Consideraciones fundamentales sobre óptica ondulatoria

A partir de las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo y las relaciones constitutivas, se puede derivar la ecuación de ondas para $\vec{E}$ en una región sin fuentes.

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1) \qquad \text{con} \quad v^2 = \frac{1}{\mu \varepsilon}$$

ec. vectorial

$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}$

(en cartesianas)

(veloc. de la onda en el medio)

* en el vacío

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

$c \simeq 3 \times 10^8 \, m/s$

En coordenadas cartesianas:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

La ec. de onda vectorial se puede escribir como una ec. escalar donde ψ representa cualquiera de las componentes E_x, E_y, E_z del campo $\vec{E}$

$$\boxed{\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}} \quad (2)$$

Algunas soluciones simples:

1) Solución de onda plana

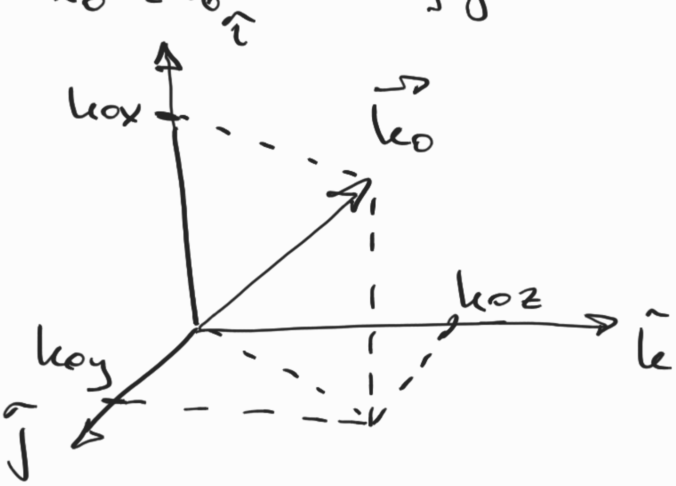
Para ondas oscilando con frecuencia angular ω_0 (rad/s):

$$\psi(x,y,z,t) = e^{j(\omega_0 t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r})} \quad (3)$$

es solución de onda plana (de amplitud 1) que se propaga según $\vec{k}_0$

$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ ← vector posición

$\vec{k}_0 = k_{0x}\hat{\imath} + k_{0y}\hat{\jmath} + k_{0z}\hat{k}$ ← vector de propagación de la onda



$|\vec{k}_0| = k_0$ cte. de propagación

con $\frac{\omega_0^2}{k_0^2} = v^2$

Como los campos electromagnéticos son funciones reales del espacio y el tiempo, por ejemplo, el campo eléctrico se puede asociar con la parte real de ψ:

$$\mathrm{Re}\left[\psi(\vec{r},t)\right] = \cos(\omega_0 t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r})$$
$$= \cos(\omega_0 t - k_{0x} x - k_{0y} y - k_{0z} z)$$

<u>Ejemplo</u>: onda plana que se propaga en la dirección $\hat{z}$:

$$\psi = \psi(z,t) \rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad (4)$$

solución:

fase de la onda

$$\psi(z,t) = e^{j(\omega_0 t - k_0 z)} = e^{j\omega_0 t}\, e^{-j\theta(z)}$$

con $\theta(z) = k_0 z = \frac{2\pi}{\lambda_0} z$ siendo λ_0 la longitud de onda

Tomando el origen de coordenadas como la posición de fase cero: $\theta(z=0)=0$

Obs: $\theta = \vec{k}_0 \cdot \vec{r}$
$= (k_0 \hat{k}) \cdot (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}) = k_0 z$
$\forall x, y$

⇒ todos los puntos en un plano perpendicular al eje z, para un z dado, tienen la misma fase.

$z=0 \rightarrow \theta(0)=0$

$z=\lambda_0 \rightarrow \theta(0) = \frac{2\pi}{\cancel{\lambda_0}}\cancel{\lambda_0} = 2\pi$

c/vez que la onda se desplaza λ_0, su fase cambia en 2π.

se halla entonces de frentes de onda planos a lo largo de la dirección z.

