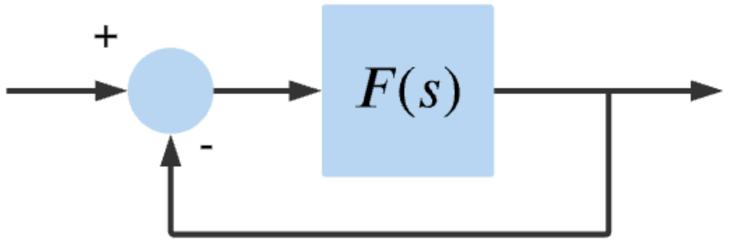
Sistemas y Control

CLASE DE PRÁCTICO. HOJA 8, EJS 1 - 2

Criterio de estabilidad de Nyquist

- Sea un sistema realimentado de la forma

$$G(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$



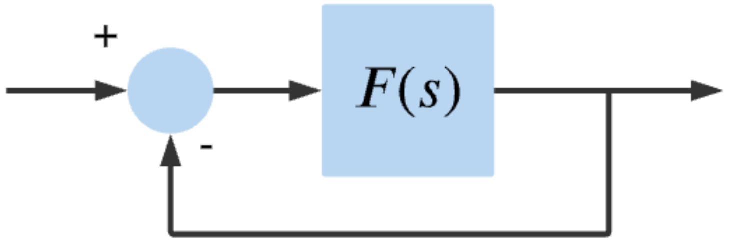
Con $F(s) = \alpha \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}, m \leq n$

- Cuáles son los polos y ceros del sistema realimentado?

Criterio de estabilidad de Nyquist

- Sea un sistema realimentado de la forma

$$G(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$

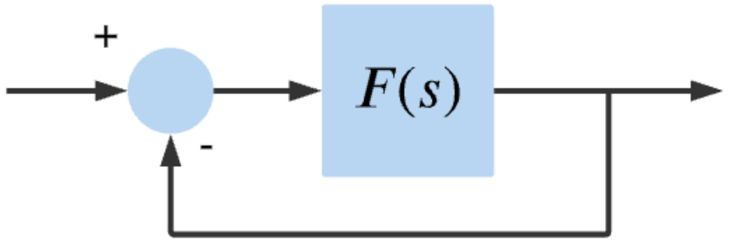


Con $F(s) = \alpha \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s - p_j)}, m \leq n$

- Cuáles son los polos y ceros del sistema realimentado?
  - Los ceros de $G(s)$ son los ceros de $F(s)$
  - Los polos de $G(s)$ son los ceros de $1 + F(s)$

Criterio de estabilidad de Nyquist

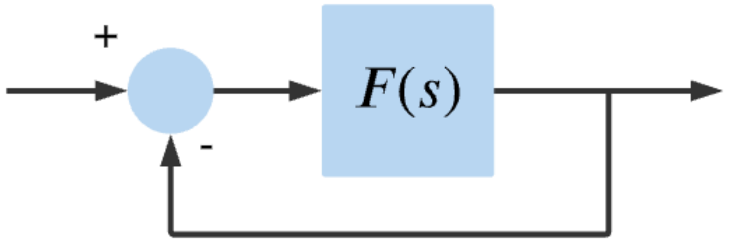
- Queremos estudiar la estabilidad del sistema realimentado
  - Esto equivale a determinar si existen polos de $G(s)$ con $Re(p_j) > 0$



$$G(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$

Criterio de estabilidad de Nyquist

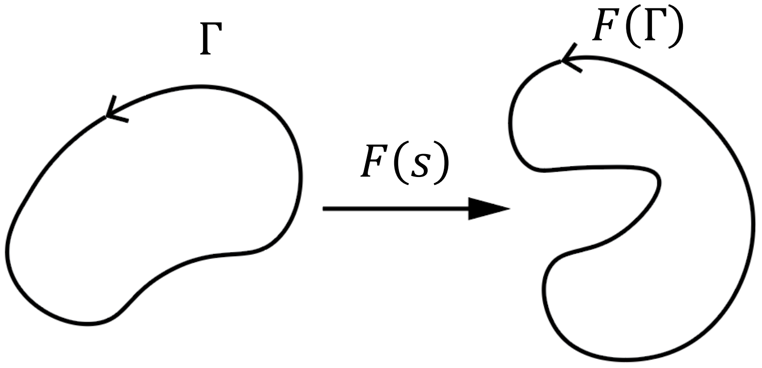
- Queremos estudiar la estabilidad del sistema realimentado
  - Esto equivale a determinar si existen polos de $G(s)$ con $Re(p_j) > 0$
  - Para esto, podemos utilizar el principio del argumento



$$G(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$

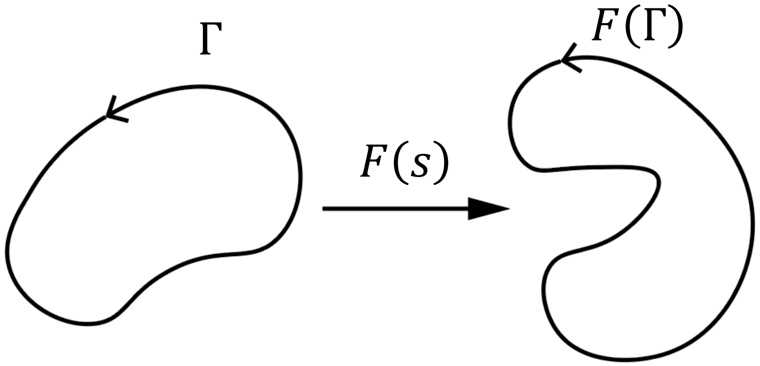
Principio del argumento

- Sean
  - $F(s)$ función racional de variable compleja, $F(s) = \alpha \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$
  - Γ una curva de Jordan orientada positivamente
  - $F(s)$ analítica en Γ
    - No hay polos ni ceros de $F(s)$ sobre Γ



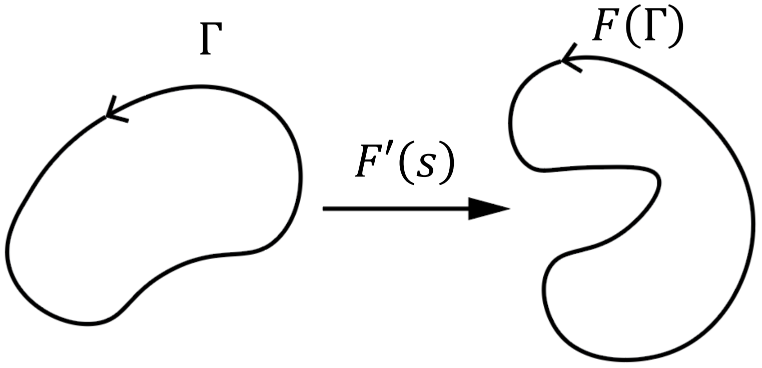
Principio del argumento

- Sean
  - $F(s)$ función racional de variable compleja, $F(s) = \alpha \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$
  - Γ una curva de Jordan orientada positivamente
  - $F(s)$ analítica en Γ
    - No hay polos ni ceros de $F(s)$ sobre Γ
  - En estas hipótesis, se cumple que en número de encierros del origen por parte de $F(\Gamma)$ es $Z - P$, donde
    - Z es el número de ceros de $F(s)$ interiores a Γ
    - P es el número de polos de $F(s)$ interiores a Γ



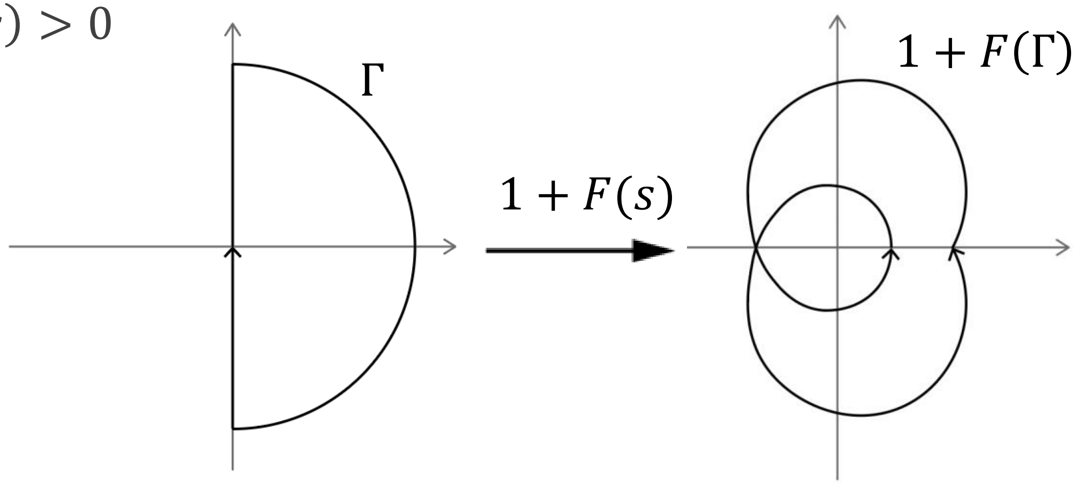
Criterio de estabilidad de Nyquist

- El criterio de estabilidad de Nyquist determina la estabilidad del sistema realimentado utilizando el principio del argumento
- Sean
  - $F'(s) = 1 + F(s)$



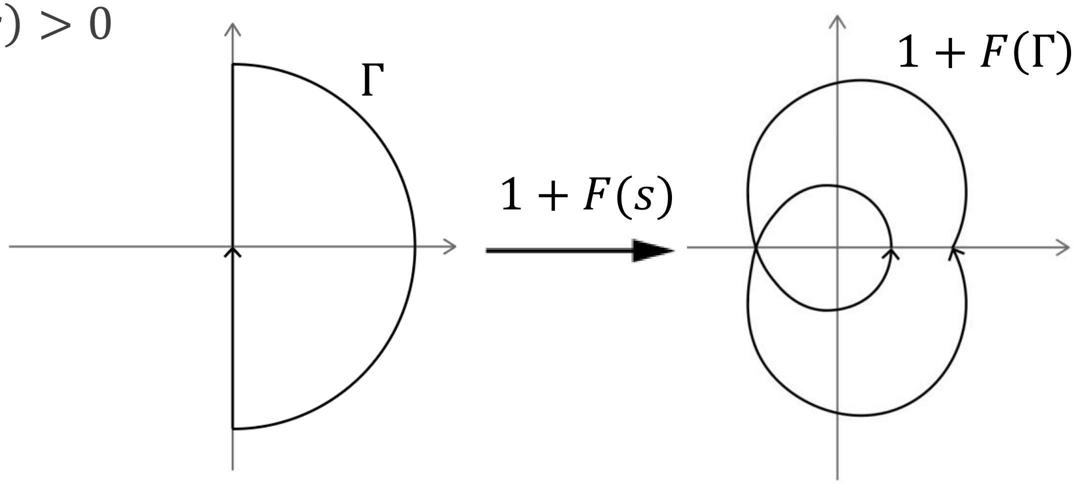
Criterio de estabilidad de Nyquist

- El criterio de estabilidad de Nyquist determina la estabilidad del sistema realimentado utilizando el principio del argumento
- Sean
  - $F'(s) = 1 + F(s)$
  - Γ una curva que contiene el semiplano complejo $Re(s) > 0$
    - En este caso Γ está orientada negativamente



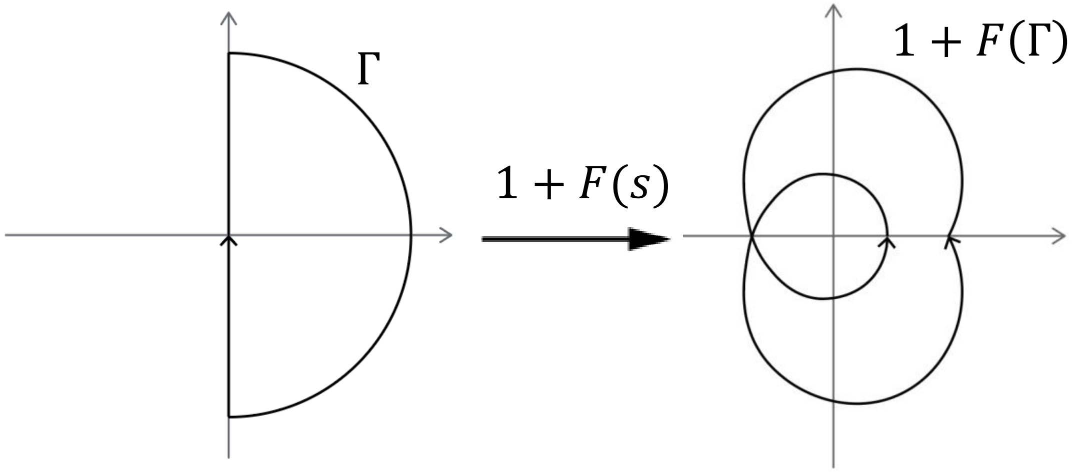
Criterio de estabilidad de Nyquist

- El criterio de estabilidad de Nyquist determina la estabilidad del sistema realimentado utilizando el principio del argumento
- Sean
  - $F'(s) = 1 + F(s)$
  - Γ una curva que contiene el semiplano complejo $Re(s) > 0$
    - En este caso Γ está orientada negativamente
  - Se cumple que
    - $N = -Z + P$
      - Z = Número de ceros de $1 + F(s)$ rodeados por Γ
      - P = Número de polos de $1 + F(s)$ rodeados por Γ



