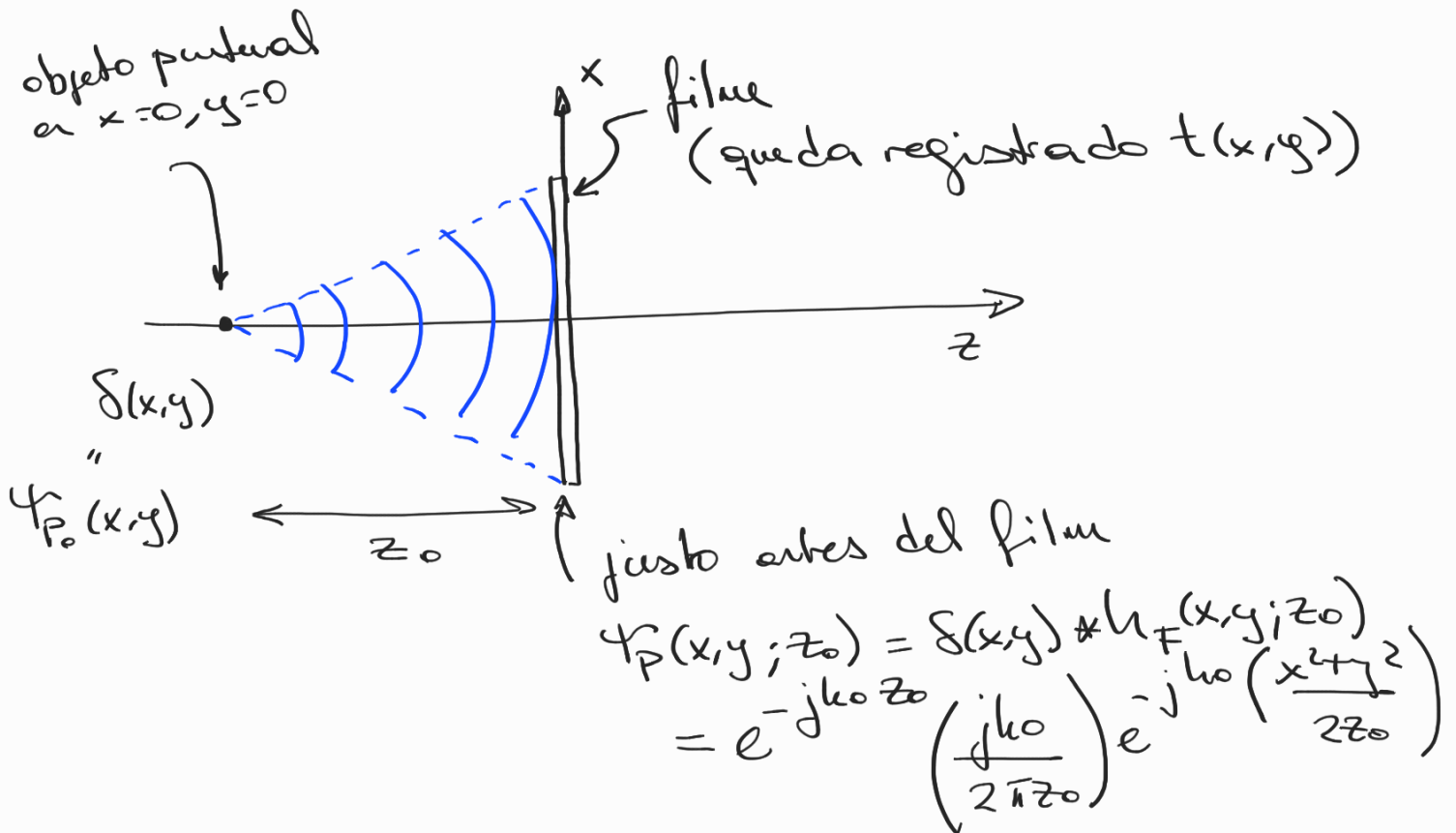


# Principios de Holografía Digital

## Imagen comercial vs. imagen holográfica

### Imagen comercial (fotografía)

Consideremos un objeto puntual (fuente puntual) a distancia  $z_0$  del film (película fotográfica)

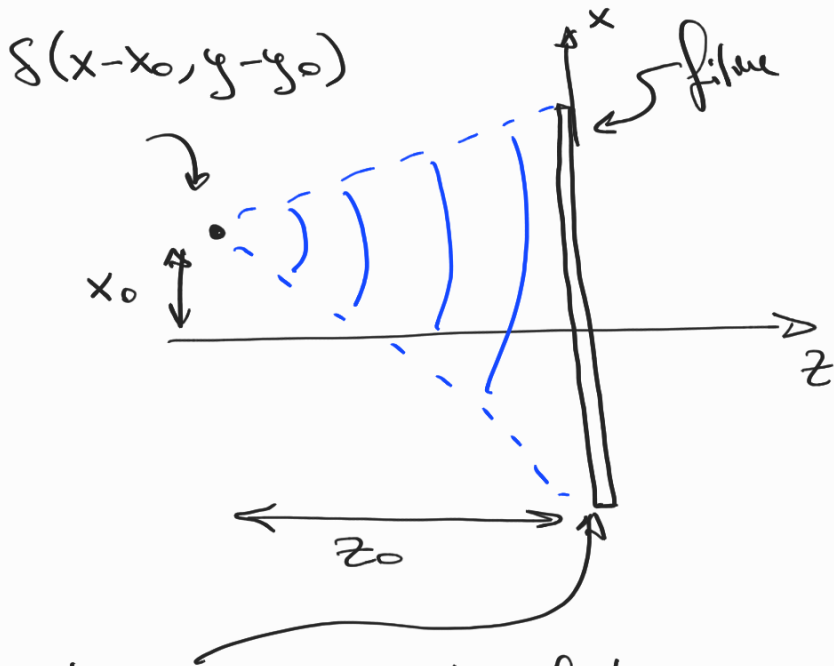


En el film (sensible a variaciones de la intensidad) queda registrado:

$$t(x,y) \propto I(x,y) = |\psi_p(x,y; z_0)|^2 = \left( \frac{k_0}{2\pi z_0} \right)^2$$

donde se perdió la información de fase.

Si la fuente (o el objeto puntual) está en  $(x_0, y_0)$



justo antes del filme:

$$\begin{aligned} \Psi_P(x, y; x_0, y_0; z_0) &= \delta(x-x_0, y-y_0) * h_F(x, y; z_0) \\ &= e^{-jk_0 z_0} \left( \frac{jk_0}{2\pi z_0} \right) e^{-jk_0 \frac{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]}{2z_0}} \end{aligned}$$

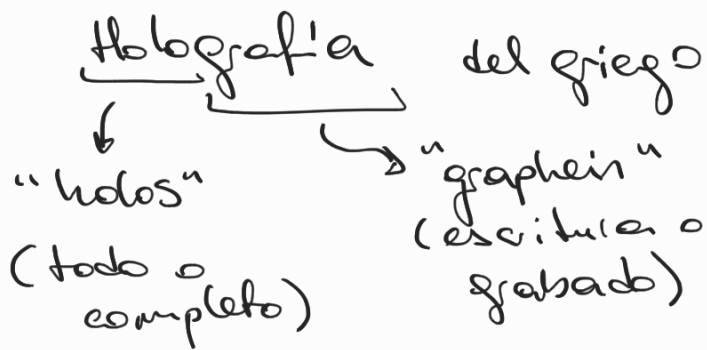
En el filme queda registrado:

$$t(x, y) \propto I(x, y) = |\Psi_P(x, y; x_0, y_0; z_0)|^2 = \left( \frac{k_0}{2\pi z_0} \right)^2$$

idéntico resultado que el caso anterior,

Se perdió la información de la fase y también la ubicación de la fuente puntual  $(x_0, y_0)$

# Imagen holográfica



Permite registrar la información de amplitud y de fase

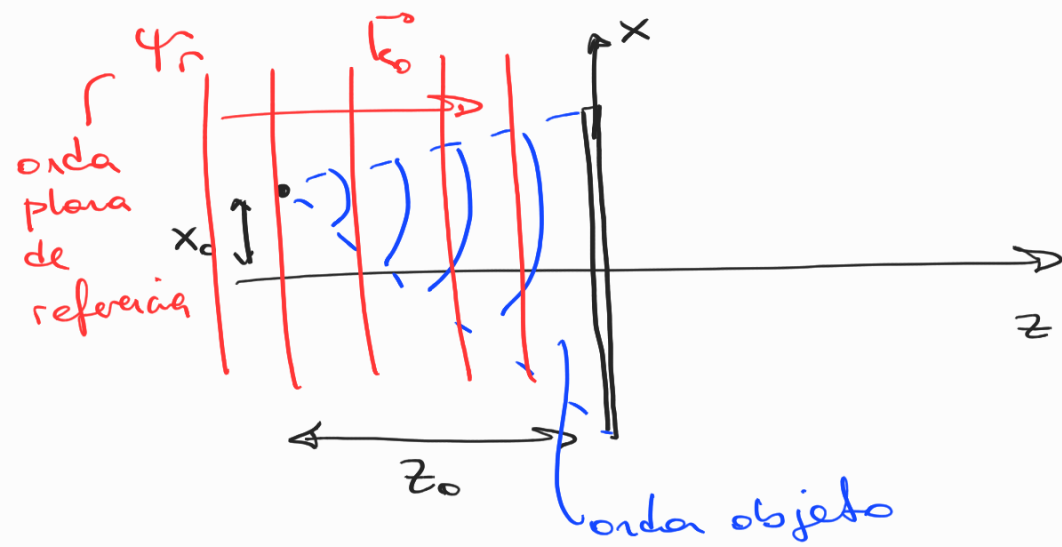
- grabado del holograma
- reproducción del holograma

## Holografía on-axis (1948 Gabor)

≡ Grabado o codificación del holograma on-axis de un objeto puntual

Si comprendemos el grabado de un holograma para un objeto puntual, el grabado de un objeto complicado se puede pensar como el grabado de una colección de objetos puntuales.

Consideremos el grabado de un objeto puntual (fuera del eje) a una distancia  $z_0$  de la pantalla (film).



De acuerdo a la difracción de Fresnel:

$$\psi_0(x, y; z_0) = \delta(x-x_0, y-y_0) * h_F(x, y; z_0)$$

onda objeto justo antes del film =  $e^{-jk_0 z_0} \left( \frac{j k_0}{2\pi z_0} \right) e^{-jk_0 \frac{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]}{2z_0}}$

(onda esférica en aprox. paraxial)

Por otro lado, una onda plana se usa como onda de referencia (con  $\vec{k}_0 = k_0 \hat{z}$ ),  $\psi_r$ .