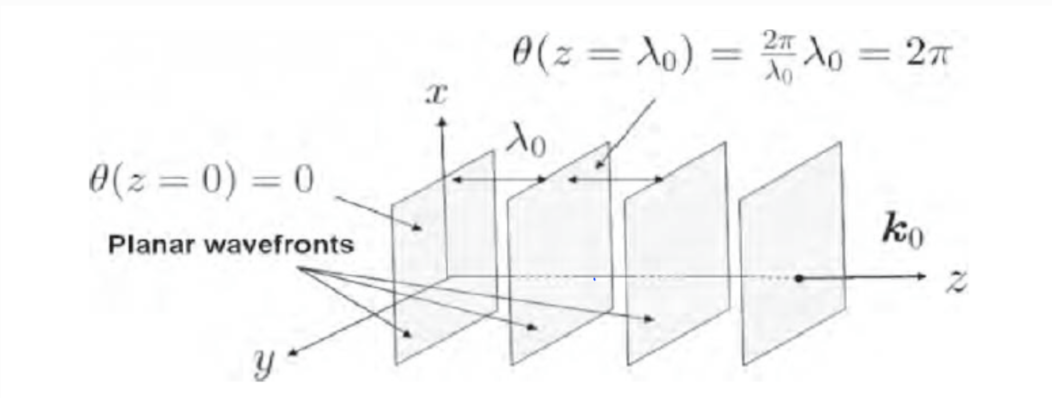
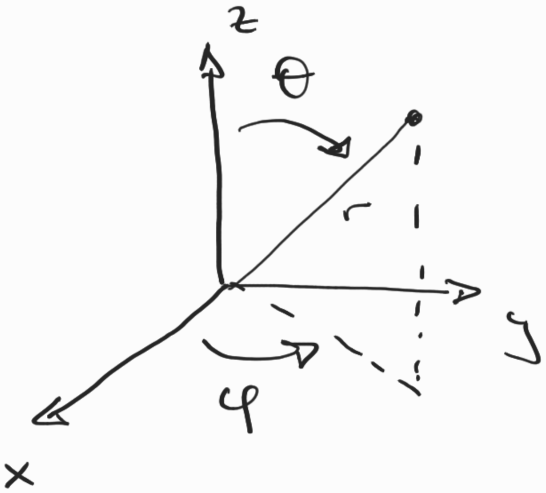


Fig. 2.3 Plane wave propagating along the z-direction exhibiting planar wavefronts.

2) Solución de onda esférica



coords. esféricas

$\vec{r} = (r,\theta,\varphi)$

Si tenemos simetría esférica

$\psi(\vec{r},t) = \psi(r,\cancel{\theta},\cancel{\varphi},t) = \psi(r,t)$

Al considerar la expresión para el laplaciano en coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

resulta:

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Multiplicando por r a ambos lados de la ecuación y reescribiendo todo en términos de derivada segunda respecto a r:

$$r\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial t^2}$$

tiene la misma forma que la ec. (4) pero para $r\psi$.

Entonces:

$$\psi(r,t) = \frac{1}{r} e^{j(\omega_0 t - k_0 r)} = \frac{1}{r} e^{j\omega_0 t} e^{j\theta(r)}$$

con $\theta(r) = k_0 r = k_0 \hat{r} \cdot r\hat{r}$ $\quad (\vec{k_0}\cdot\vec{r} = k_0 r)$

$= \frac{2\pi}{\lambda_0} r$

todos los puntos a distancia r del origen tienen la misma fase (frente de ondas esférico)

Tomando el origen de coordenadas como fase cero:

$$\theta(r=0)=0 \quad y \quad \theta(r=\lambda_0) = \frac{2\pi}{\cancel{\lambda_0}} \cancel{\lambda_0} = 2\pi$$

Una vez que la onda se propaga una distancia λ_0, la fase cambia en 2π

Tenemos entonces frentes de onda esféricos, moviéndose a lo largo de la dirección $\hat{r}$.