Criterio de estabilidad de Nyquist

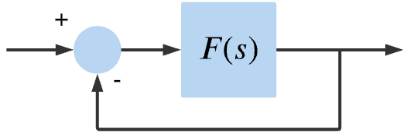
- Se cumple que
  - $N = -Z + P$
    - Z = Número de ceros de $1 + F(s)$ rodeados por Γ
    - P = Número de polos de $1 + F(s)$ rodeados por Γ



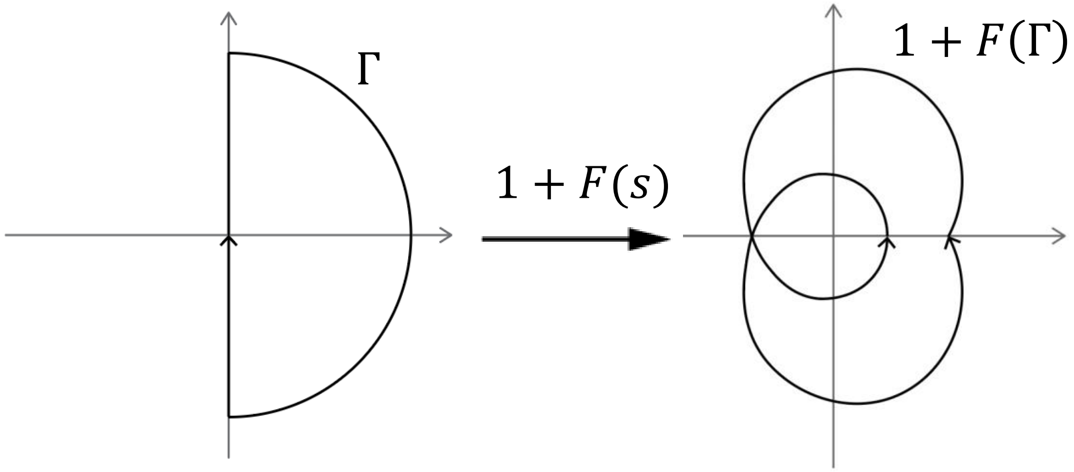
Criterio de estabilidad de Nyquist

- Se cumple que
  - $N = -Z + P$
    - Z = Número de ceros de $1 + F(s)$ rodeados por Γ
    - P = Número de polos de $1 + F(s)$ rodeados por Γ

Recordando las relaciones entre $F(s)$ y $G(s)$



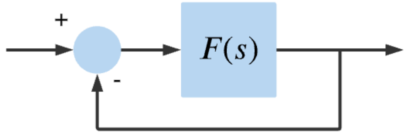
$$G(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$



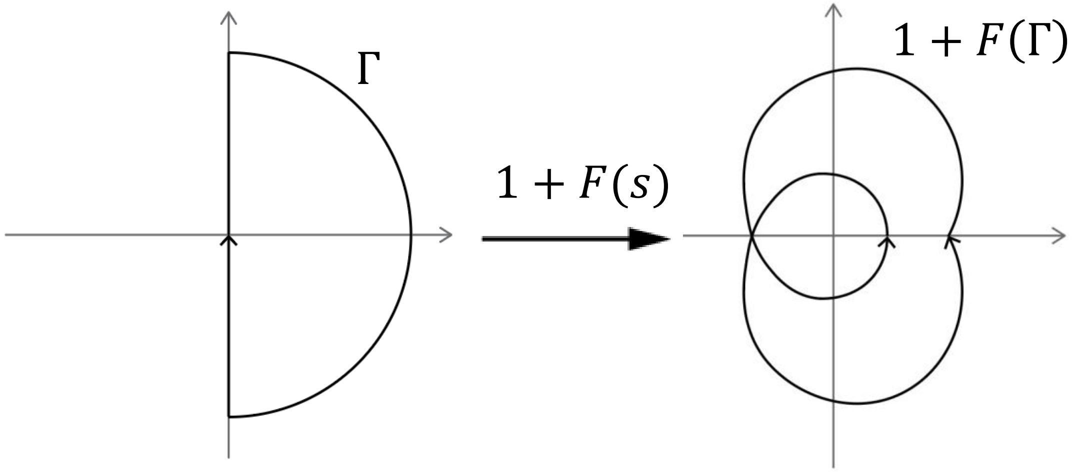
Criterio de estabilidad de Nyquist

- Se cumple que
  - $N = -Z + P$
    - Z = Número de polos inestables de $G(s)$
    - P = Número de polos inestables de $F(s)$

Recordando las relaciones entre $F(s)$ y $G(s)$



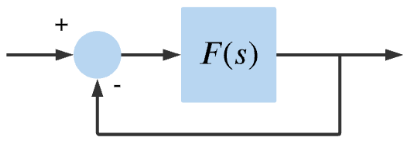
$$G(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$



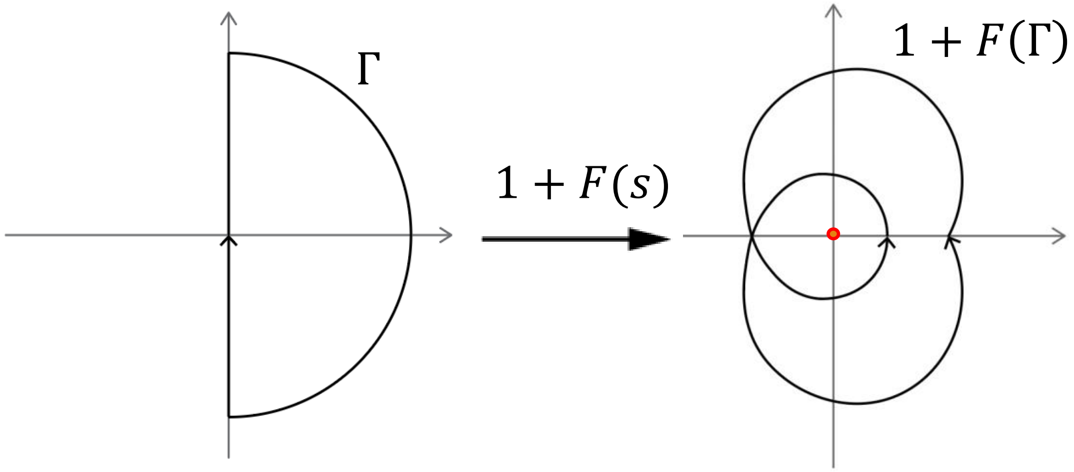
Criterio de estabilidad de Nyquist

- Se cumple que
  - $N = -Z + P$
    - Z = Número de polos inestables de $G(s)$
    - P = Número de polos inestables de $F(s)$
  - En lugar de trabajar con $1 + F(s)$, puedo trabajar con $F(s)$ y contar el número de rodeos a -1

Recordando las relaciones entre $F(s)$ y $G(s)$



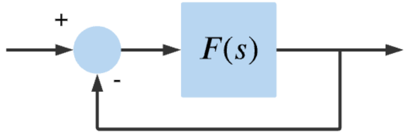
$$G(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$



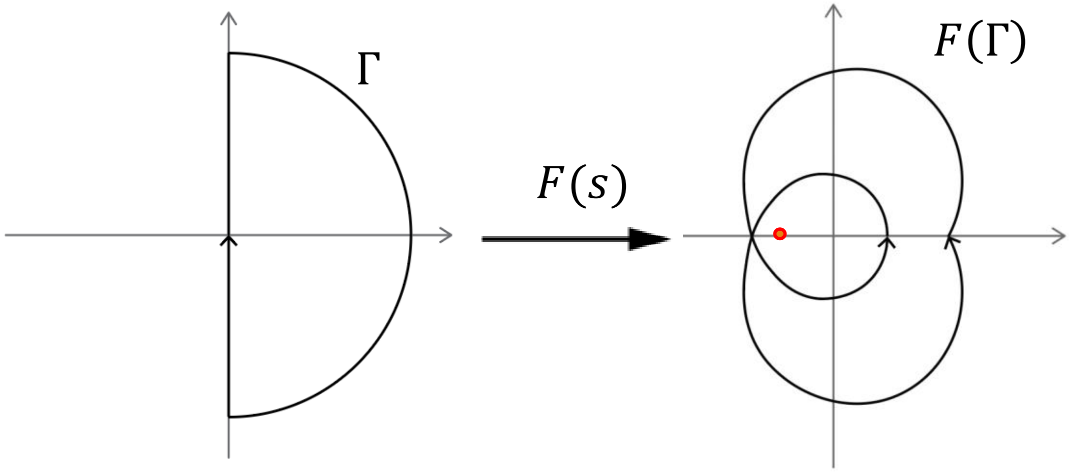
Criterio de estabilidad de Nyquist

- Se cumple que
  - $N = -Z + P$
    - Z = Número de polos inestables de $G(s)$
    - P = Número de polos inestables de $F(s)$
  - En lugar de trabajar con $1 + F(s)$, puedo trabajar con $F(s)$ y contar el número de rodeos a -1

Recordando las relaciones entre $F(s)$ y $G(s)$



$$G(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$



Criterio de estabilidad de Nyquist

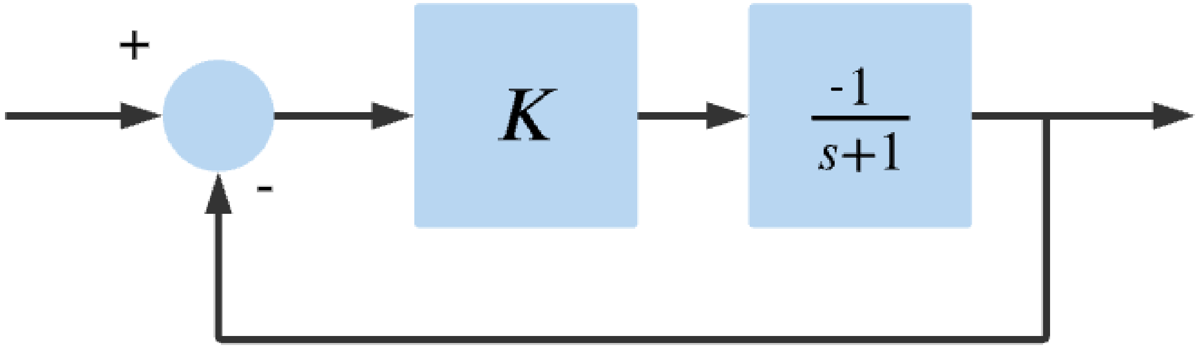
- Cuál es el verdadero valor del criterio de estabilidad de Nyquist?
- Hasta ahora, hemos visto varios criterios de estabilidad que a priori pueden parecer equivalentes
  - Lugar geométrico de las raíces, Routh – Hurwitz, …

Criterio de estabilidad de Nyquist

- Cuál es el verdadero valor del criterio de estabilidad de Nyquist?
- Hasta ahora, hemos visto varios criterios de estabilidad que a priori pueden parecer equivalentes
  - Lugar geométrico de las raíces, Routh – Hurwitz, …
- Para identificar el verdadero valor del criterio de estabilidad de Nyquist vale la pena considerar un ejemplo

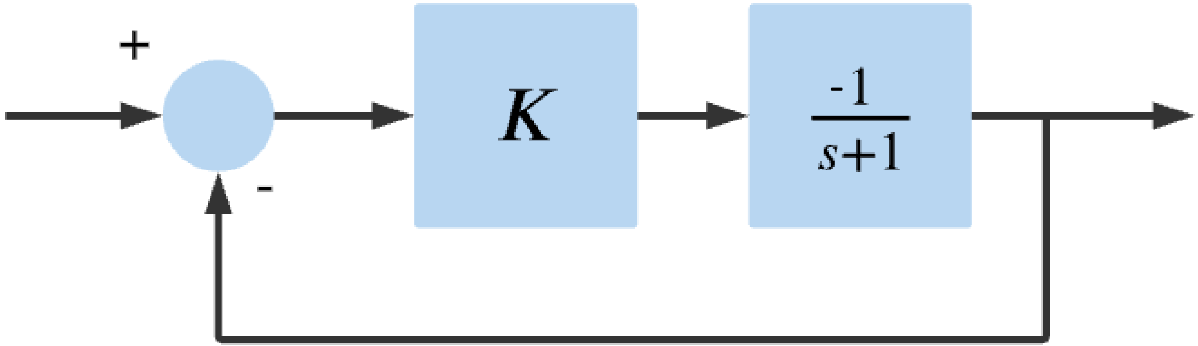
Criterio de estabilidad de Nyquist

- Una conocida fábrica nos contrata para analizar la estabilidad de uno de sus procesos
  - Cuál es el rango de valores de K que garantizan la estabilidad del proceso de la figura?



