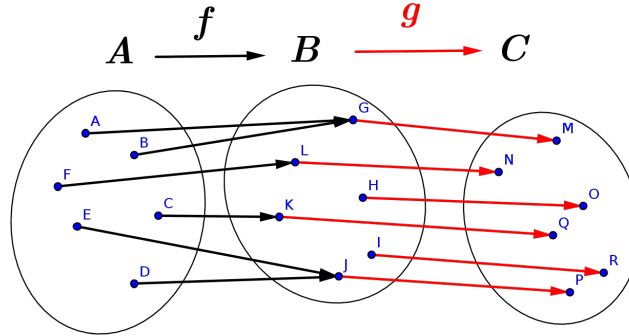




**Ejercicio 1** Sean  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$  funciones dadas por el siguiente diagrama



Determinar  $g \circ f$ .

**Ejercicio 2** Para los siguientes pares de funciones definidas en  $\mathbb{R}$  calcular  $f \circ g$  y  $g \circ f$ .

- $f(x) = 2x + 1$ ,  $g(x) = x^3 - x^2 - 4$
  - $f(x) = x^2 + x + 4$ ,  $g(x) = \cos(x)$
  - $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = \frac{x}{x^4 + 5}$
- $f(x) = |x + 1|$ ,  $g(x) = |2x|$
  - $f(x) = x + 1$ ,  $g(x) = \max\{1, x - 1\}$
  - $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 2 \\ x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

**Ejercicio 3** Para los siguientes pares de funciones calcular  $f \circ g$  y  $g \circ f$ . En caso de que no esté bien definida la composición modificar los dominios para que resulte bien definida.

- $f : \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x) = 2x + 1$ .
- $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \log(x)$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x) = 2x - 1$ .
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = |x|$  y  $g : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ .

**Ejercicio 4** Para las funciones  $f$ ,  $g$  y  $g \circ f$ , del Ejercicio 2 determinar cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

**Ejercicio 5** Consideremos las siguientes funciones:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x^2$
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  tal que  $g(x) = x^2$ .
- $h : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $h(x) = x^2$ .
- $i : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  tal que  $i(x) = x^2$ .

a) ¿Son todas las funciones iguales? Justificar.

b) Estudiar inyectividad, sobreyectividad y biyectividad.

**Ejercicio 6** Determinar para las siguientes funciones  $f : A \rightarrow B$  cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas:



# Práctico 7: Composición e Inversa de funciones



1.  $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{N}, f(x) = x + 5$

4.  $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{N}, f(x) = 2x$

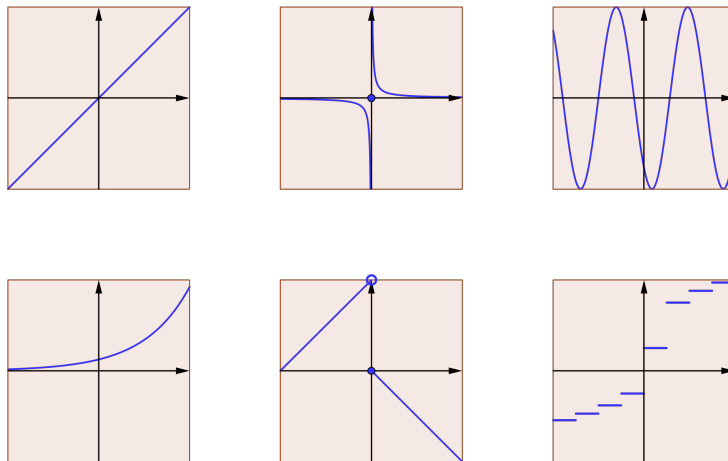
2.  $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}, f(x) = x + 5$

5.  $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}, f(x) = 2x$

3.  $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = x + 5$

6.  $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = 2x$

**Ejercicio 7** Determinar para los siguientes bosquejos de funciones cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas:



**Ejercicio 8** Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  dos funciones.

1. Probar que si  $f$  y  $g$  son inyectivas entonces también lo es  $g \circ f$ .
2. Probar que si  $f$  y  $g$  son sobreyectivas entonces también lo es  $g \circ f$ .
3. a) Enunciar el recíproco de 1.  
b) ¿Es verdadero el enunciado anterior? Discutir en detalle.
4. a) Enunciar el recíproco de 2.  
b) ¿Es verdadero el enunciado anterior? Discutir en detalle.