Asumimos que la onda plana tiene la misma fase inicial que el objeto puntual a la dist.  $z_0$  de la pantalla:

$$\psi_r(x, y; z_0) = a * h_F(x, y; z_0) = a e^{-jk_0 z_0}$$

onda de referencia justo antes del film

En el film queda registrado el patrón de interferencia de  $\psi_r + \psi_0$  en la forma  $|\psi_r + \psi_0|^2$



(Para que exista interferencia las ondas deben ser coherentes sobre la pantalla)

Entonces, el holograma on-axis resulta:

$$t(x,y) \propto |\psi_r + \psi_o|^2 = |\psi_r|^2 + |\psi_o|^2 + \psi_r^* \psi_o + \psi_r \psi_o^*$$

$$\Rightarrow \boxed{t(x,y) \propto \left| a + \frac{j k_0}{2\pi z_0} e^{\left\{ -j k_0 \frac{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]}{2z_0} \right\}} \right|^2}$$

$$= A + B \operatorname{sen} \left\{ \frac{k_0}{2z_0} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2] \right\}$$

$$= \text{FZP}(x-x_0, y-y_0; z_0)$$

Fresnel Zone Plate

holograma del objeto puntual

donde  $A = a^2 + \left( \frac{k_0}{2\pi z_0} \right)^2$

$B = \frac{k_0}{\pi z_0}$  siendo  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$

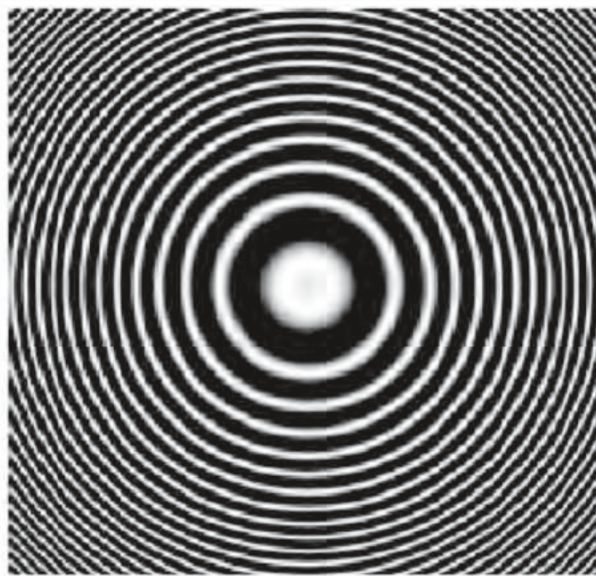


Hologram due to an off-axis source:  
 $\delta(x - x_0, y - y_0)$

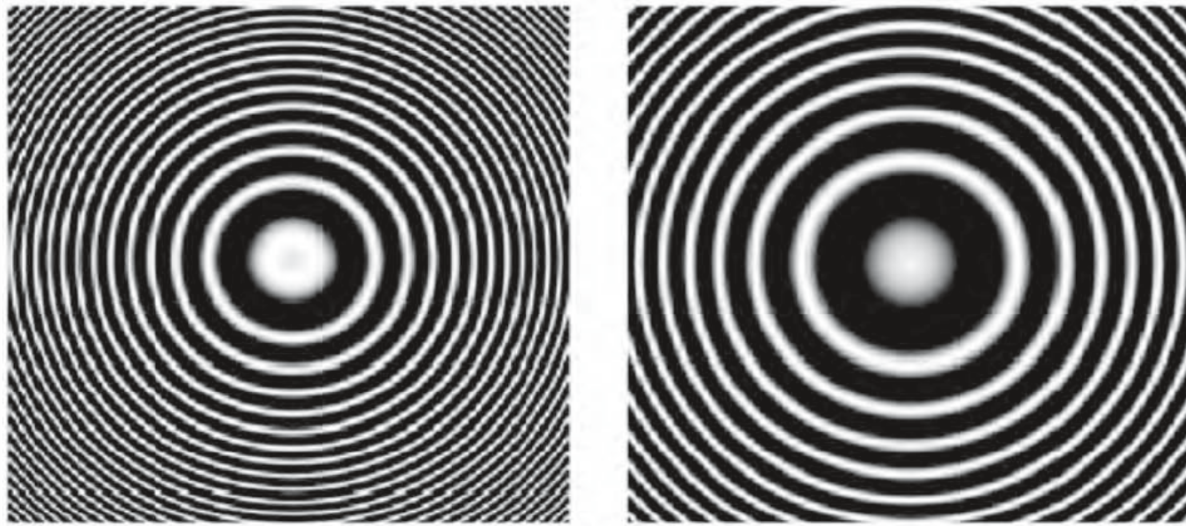
Obs: el centro del FZP especifica la localización de  $(x_0, y_0)$  del objeto puntual y la variación espacial del patrón de interferencia es gobernada por una función seno.