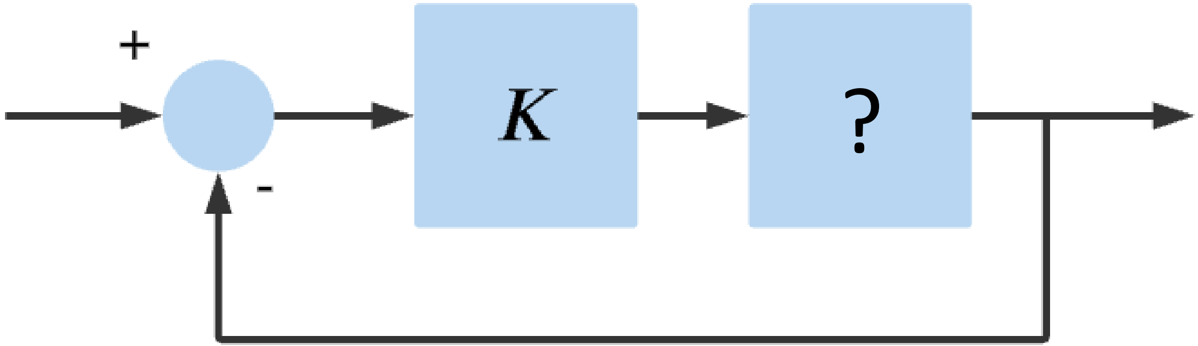
Criterio de estabilidad de Nyquist

- Una conocida fábrica nos contrata para analizar la estabilidad de uno de sus procesos
  - Cuál es el rango de valores de K que garantizan la estabilidad del proceso de la figura?
    - Muy sencillo! Utilizamos LGR para determinar estabilidad



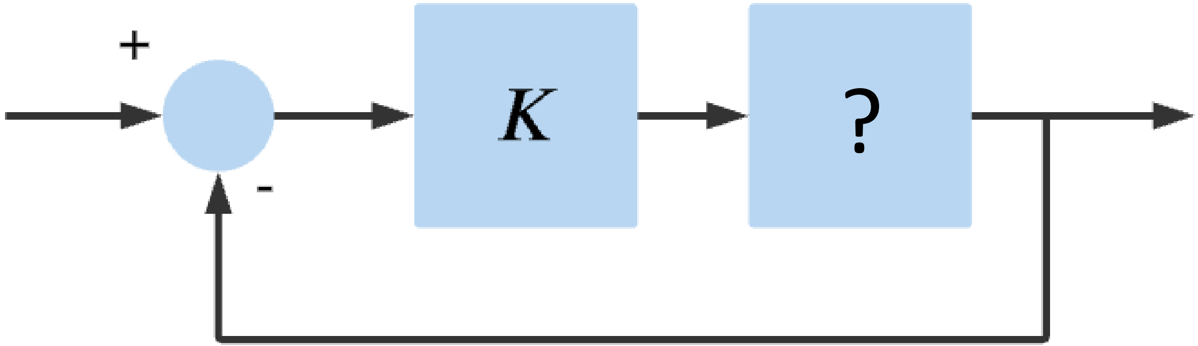
Criterio de estabilidad de Nyquist

- Una conocida fábrica nos contrata para analizar la estabilidad de uno de sus procesos
  - Cuál es el rango de valores de K que garantizan la estabilidad del proceso de la figura?
    - Muy sencillo! Utilizamos LGR para determinar estabilidad
  - Ahora, que pasa si no conocemos $H_{OL}(s)$?
    - La función de transferencia de la enorme mayoría de procesos reales es desconocida
    - Determinar una función de transferencia para un proceso real puede resultar extremadamente costoso!



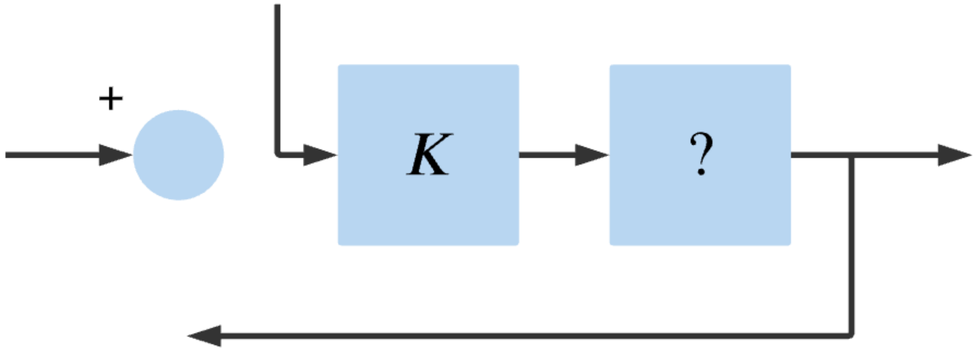
Criterio de estabilidad de Nyquist

- Una conocida fábrica nos contrata para analizar la estabilidad de uno de sus procesos
  - Cuál es el rango de valores de K que garantizan la estabilidad del proceso de la figura?
    - Muy sencillo! Utilizamos LGR para determinar estabilidad
  - Ahora, que pasa si no conocemos $H_{OL}(s)$?
    - La función de transferencia de la enorme mayoría de procesos reales es desconocida
    - Determinar una función de transferencia para un proceso real puede resultar extremadamente costoso!
    - No obstante, los sistemas reales nos permiten experimentar



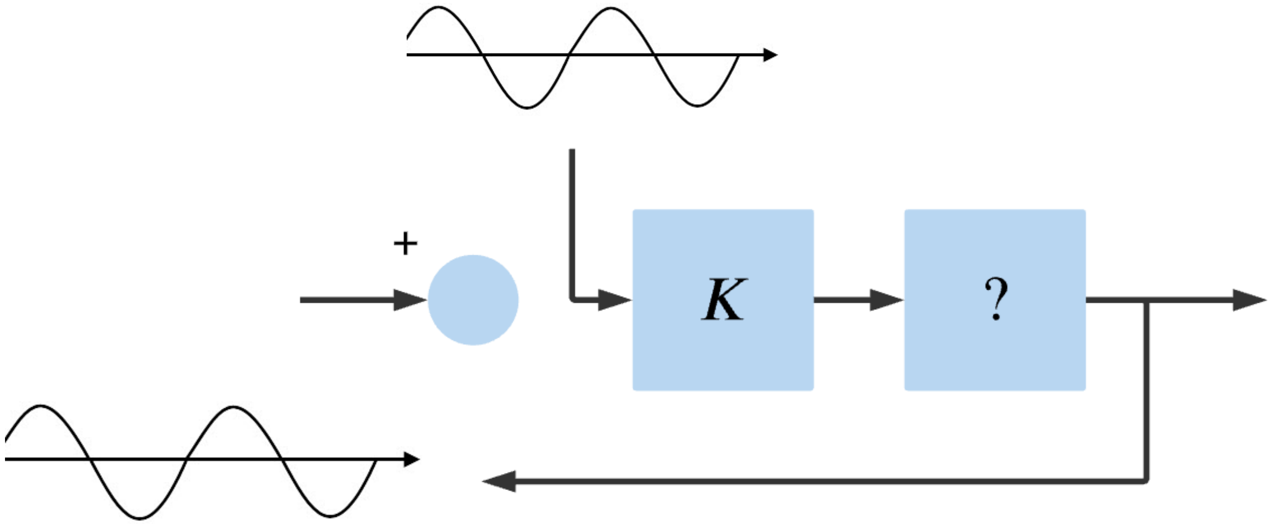
Criterio de estabilidad de Nyquist

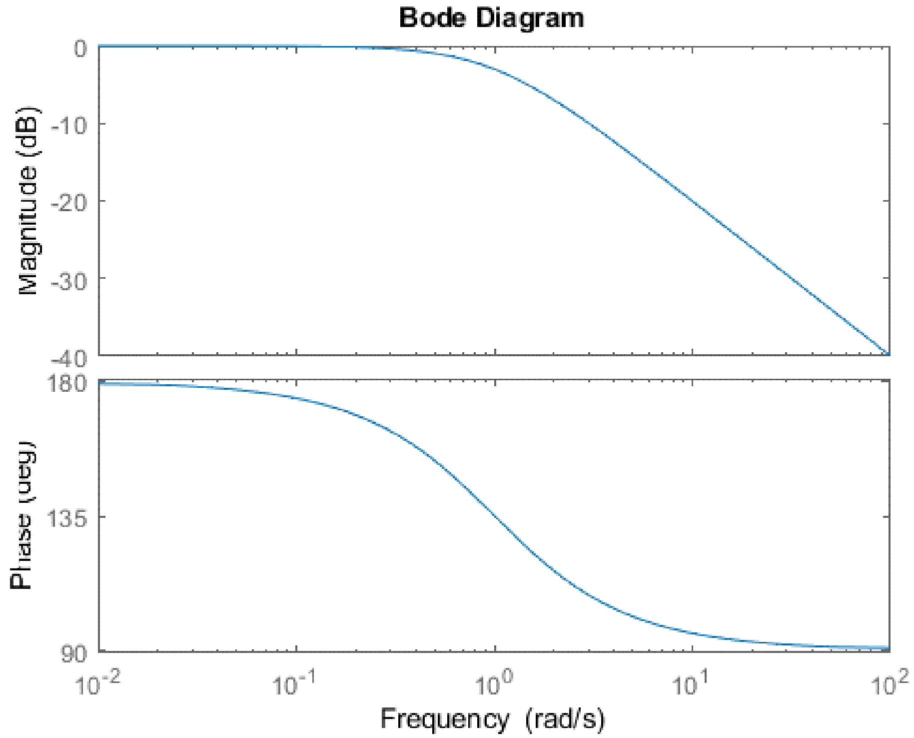
- Mediante inyección de señales, puedo construir un diagrama de Bode



Criterio de estabilidad de Nyquist

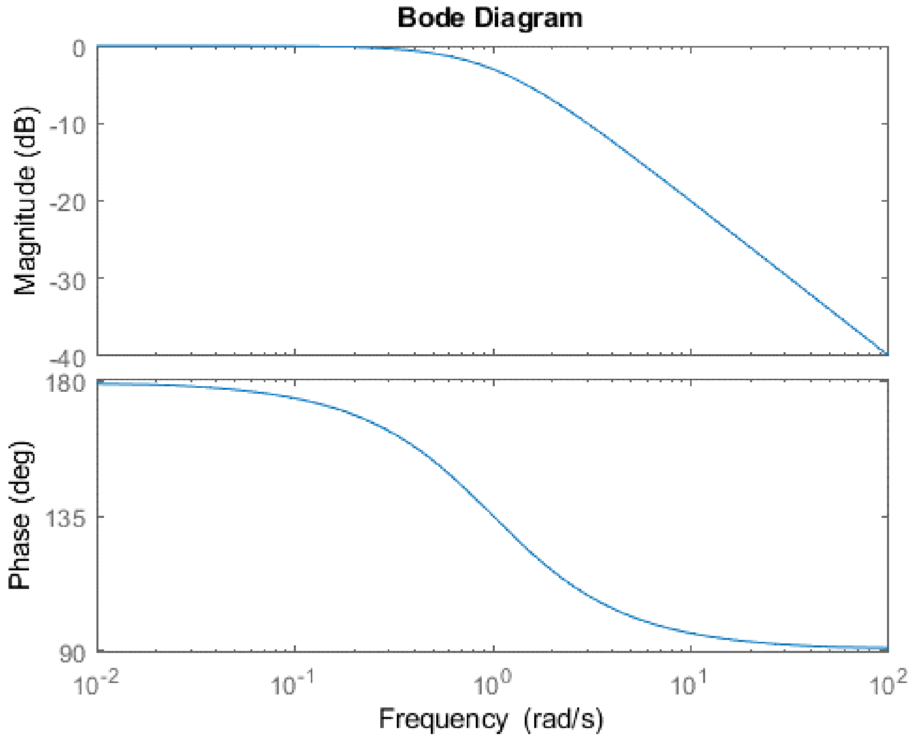
- Mediante inyección de señales, puedo construir un diagrama de Bode