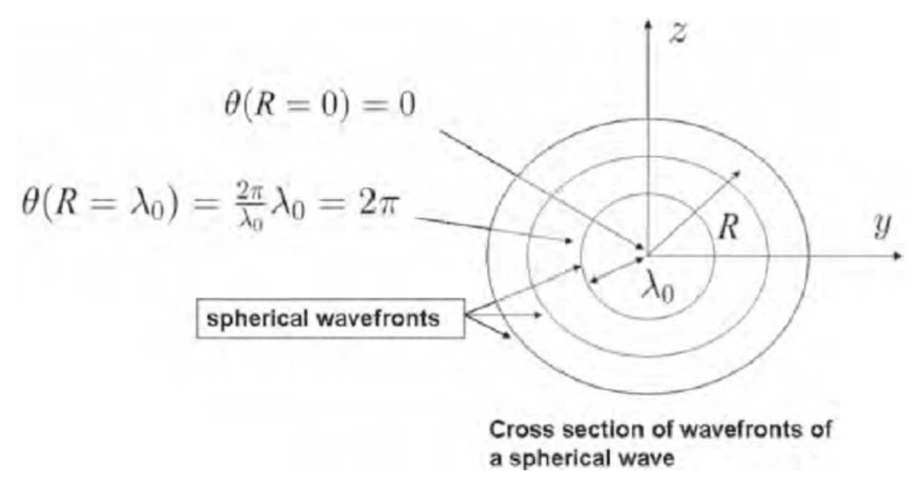
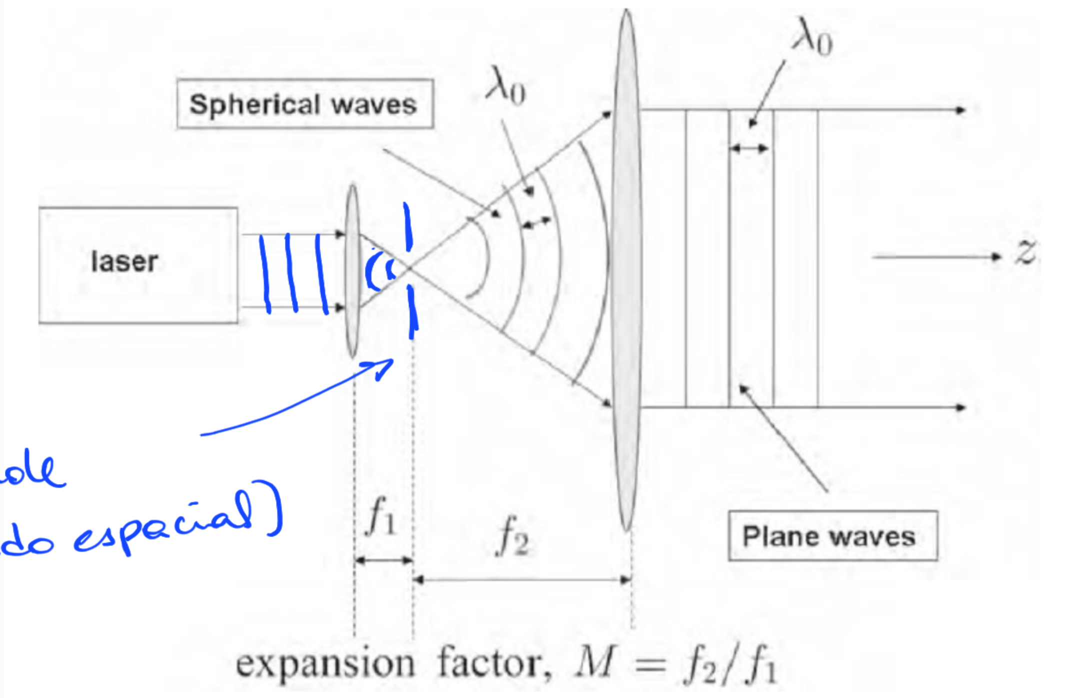


Fig. 2.5 Spherical wavefronts.

En la práctica, en el laboratorio, se pueden generar ondas esféricas y ondas planas:



pinhole
(filtrado espacial)

Fig. 2.6 Practical implementation of spherical waves and plane waves.

Filtrado espacial

LASER

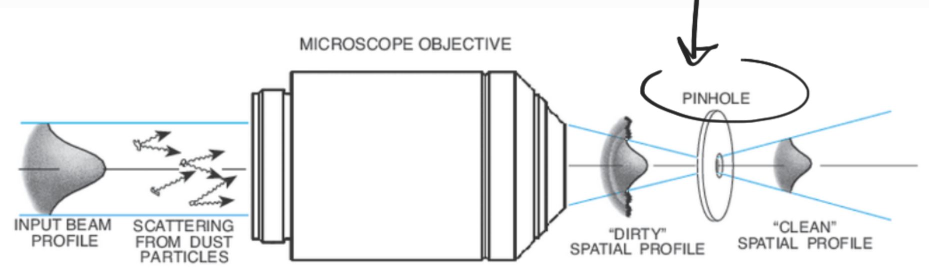


Figure 1: Illustration of the operation of a spatial filter in removing intensity fluctuation from a laser beam profile (left).