Para el caso en que el objeto puntual está sobre el eje  $z$  ( $x_0 = 0, y_0 = 0$ ), a distancia  $z_0$  de la pantalla resulta:

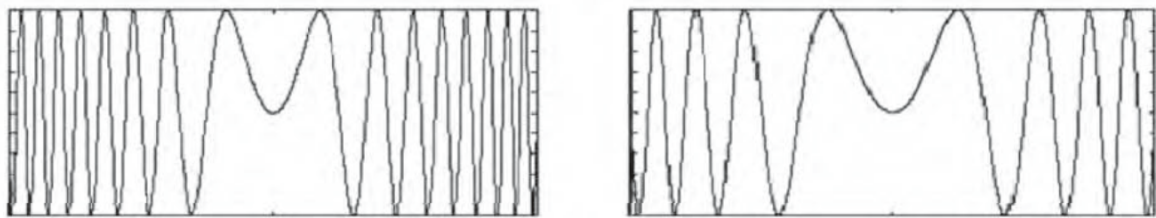
$$\text{FZP}(x, y; z_0) = A + B \sin \left\{ \frac{k_0}{2\pi z_0} (x^2 + y^2) \right\}$$



Hologram due to  
an on-axis source:  
 $\delta(x, y)$



@  $z = z_0$  Fresnel Zone Plates @  $z = 2z_0$



1-D plots of Fresnel zone plate through center

Fig. 2.19 On-axis Fresnel zone plate as a function of depth,  $z$ .

la información de profundidad está codificada en la fase del FZP.

Si alejamos el objeto puntual de la pantalla (comparar  $z=z_0$  y  $z=2z_0$ ) disminuye la frec. local del FZP

≅ frec. local de franjas para una longitud de onda dada:

$$2\pi f_{\text{local}} = \frac{d}{dx} \left( \frac{k_0 x^2}{2z_0} \right) = \frac{2\pi}{2\lambda_0} \frac{2x}{z_0} = 2\pi \frac{x}{\lambda_0 z_0}$$



$$\Rightarrow f_{\text{focal}} = \frac{x}{\lambda_0 z_0}$$

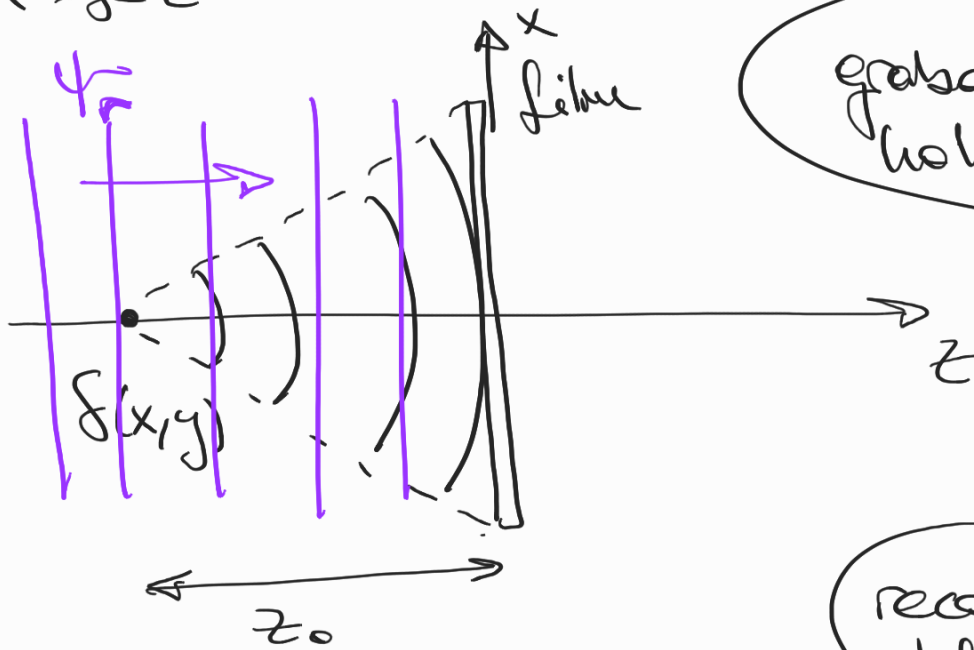
Resumen: el holograma contiene información completa de la escena 3D: el centro del FZP define la posición transversal del objeto puntual  $(x_0, y_0)$  y la variación de franjas define la posición en profundidad.

Proceso de decodificación o reconstrucción de la onda objeto (holograma on-axis)

Para reconstruir el objeto puntual debemos decodificar el holograma.

Esto se puede hacer iluminando el holograma con una onda de reconstrucción que en la práctica suele ser idéntica a la onda de referencia.