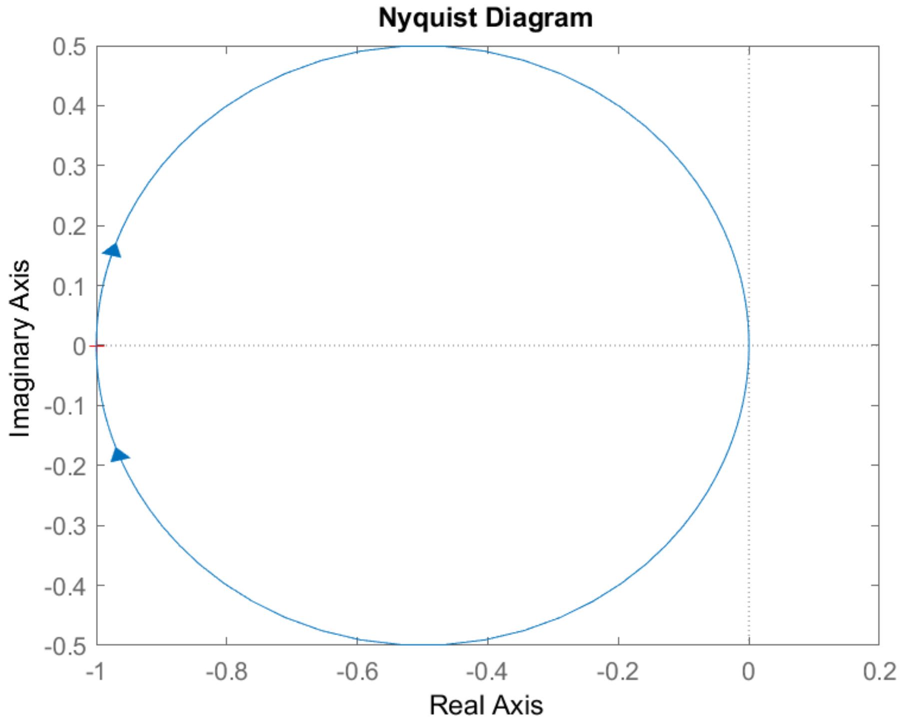




Criterio de estabilidad de Nyquist

- Con el diagrama de Bode, podemos construir el diagrama de Nyquist

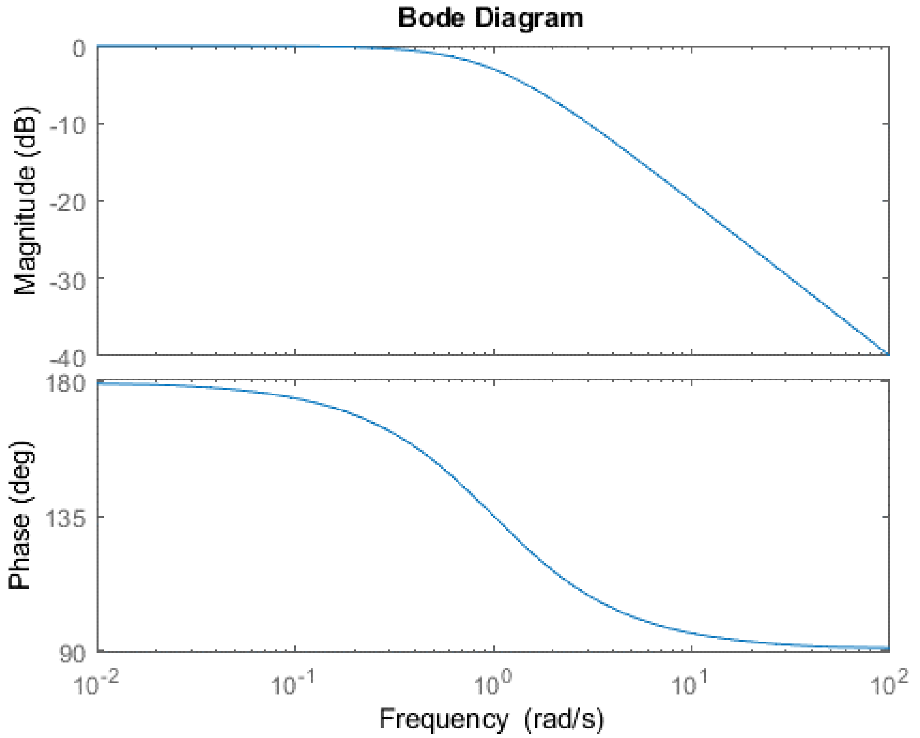


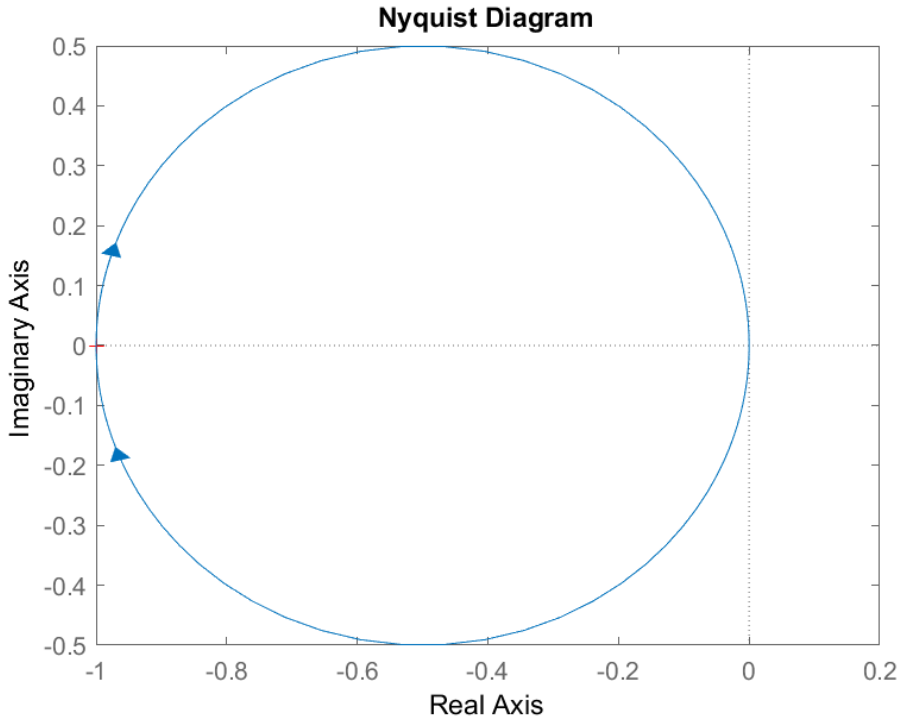


Criterio de estabilidad de Nyquist

```
sys = tf([-1],[1 1]);
figure;
bode(sys);
figure;
nyquist(sys);
```

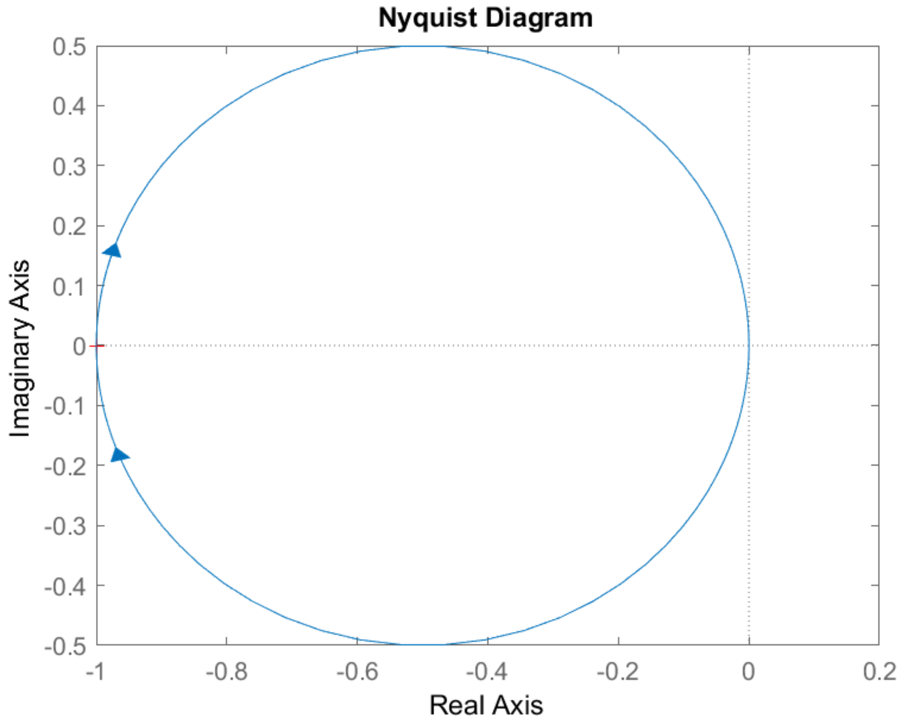
- Con el diagrama de Bode, podemos construir el diagrama de Nyquist





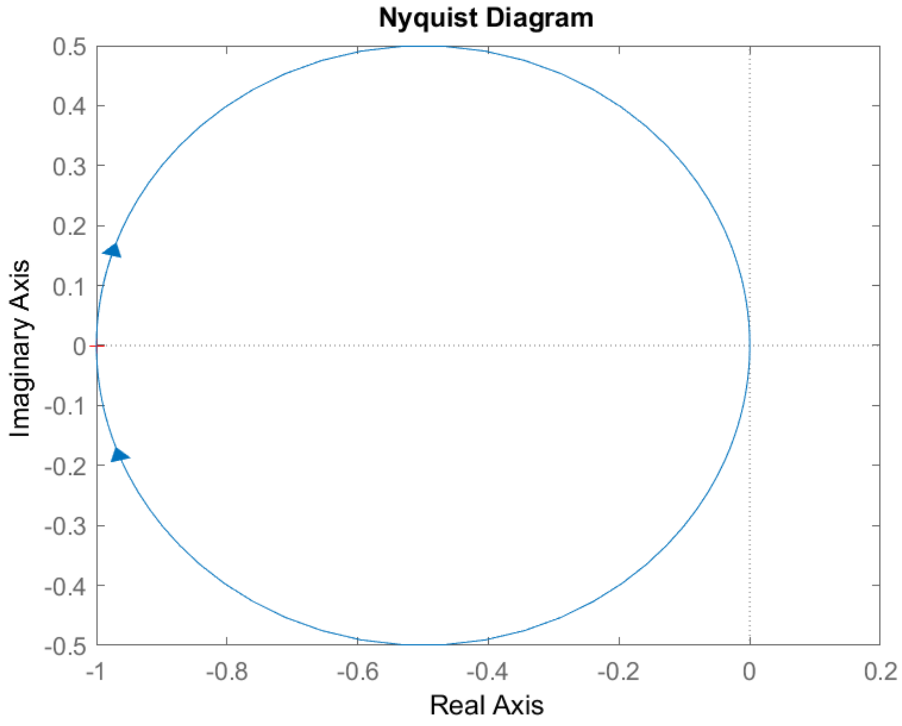
Criterio de estabilidad de Nyquist

- Cómo puedo usar el diagrama de Nyquist para analizar la estabilidad según K?



Criterio de estabilidad de Nyquist

- Cómo puedo usar el diagrama de Nyquist para analizar la estabilidad según K?
  - Tengo dos alternativas:
    - Cambiar K, escalando el trazo de $H(\Gamma)$
    - Contar la cantidad de vueltas que da la curva $H(\Gamma)$ alrededor de $-\frac{1}{K}$



Criterio de estabilidad de Nyquist

- El criterio de estabilidad de Nyquist no es solamente un criterio de estabilidad más
  - Constituye una herramienta imprescindible para el análisis de sistemas reales
  - Permite determinar la estabilidad del sistema de lazo cerrado en base a experimentos realizados sobre el sistema en lazo abierto

Hoja 8. Ejercicio 1

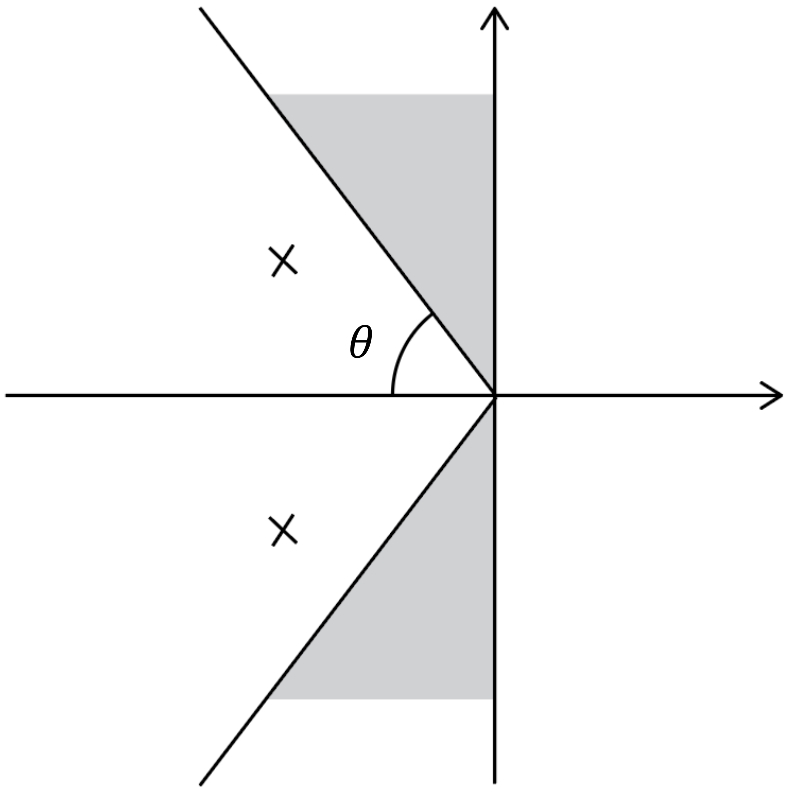
1*) Recordando que el criterio de Nyquist fue obtenido para asegurar que un sistema en lazo cerrado sea estable,

a) Obtenga un criterio similar para determinar si los polos de un sistema tienen relación de amortiguamiento ξ mayor que un valor ξ_0.

b) Obtenga un criterio similar para determinar si los polos del sistema realimentado tienen parte real mayor que - 1.