**Ejercicio 9** ¿Verdadero o falso?

1. Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es estrictamente creciente (resp. decreciente) entonces  $f$  es inyectiva (si es verdadero pruébelo, si es falso dé contraejemplo).
2. Si  $f$  es inyectiva, ¿debe ser estrictamente creciente?
3. La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x^3 + x$  es biyectiva.

**Ejercicio 10** Verificar que los pares de funciones dadas corresponden a una función y su inversa. Salvo que se indique lo contrario el dominio es el más grande posible.

1.  $\begin{cases} f(x) = 2x - 1 \\ g(x) = \frac{x+1}{2} \end{cases}$

2.  $\begin{cases} f(x) = x^{1/3} \\ g(x) = x^3 \end{cases}$



$$3. \begin{cases} f(x) = \log_2(x+1) & \text{con dominio } (0, \infty) \\ g(x) = 2^x - 1 & \text{con dominio } \mathbb{R} \end{cases} \quad 4. \begin{cases} f(x) = 2 + e^{x-1} & \text{con dominio } \mathbb{R} \\ g(x) = \ln(x-2) + 1 & \text{con dominio } (2, \infty) \end{cases}$$

Graficar ambas funciones en cada caso en un mismo sistema de ejes. ¿Puedes observar alguna característica entre el gráfico de  $f$  y de  $g$ ?

**Ejercicio 11** Se consideran las funciones trigonométricas:

- $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  tal que  $f(x) = \sin(x)$ .
- $g : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  tal que  $g(x) = \cos(x)$ .
- $h : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $h(x) = \tan(x)$ .

1. Graficar cada función.

2. Notar con la ayuda del gráfico cada una de ellas es biyectiva y por tanto se define

- $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  como  $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$ .
- $g^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  como  $g^{-1}(x) = \arccos(x)$ .
- $h^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  como  $h^{-1}(x) = \arctan(x)$ .

Realizar un bosquejo del gráfico de las inversas.

**Ejercicio 12** Verificar que las siguientes funciones son biyectivas y hallar una fórmula para la función inversa.

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x + 7$ .
2.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = 2 - 3x^3$ .
3.  $f : \mathbb{R} \setminus \{5/2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3/2\}$  tal que  $f(x) = \frac{3x+2}{2x-5}$ .
4.  $f : [-\frac{4}{3}, \infty) \rightarrow [0, +\infty)$  con  $f(x) = \sqrt{3x+4}$ .

Graficar  $f^{-1}$ . Utilizar GeoGebra.

**Ejercicio 13** Demostrar que las siguientes funciones son biyectivas y hallar una fórmula para la función inversa.

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ .
2.  $f : [0, 4] \rightarrow [0, 32]$  tal que  $f(x) = -x^2 - 4x + 32$ .
3.  $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = 2\ln(x-1)$ .
4.  $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = e^x$ .

Graficar  $f^{-1}$ . Utilizar GeoGebra.

**Ejercicio 14** Sean  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  y  $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x) = e^{-x/2}$ . Consideramos la composición:  $h = f \circ g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \text{Im}(h)$ .

Indicar la opción correcta:

1.  $h$  es invertible y  $h^{-1}(x) = 2\ln(\frac{x}{x-1})$ .
2.  $h$  no es invertible.
3.  $h$  es invertible y  $h^{-1}(x) = \ln(\frac{2x}{x-1})$ .
4.  $h$  es invertible y  $h^{-1}(x) = 2\ln(\frac{1}{x}) + 1$ .

**Ejercicio 15 (Ejercicios de pruebas anteriores)** Indicar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. La función  $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 2]$  dada por  $f(x) = \cos(x) + 1$  es biyectiva.