Consideremos el objeto puntual sobre el eje  $z$



grabado del holograma

reconstrucción del holograma

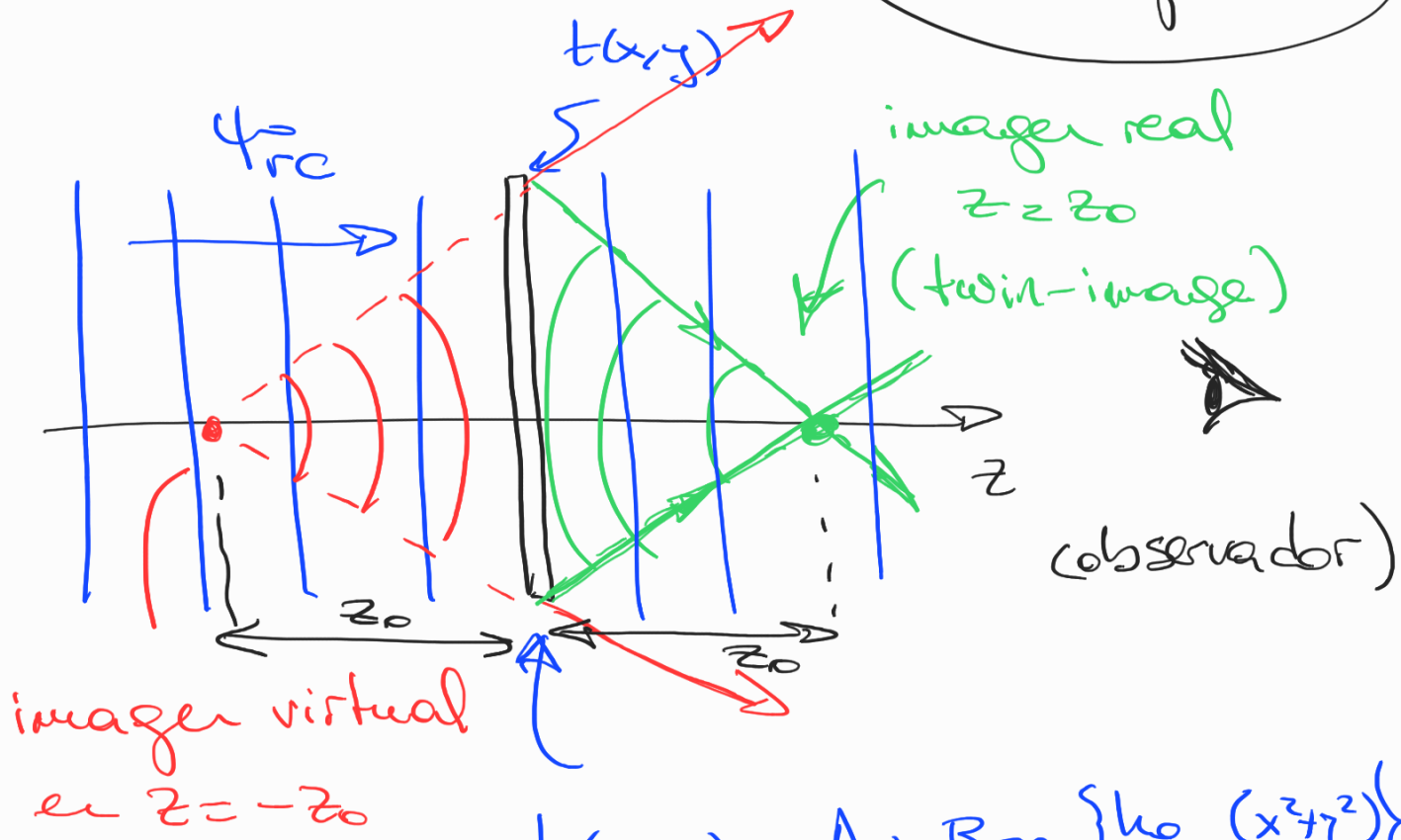


imagen virtual en  $z = -z_0$

imagen real  $z = z_0$  (twin-image)

observador

$$t(x, y) = A + B \exp\left\{ \frac{i k_0}{2 z_0} (x^2 + y^2) \right\}$$

Inmediatamente después del holograma:

$$t_{\text{ret}}(x, y) = at(x, y)$$

y a una distancia  $z$  posterior:

$$at(x, y) * h_F(x, y; z)$$

Ahora,

$$t(x, y) = A + B \operatorname{sen} \left\{ \frac{k_0}{2z_0} (x^2 + y^2) \right\}$$

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j}$$

$$\Rightarrow t(x, y) = A + \frac{B}{2j} \left\{ e^{j \frac{k_0}{2z_0} (x^2 + y^2)} - e^{-j \frac{k_0}{2z_0} (x^2 + y^2)} \right\}$$

Por lo que el resultado de

$$at(x, y) * h_F(x, y; z)$$

podemos interpretarlo como tres ondas:

≅ término de orden cero

$$e^{iA} * h_F(x, y; z) = aA$$

≅ término correspondiente a una imagen real o imagen gemela (twin-image)

$$\sim e^{j \frac{k_0}{2z_0} (x^2 + y^2)} * h_F(x, y; z = z_0) \sim f(x, y) \quad \text{a } z = z_0$$

(a la dcha del holograma)