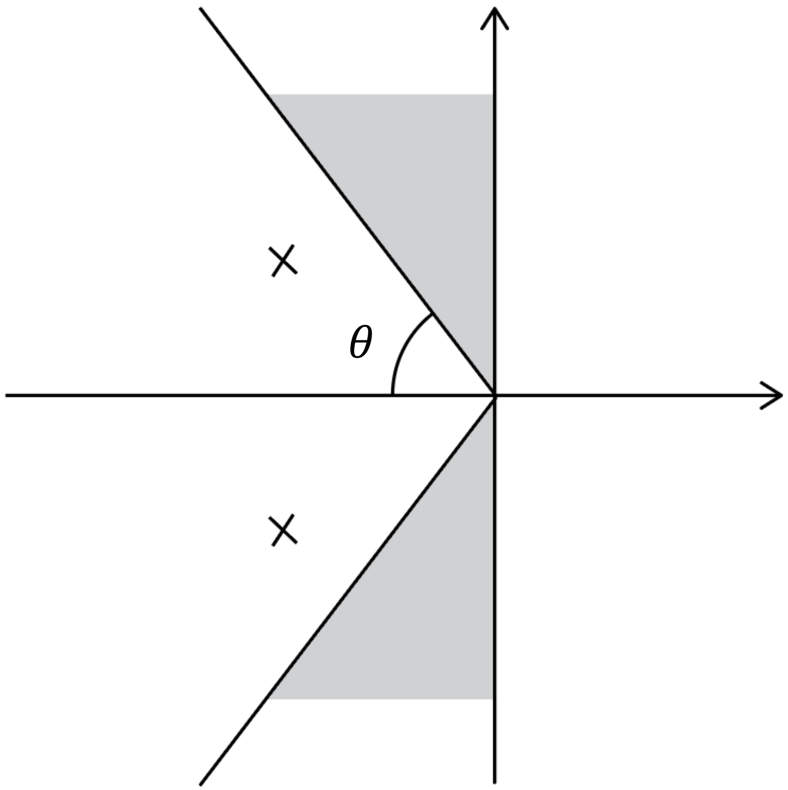
Hoja 8. Ejercicio 1

- La relación de amortiguamiento (ζ) es una medida adimensional que determina que tan oscilatoria es la respuesta a escalón de un sistema.
- La condición para que los polos de un sistema tengan una relación de amortiguamiento mayor que ζ_0 es que se encuentren fuera de la región determinada por $\theta = \cos^{-1}(\zeta_0)$



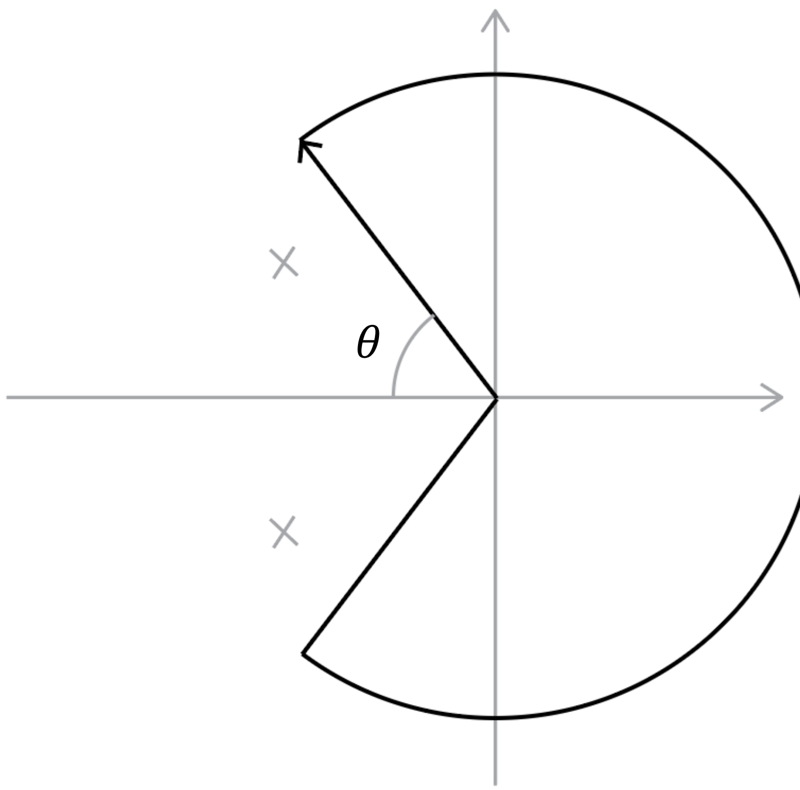
Hoja 8. Ejercicio 1

- La relación de amortiguamiento es una medida adimensional que determina la rapidez con la que desaparecen las perturbaciones de un sistema
- La condición para que los polos de un sistema tengan una relación de amortiguamiento mayor que ζ_0 es que se encuentren fuera de la región determinada por $\theta = \cos^{-1}(\zeta_0)$
- Cómo puedo asegurarme que no hay polos con $\zeta < \zeta_0$?



Hoja 8. Ejercicio 1

- La relación de amortiguamiento es una medida adimensional que determina la rapidez con la que desaparecen las perturbaciones de un sistema
- La condición para que los polos de un sistema tengan una relación de amortiguamiento mayor que ζ_0 es que se encuentren fuera de la región determinada por $\theta = \cos^{-1}(\zeta_0)$
- Cómo puedo asegurarme que no hay polos con $\zeta < \zeta_0$?



Hoja 8. Ejercicio 1

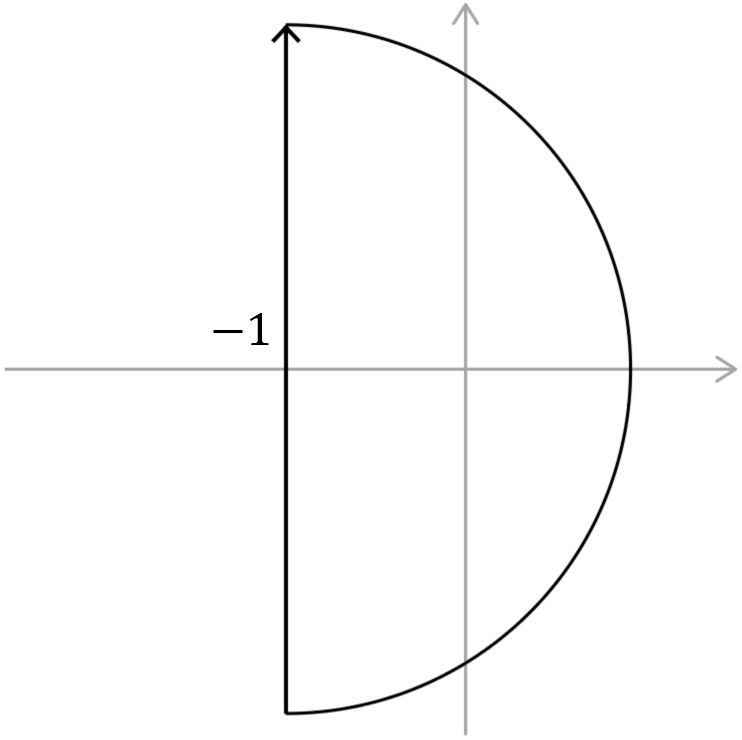
1*) Recordando que el criterio de Nyquist fue obtenido para asegurar que un sistema en lazo cerrado sea estable,

a) Obtenga un criterio similar para determinar si los polos de un sistema tienen relación de amortiguamiento ξ mayor que un valor ξ_0.

b) Obtenga un criterio similar para determinar si los polos del sistema realimentado tienen parte real mayor que - 1.

Hoja 8. Ejercicio 1

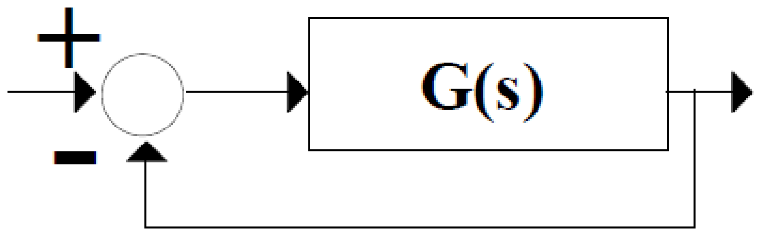
- Análogamente a lo desarrollado para establecer el criterio de estabilidad de Nyquist, mapeamos la curva de la figura



Hoja 8. Ejercicio 2

2) Dado un sistema de control de transferencia:

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)} \qquad K \text{ es cte.} > 0$$



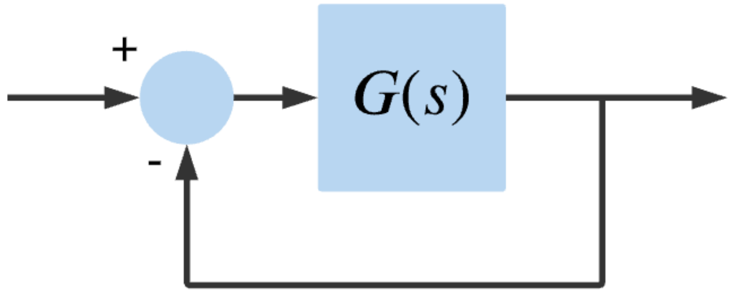
Determinar **K** para que el sistema realimentado sea estable

a) Utilizando Routh Hurwitz.

b) Utilizando Nyquist.

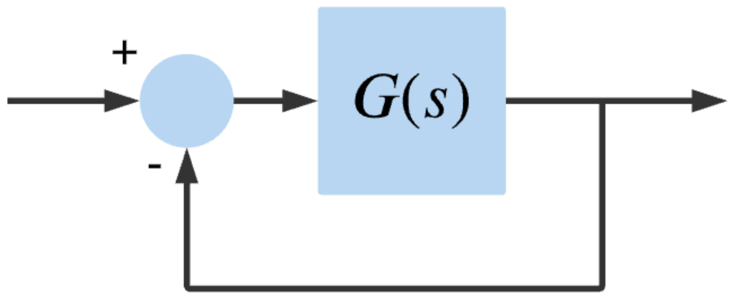
Hoja 8. Ejercicio 2

- $G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$
- Comencemos evaluando la estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante el criterio de R-H



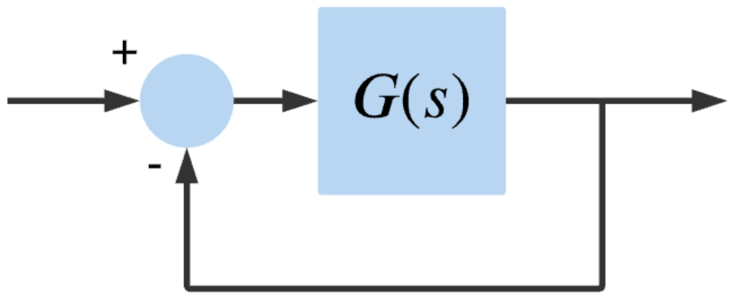
Hoja 8. Ejercicio 2

- $G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$
- Comencemos evaluando la estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante el criterio de R-H
- $G_{CL}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{(s+1)(s+2)+K}$



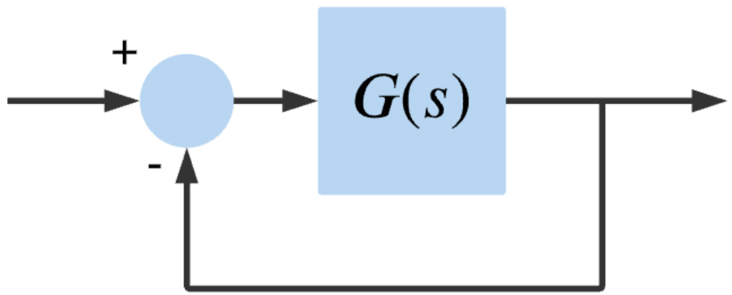
Hoja 8. Ejercicio 2

- $G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$
- Comencemos evaluando la estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante el criterio de R-H
- $G_{CL}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{(s+1)(s+2)+K}$
- $p(s) = (s+1)(s+2) + K = s^2 + 3s + 2 + K$



Hoja 8. Ejercicio 2

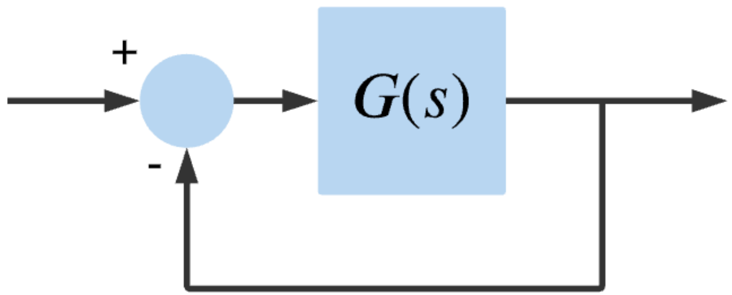
- $G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$
- Comencemos evaluando la estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante el criterio de R-H
- $G_{CL}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{(s+1)(s+2)+K}$
- $p(s) = (s+1)(s+2) + K = s^2 + 3s + 2 + K$



s^2	1	$2+K$
s^1	2	
s^0		

Hoja 8. Ejercicio 2

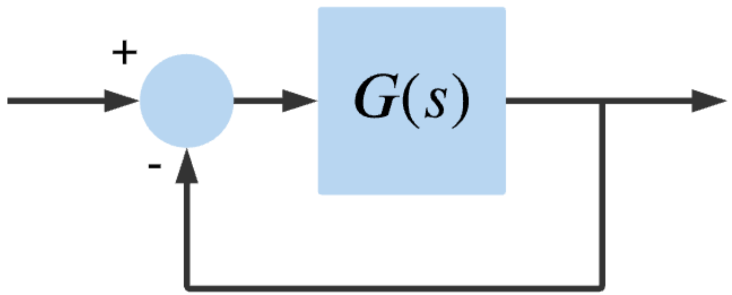
- $G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$
- Comencemos evaluando la estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante el criterio de R-H
- $G_{CL}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{(s+1)(s+2)+K}$
- $p(s) = (s+1)(s+2) + K = s^2 + 3s + 2 + K$



s^2	1	$2+K$
s^1	2	
s^0	$2+K$	

Hoja 8. Ejercicio 2

- $G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$
- Comencemos evaluando la estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante el criterio de R-H
- $G_{CL}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{(s+1)(s+2)+K}$
- $p(s) = (s+1)(s+2) + K = s^2 + 3s + 2 + K$

