z + \frac{1}{2}}\right)\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{-z^2+z}{z^3 - 2z^2 + \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}}$$

$$-z^2 + z \quad \Big| \; z^3 - 2z^2 + \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}$$

$$\underbrace{\;}_{y_0} \underbrace{-z^{-1}}_{y_1} \underbrace{-z^{-2}}_{y_2} \underbrace{-\frac{1}{2}}_{y_3} z^{-3} \underbrace{+0}_{y_4} z^{-4} \underbrace{+\frac{1}{4}}_{y_5} z^{-5} \underbrace{+\frac{1}{4}}_{y_6} z^{-6} \underbrace{+\frac{1}{8}}_{y_7} z^{-7} \underbrace{+0}_{y_8} z^{-8} \underbrace{-\frac{1}{16}}_{y_9} z^{-9} \underbrace{-\frac{1}{16}}_{y_{10}} z^{-10}$$

$$-z + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}z^{-1}$$

$$-\frac{1}{2} + z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}$$

$$0z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-3}$$

$$\frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-3}$$

$$\frac{1}{4}z^{-3} - \frac{3}{8}z^{-4} + \frac{1}{8}z^{-5}$$

$$\frac{1}{8}z^{-4} - \frac{1}{4}z^{-5} + \frac{1}{8}z^{-6}$$

$$0z^{-5} - \frac{1}{16}z^{-6} + \frac{1}{16}z^{-7}$$

$$-\frac{1}{16}z^{-6} + \frac{1}{16}z^{-7}$$

$$-\frac{1}{16}z^{-7} + \frac{3}{32}z^{-8} - \frac{1}{32}z^{-9}$$

$$-\frac{1}{32}z^{-8} + \frac{1}{16}z^{-9} - \frac{1}{32}z^{-10}$$

$y_0 = 0$
$y_1 = -1$
$y_2 = -1$
$y_3 = -\frac{1}{2}$
$y_4 = 0$
$y_5 = \frac{1}{4}$
$y_6 = \frac{1}{4}$
$y_7 = \frac{1}{8}$
$y_8 = 0$
$y_9 = -\frac{1}{16}$
$y_{10} = -\frac{1}{16}$