≅ término correspondiente a una imagen virtual

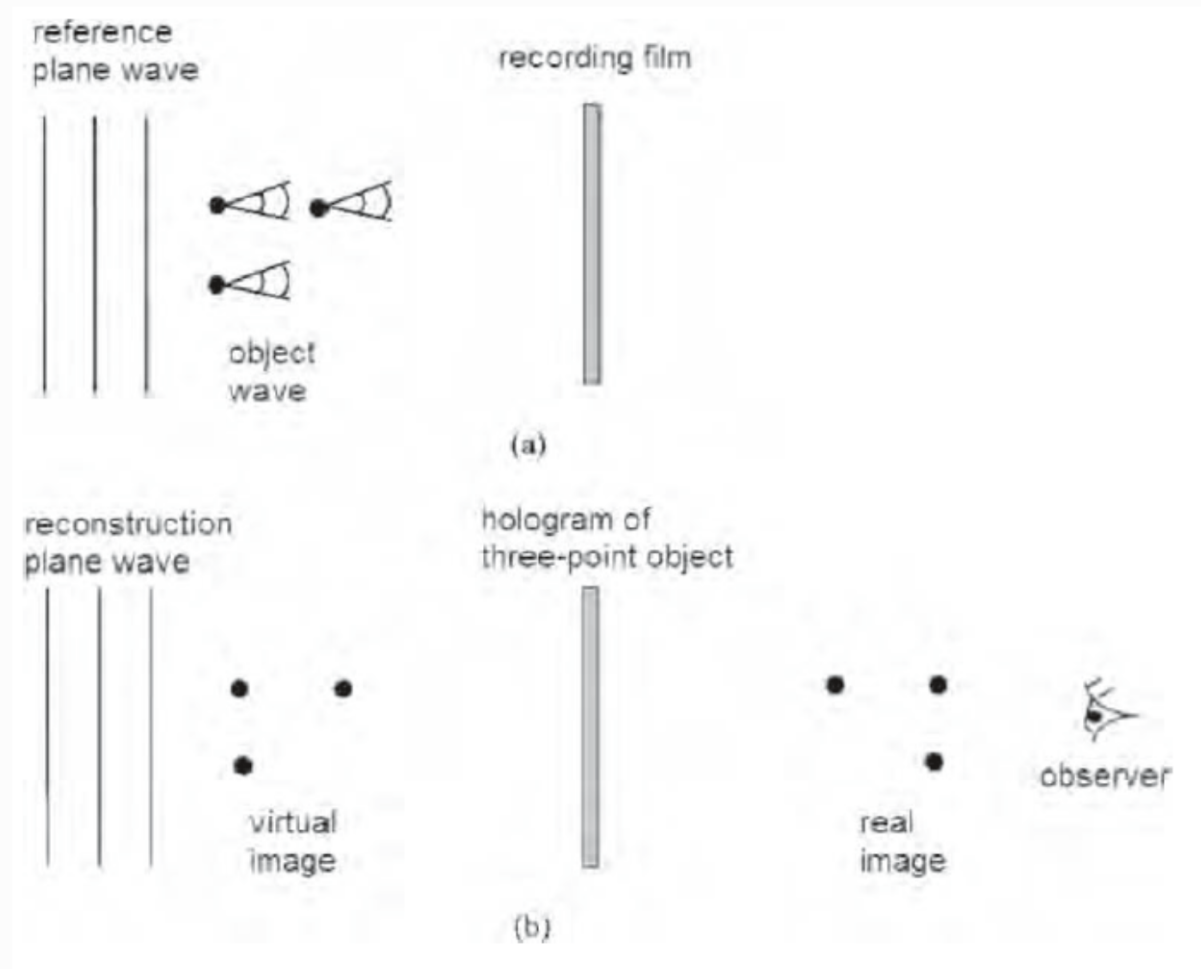
$$\sim e^{-j \frac{k_0}{2z_0} (x^2 + y^2)} * h_F(x, y; z = -z_0) \sim f(x, y) \quad \text{a } z = -z_0$$

(a la izq. del holograma)

aquí hay una propagación hacia atrás del holograma a una distancia  $z_0$  (la imagen virtual se corresponde con una onda divergente detrás del holograma)



ds: codificación y decodificación  
de 3 objetos puntuales



Una imagen virtual ortoscópica aparece a la ubicación 3D correspondiente al objeto original (3 fuentes puntuales), mientras que la imagen real (o genuina) es pseudocópica y resulta especular del objeto original, con el plano de

reflexión en el plano del holograma.