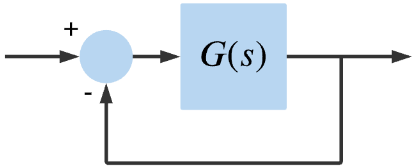


s^2	1	$2 + K$
s^1	2	
s^0	$2 + K$	

El sistema es estable para $K > -2$.
Por hipótesis, $K > 0$

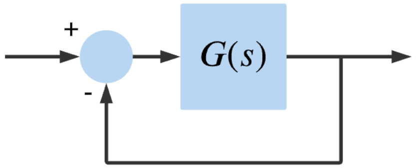
Hoja 8. Ejercicio 2

- $G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$
- Evaluemos la estabilidad del sistema mediante el criterio de Nyquist
- Para trazar el diagrama de Nyquist, debemos trazar un diagrama de Bode



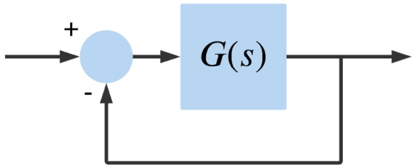
Hoja 8. Ejercicio 2

- $G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$
  - Polos: $\{-1, -2\}$
  - Ceros: $\{\}$



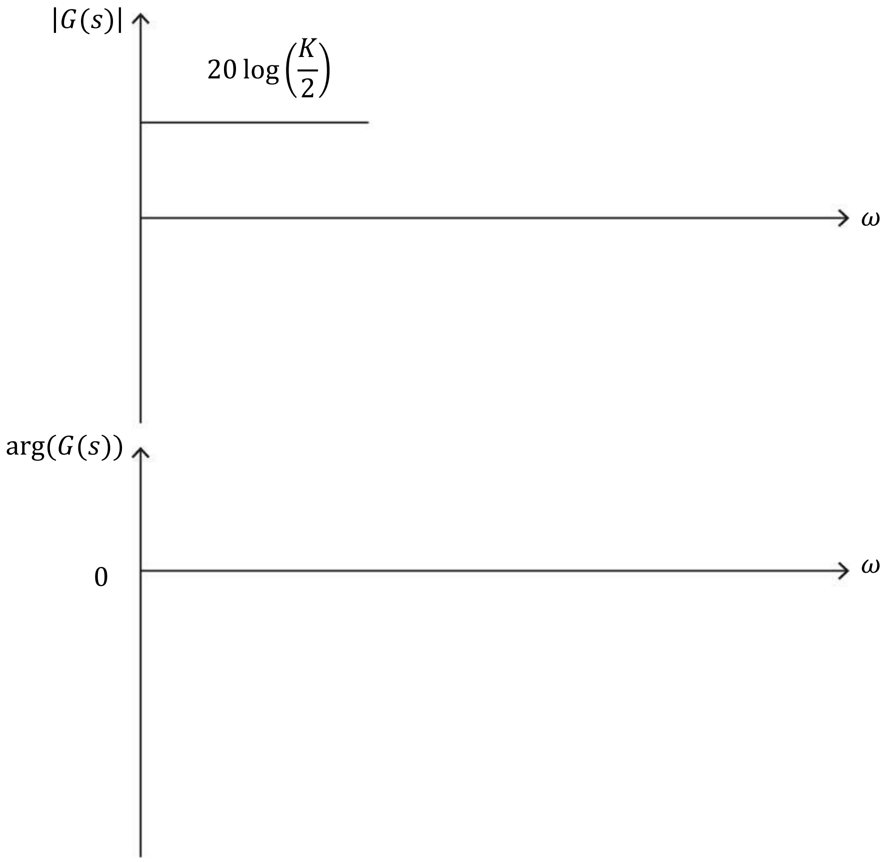
Hoja 8. Ejercicio 2

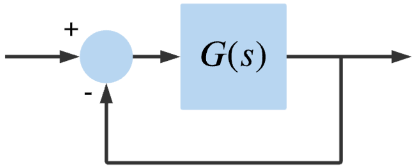
- $G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$
  - Polos: $\{-1, -2\}$
  - Ceros: $\{\}$
- Si $\omega \ll 1$
  - $G(j\omega) \cong \frac{K}{2}$
    - $|G(j\omega)|dB = 20 \log\left(\frac{K}{2}\right)$
    - $\arg\big(G(j\omega)\big)\, dB = 0\, rad$



Hoja 8. Ejercicio 2

- $G(s) = \dfrac{K}{(s+1)(s+2)}$
  - Polos: $\{-1, -2\}$
  - Ceros: $\{\}$
- Si $\omega \ll 1$
  - $G(j\omega) \cong \dfrac{K}{2}$
    - $|G(j\omega)|dB = 20\log\left(\frac{K}{2}\right)$
    - $\arg\big(G(j\omega)\big)\, dB = 0\, rad$

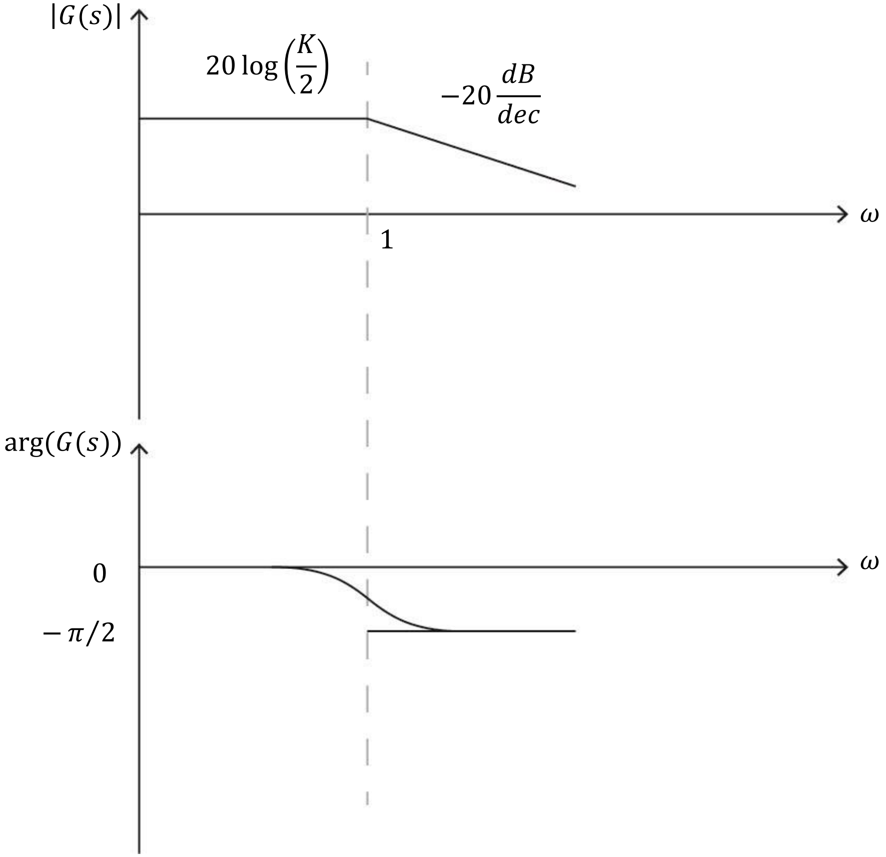


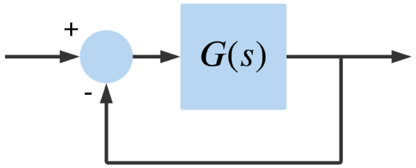


Hoja 8. Ejercicio 2

- $G(s) = \dfrac{K}{(s+1)(s+2)}$
  - Polos: $\{-1, -2\}$
  - Ceros: $\{\}$

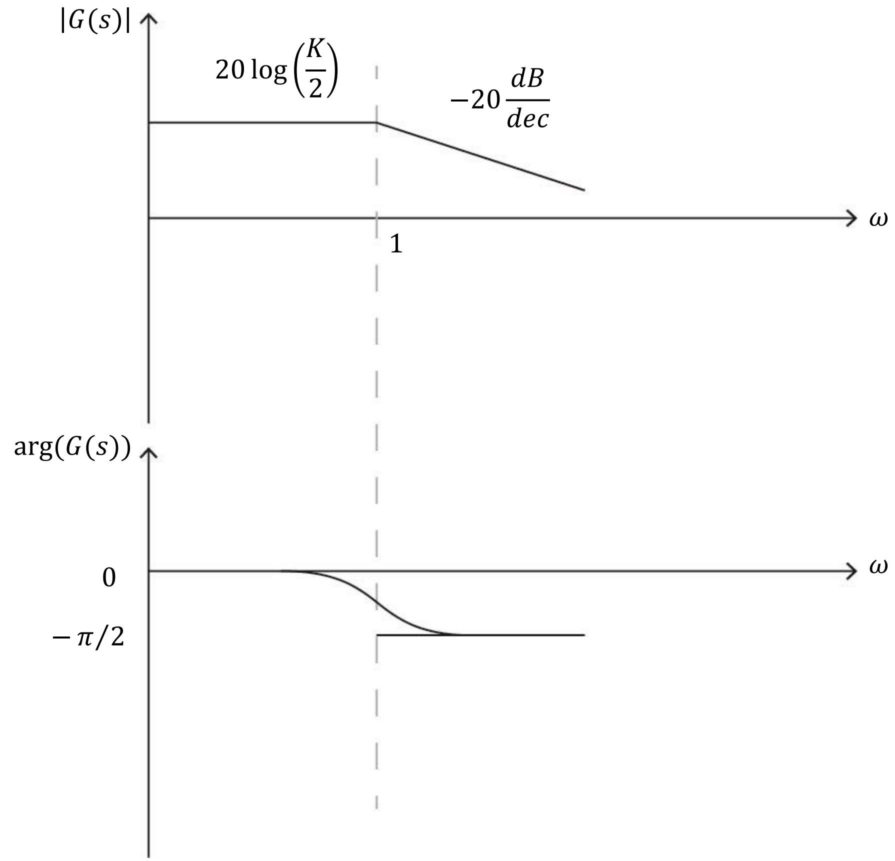
- Si $1 \ll \omega \ll 2$
  - $G(j\omega) \cong \dfrac{K}{(j\omega)(2)}$
    - $|G(j\omega)| dB$ desciende $20 dB/dec$
    - $\arg\big(G(j\omega)\big)\, dB = -\pi/2\ rad$

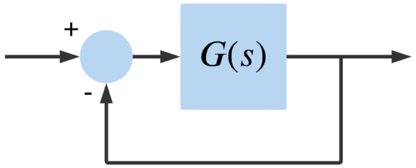




Hoja 8. Ejercicio 2

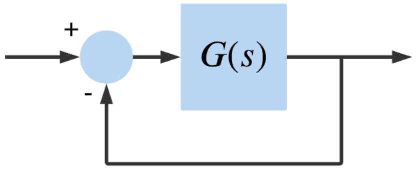
- $G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$
  - Polos: $\{-1, -2\}$
  - Ceros: $\{\}$
- Si $2 \ll \omega$
  - $G(j\omega) \cong \frac{K}{(j\omega)(j\omega)} = -\frac{K}{\omega^2}$
    - $|G(j\omega)|dB$ desciende $40dB/dec$
    - $\arg\big(G(j\omega)\big)\, dB = -\pi\, rad$

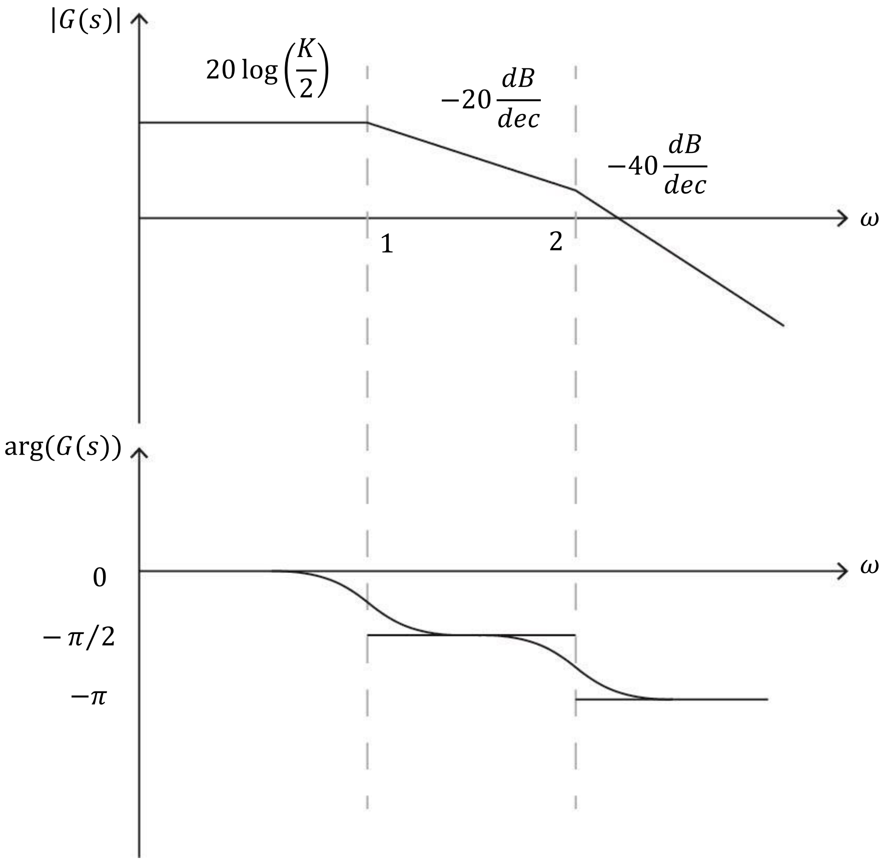




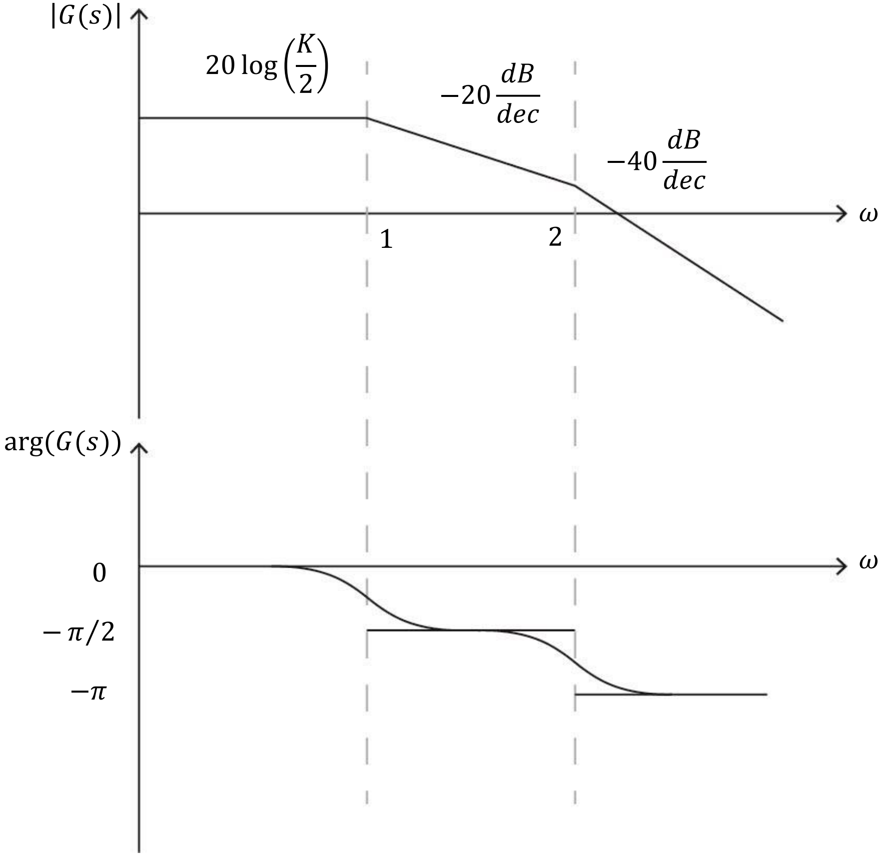
Hoja 8. Ejercicio 2

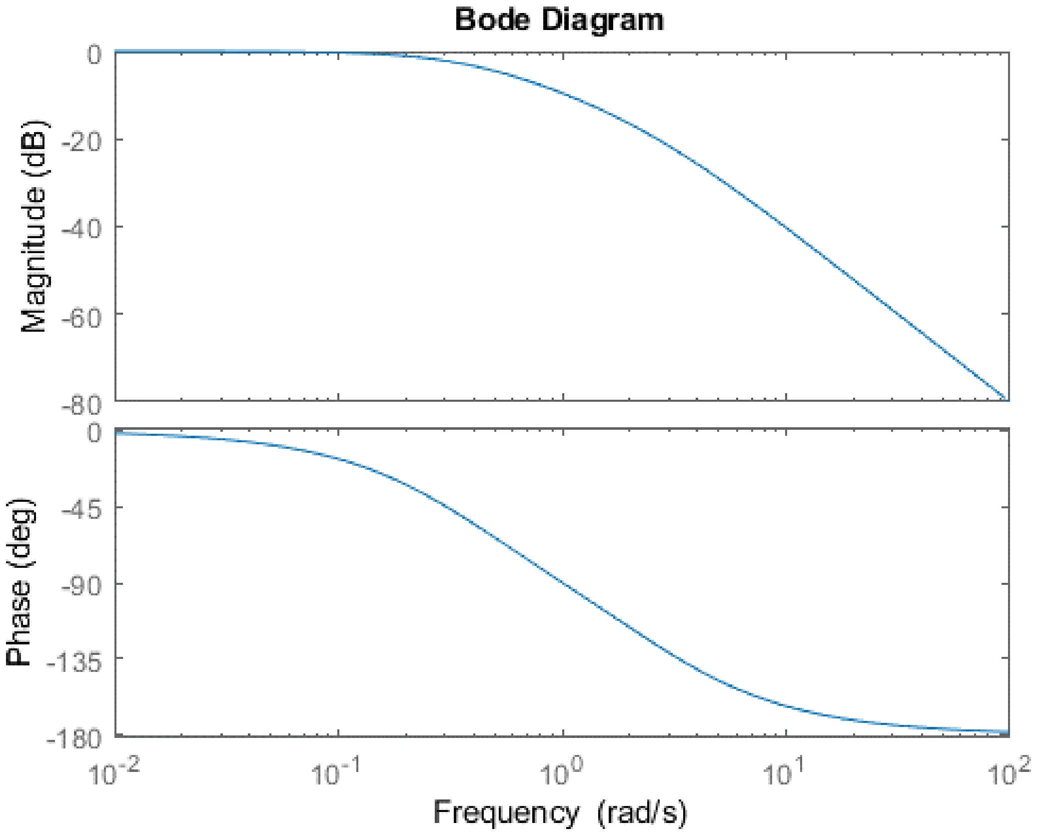
- $G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$
  - Polos: $\{-1, -2\}$
  - Ceros: $\{\}$
- Si $2 \ll \omega$
  - $G(j\omega) \cong \frac{K}{(j\omega)(j\omega)} = -\frac{K}{\omega^2}$
    - $|G(j\omega)|dB$ desciende $40dB/dec$
    - $\arg\big(G(j\omega)\big)\, dB = -\pi\, rad$