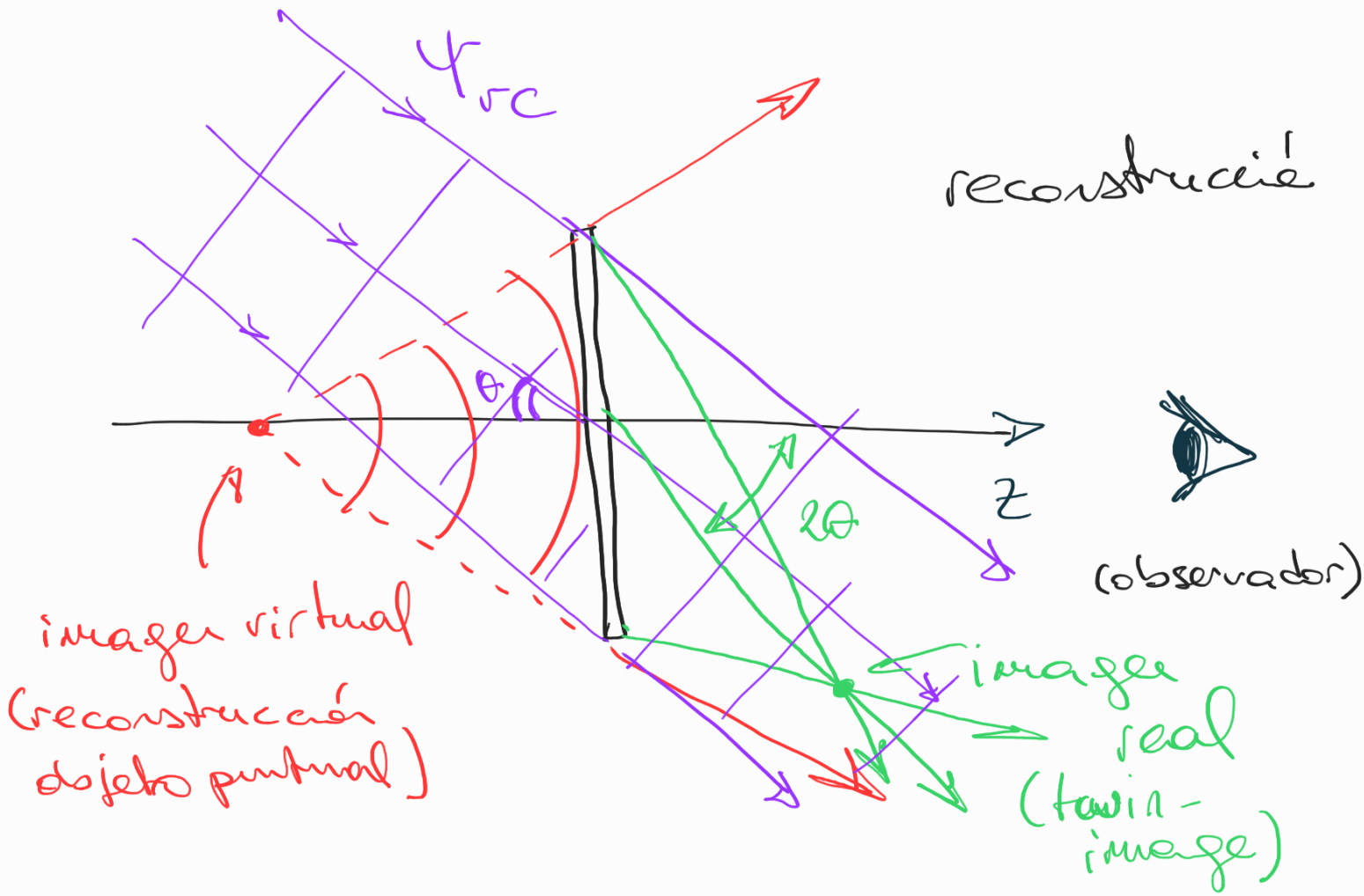
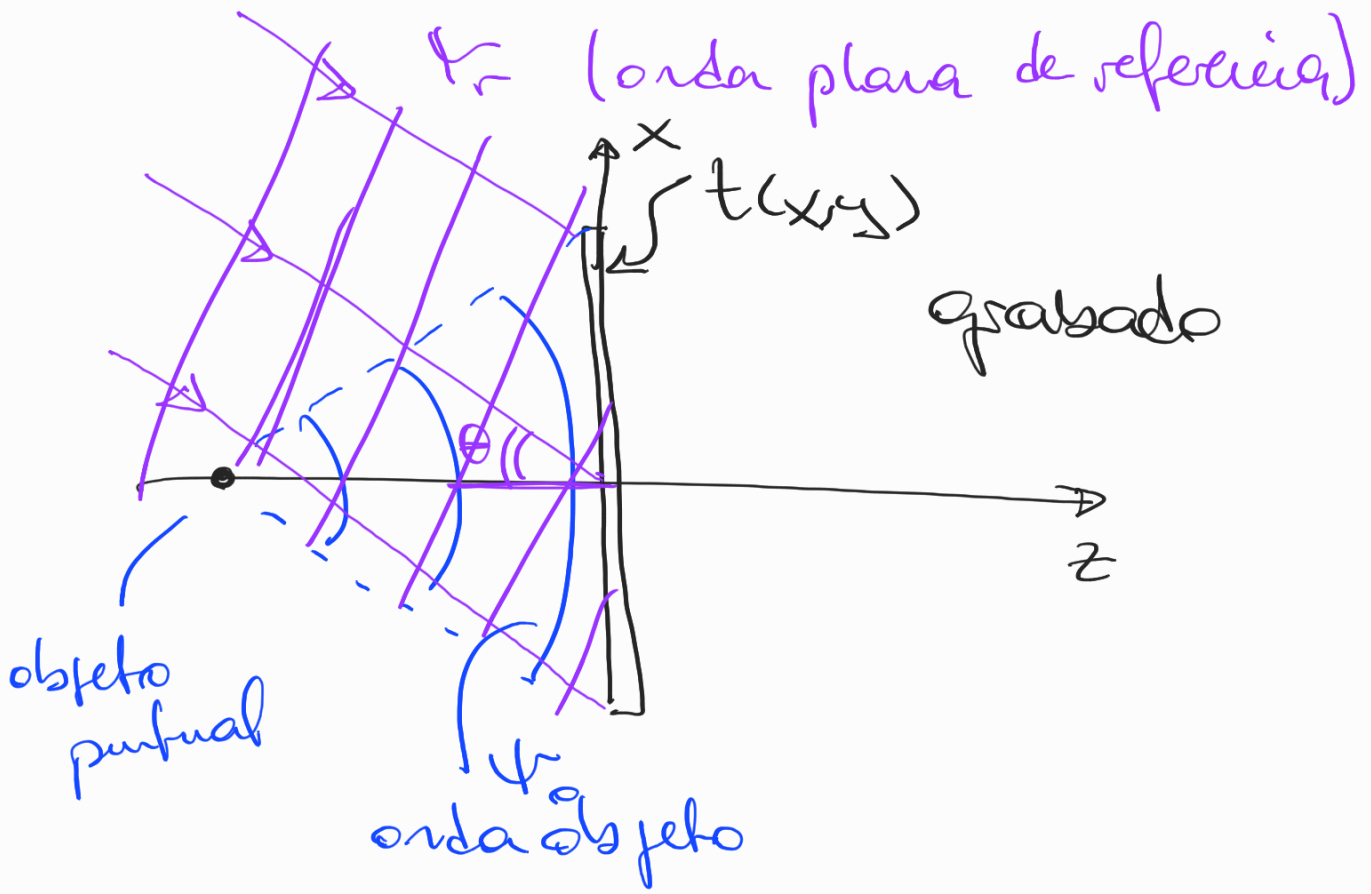
En la holografía on-axis, se genera en la decodificación una imagen real o gemela en la dirección de visión que entorpece la visualización (esto se conoce como el "problema de la imagen gemela")

### Holografía Off-axis

En 1964 Leith y Upatnieks desarrollan un método para separar la imagen gemela y el haz de orden cero de la línea de visión.

Para ello es necesaria la configuración off-axis donde la onda de referencia no es coaxial con la onda objeto

$$(\vec{k}_0 \not\parallel \hat{z})$$



Para el grabado off-axis, la onda objeto  $\psi_0$  sigue siendo una onda esférica generada por una fuente puntual en el eje:

$\psi_0$  ← inmed. antes de la pantalla

$$\begin{aligned} \psi_0 &= f(x,y) * h_F(x,y; z_0) \\ &= e^{-jk_0 z_0} \left( \frac{jk_0}{2\sqrt{z_0}} \right) e^{-jk_0 \left[ \frac{x^2+y^2}{2z_0} \right]} \end{aligned}$$

Pero

$\psi_r$  es ahora una onda plana off-axis:

$$\psi_r = a e^{j(k_0 x \sin \theta)}$$

y el holograma off-axis resulta:

$$\begin{aligned} t(x,y) &= |\psi_r + \psi_0|^2 \\ &= \left| a e^{j k_0 x \sin \theta} + \frac{jk_0}{2\sqrt{z_0}} e^{-jk_0 \left( \frac{x^2+y^2}{2z_0} \right)} \right|^2 \end{aligned}$$

$$= A + B \exp \left[ \frac{k_0}{2z_0} (x^2 + y^2) + k_0 x \sin \theta \right]$$

$$\text{donde } A = a^2 + \left( \frac{k_0}{2\pi z_0} \right)^2 \quad \text{y} \quad B = \frac{a k_0}{\pi z_0}$$

Para la reconstrucción, se ilumina el holograma con una onda de reconstrucción (idéntica a la de referencia).

Inmediatamente luego del plano del holograma tenemos:

$$\psi_{re} t(x, y) * h_F(x, y; z)$$

que nuevamente se puede interpretar como tres contribuciones:

≡ orden cero:

$$A a e^{j k_0 x \sin \theta} * h_F(x, y; z = z_0) \sim A a e^{j k_0 x \sin \theta}$$

≡ imagen real o gemela:

$$a e^{j k_0 x \sin \theta} \cdot e^{-j \left[ \frac{k_0}{2\pi z_0} (x^2 + y^2) + k_0 x \sin \theta \right]} * h_F(x, y; z = z_0)$$

$$\sim f(x + 2z_0 \sin \theta, y); \text{ en } z = z_0$$

≡ imagen virtual:

$$a e^{j k_0 x \sin \theta} \cdot e^{-j \left[ \left( \frac{k_0}{2\pi z_0} \right) (x^2 + y^2) + k_0 x \sin \theta \right]} * h_F(x, y; z = -z_0)$$

$$\sim f(x, y); \text{ en } z = -z_0$$

Obs: el término de orden cero y el de la imagen gemela resultan con un factor

$$e^{j 2\pi f_c x} \quad \text{siendo} \quad f_c = \frac{k_0 \sin \theta}{2\pi} = \frac{\sin \theta}{\lambda_0}$$

una frecuencia portadora espacial ("spatial carrier").

# Hologramas Grabados por computadora (CGH)

## 7 Holografía Digital (DH)

Hasta ahora hemos considerado hologramas grabados a placas fotográficas u otros medios donde las propiedades de transmisión (también podría ser de reflexión) cambian en respuesta a la luz que incide sobre el film.

El grabado y la reconstrucción tiene lugar usando luz y componentes ópticos.

Sin embargo, dado que la propagación y la difracción de la luz está completamente descrita por la teoría de la difracción, es posible simular parte o todo el proceso holográfico mediante cálculo numérico.



En la Holografía Generada por Computadora (Computer-Generated Hologram, CGH), el holograma se construye numéricamente en la computadora y puede visualizarse luego en un monitor o en un modulador espacial de luz ("spatial light modulator", SLM).

En la Holografía Digital (Digital Holography - DH), el holograma se genera ópticamente y se captura en una cámara electrónica (CCD o CMOS) para su posterior manipulación digital y visualización en un monitor.