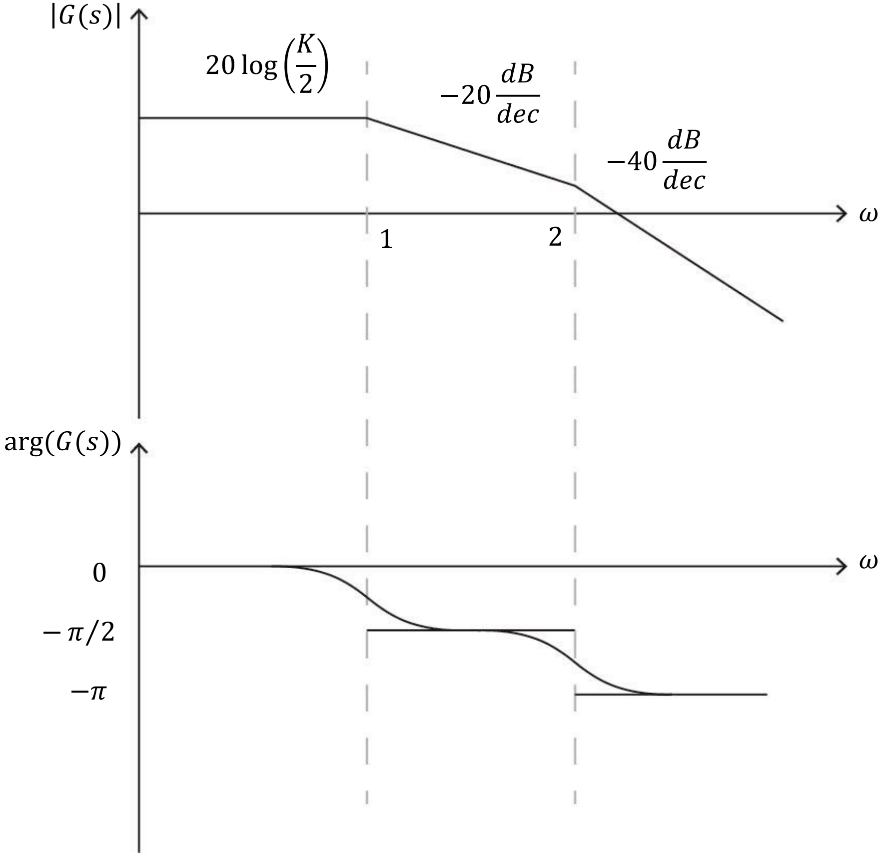


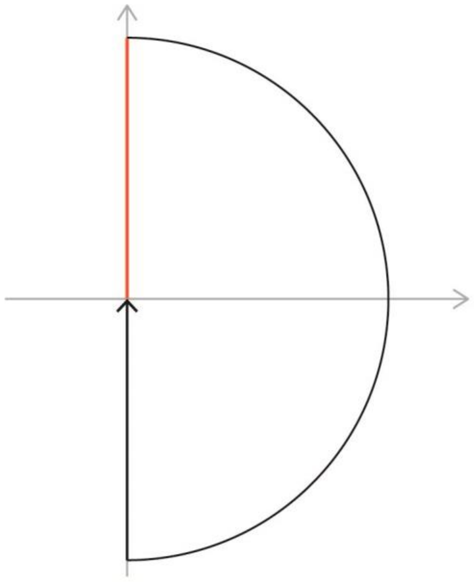
Hoja 8. Ejercicio 2

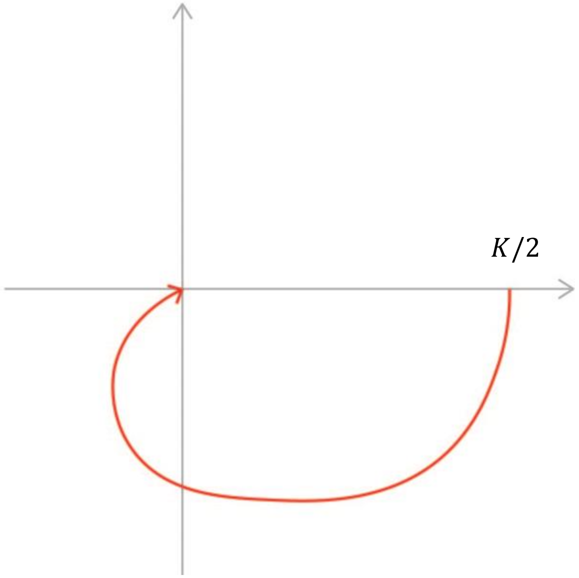




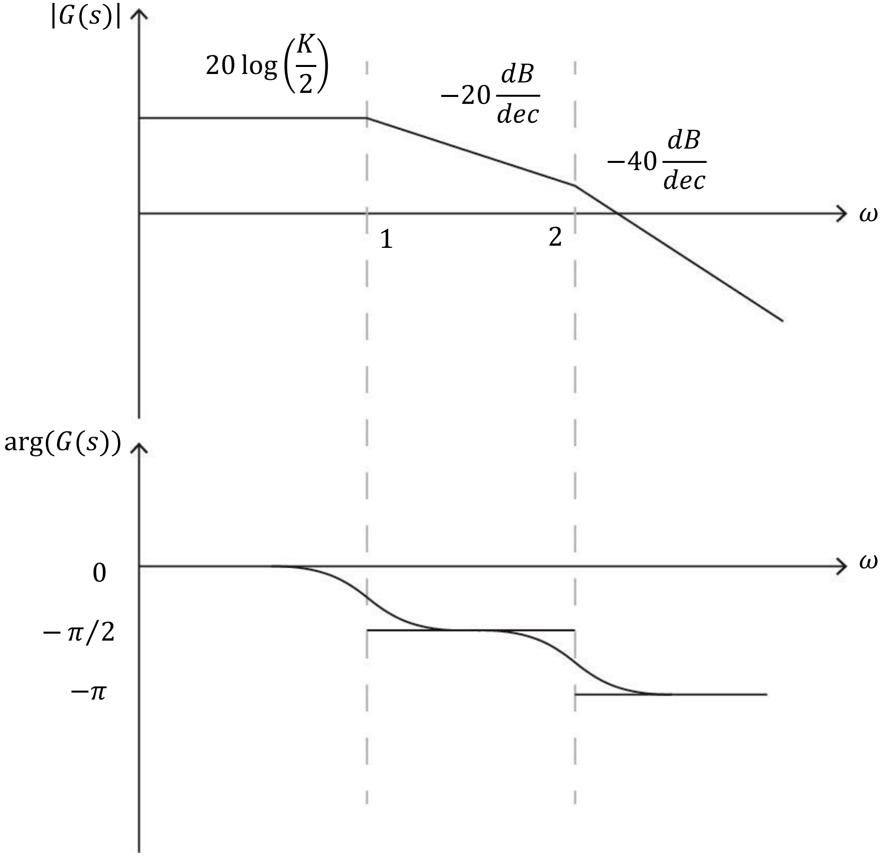
Hoja 8. Ejercicio 2

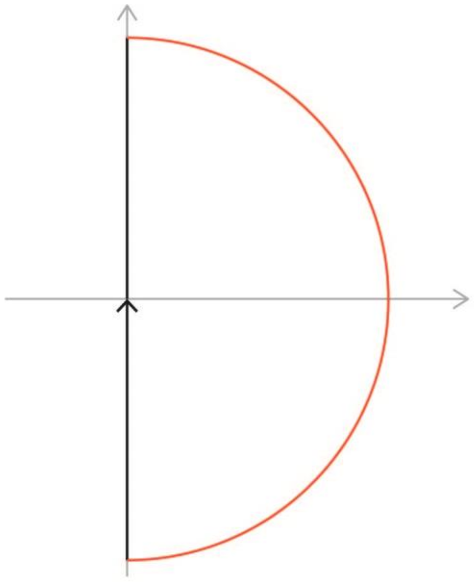


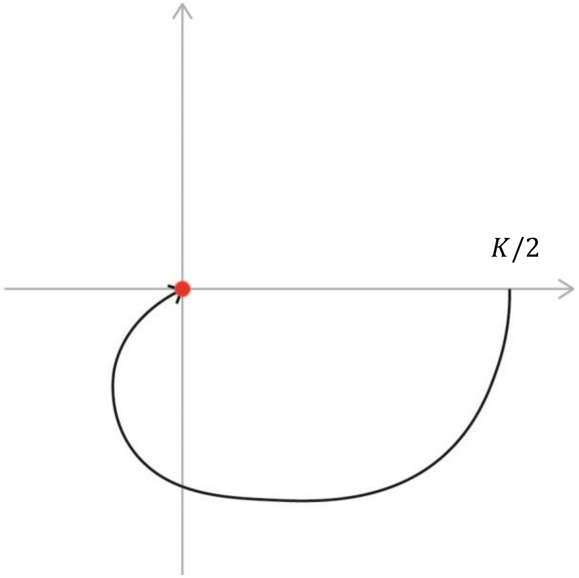




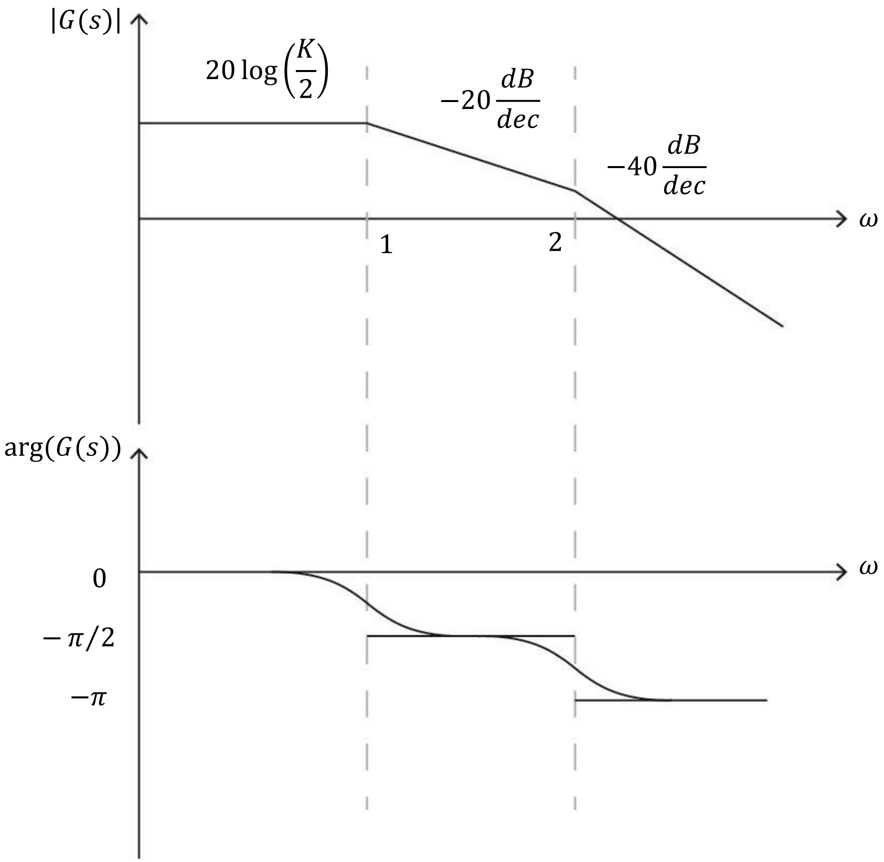
Hoja 8. Ejercicio 2

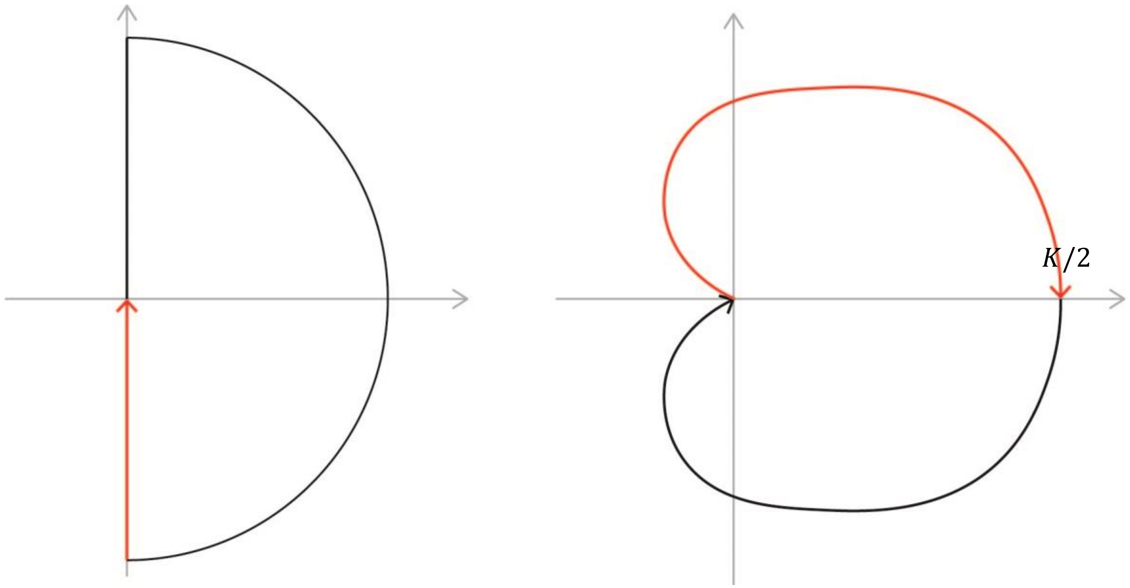




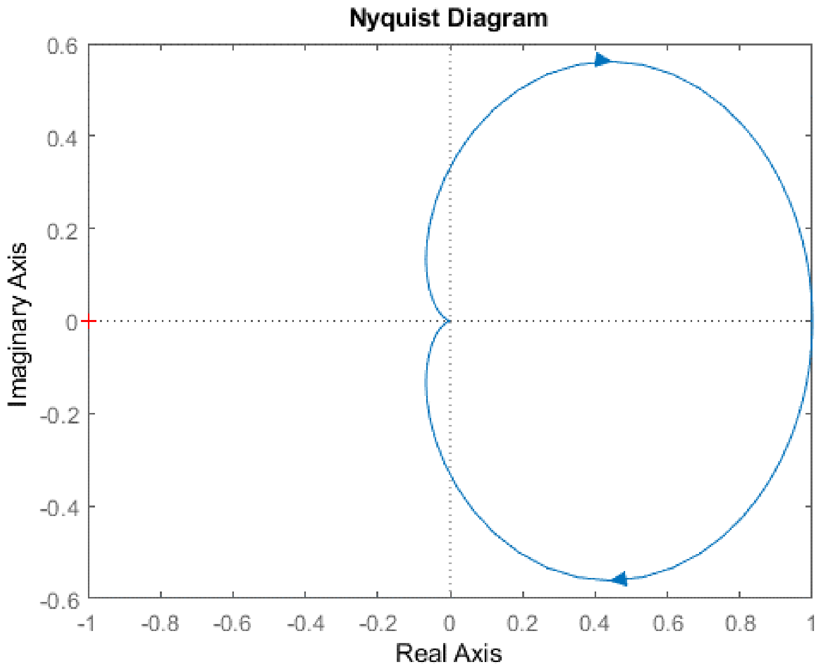


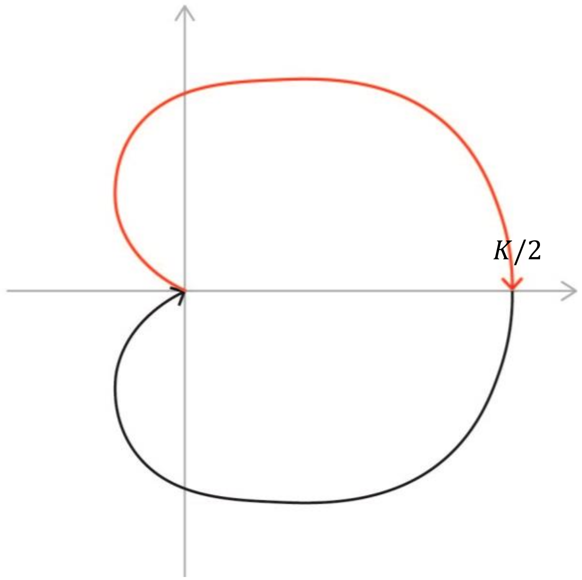
Hoja 8. Ejercicio 2





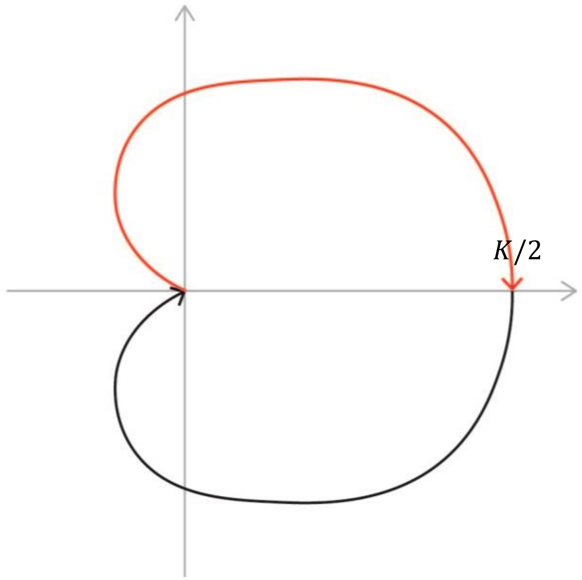
Hoja 8. Ejercicio 2





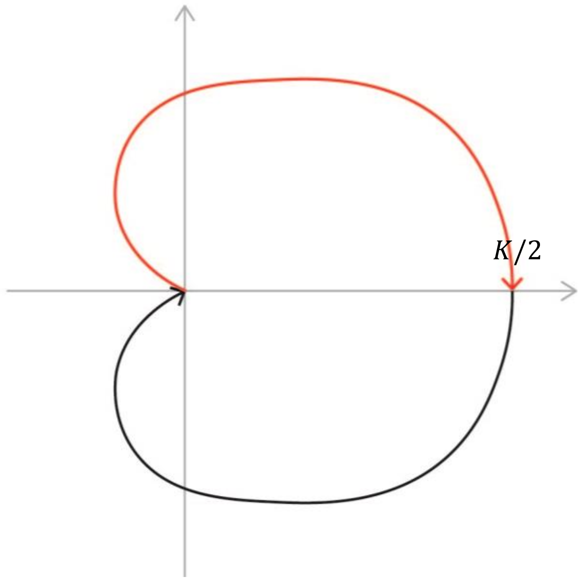
Hoja 8. Ejercicio 2

- Según el criterio de estabilidad de Nyquist
  - $Z = P + N$
    - Z = Número de polos inestables de $G(s)$
    - P = Número de polos inestables de $F(s)$
    - N = Número de rodeos de $\mathrm{F}(\Gamma)$ a -1



Hoja 8. Ejercicio 2

- Según el criterio de estabilidad de Nyquist
  - $Z = P + N$
    - Z = Número de polos inestables de $G(s)$
    - P = Número de polos inestables de $F(s) = 0$
    - N = Número de rodeos de $\mathrm{F}(\Gamma)$ a -1



Hoja 8. Ejercicio 2

- Según el criterio de estabilidad de Nyquist
  - $Z = P + N$
    - Z = Número de polos inestables de $G(s)$
    - P = Número de polos inestables de $F(s) = 0$
    - N = Número de rodeos de $\mathrm{F}(\Gamma)$ a $-1 = 0 \forall K$