El haz del láser presenta variaciones en la intensidad debido a que no es perfecto y a las partículas de polvo en el aire. Como un haz del láser idealmente coherente y colimado se comporta como si estuviera generado por una fuente distante, debería ir a parar al foco del objetivo de microscopio (MO), pero una parte correspondiente a las imperfecciones va a parar "desenfocada" en forma de anillo alrededor del eje. Un pinhole centrado en el eje bloquea ese "ruido" indeseado dejando pasar la mayoría de la energía del láser.

Teoría escalar de la difracción

Consideremos que una onda plana que oscila con ω_0 incide sobre una apertura localizada en el plano $z=0$.
Queremos determinar cómo es la distribución del campo difractado luego de la apertura.

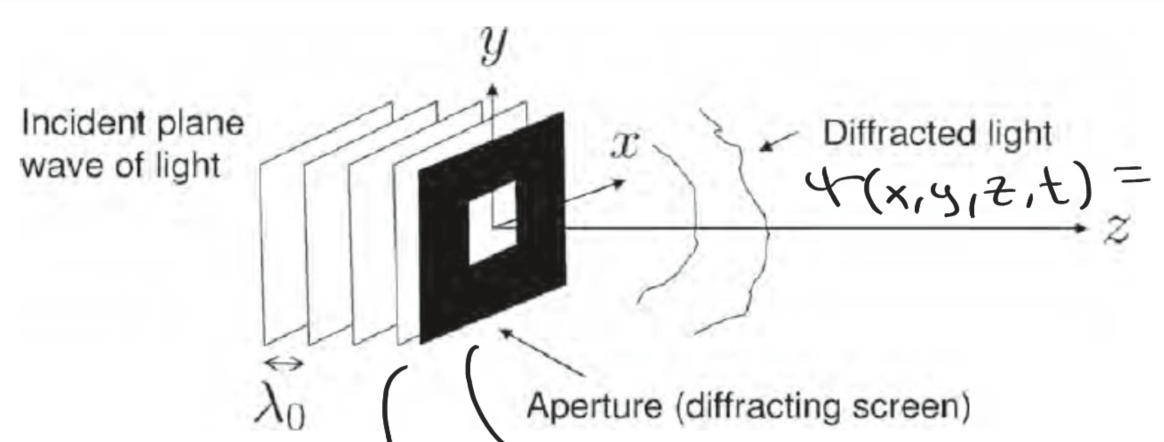


Fig. 2.7 Diffraction geometry.

antes de la apertura

$$\psi(z,t) = A e^{j(\omega_0 t - k_0 z)}$$

inmediátamente antes de la apertura

$$\psi(z=0,t) = A e^{j\omega_0 t}$$

inmediátamente después de la apertura

$$\psi(x,y,z=0,t) = \underbrace{\psi_p(x,y;z=0)}\, e^{j\omega_0 t}$$

ej: $\psi_p(x,y;z=0) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0}\right)$ para una apertura rectangular como en la figura

Buscamos la distribución de la onda difractada: $\Psi(x,y,z,t)$

y para ello se proponen soluciones de la forma:

$$\Psi(x,y,z,t) = \underbrace{\Psi_p(x,y,z)}_{} e^{j\omega_0 t}$$

= ?

↑ ésta es la incógnita (amplitud compleja o fasor)

Sustituyendo ésto en la ec. de ondas escalar:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

se llega a la ecuación de Helmholtz para Ψ_p:

$$\frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial z^2} + k_0^2 \Psi_p = 0 \quad \text{con } k_0 = \frac{\omega_0}{v}$$

Haciendo la transformada de Fourier 2D

$$\Phi_p(k_x,k_y;z) = \mathcal{F}_{xy}\{\Psi_p(x,y;z)\}$$

$$\frac{d^2\Phi_p}{dz^2} + k_0^2\left(1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}\right)\Phi_p = 0$$

cuya solución en el dominio frecuencial es:

$$\Psi_p(k_x,k_y;z) = \underbrace{\Psi_p(k_x,k_y;z=0)}_{\Psi_{p_0}(k_x,k_y)} e^{-jk_0\sqrt{1-\frac{k_x^2}{k_0^2}-\frac{k_y^2}{k_0^2}}\,z}$$

$= \leftarrow$ Condición inicial ($z=0$)

$$\boxed{H(k_x,k_y;z) = e^{-jk_0\sqrt{1-\frac{k_x^2}{k_0^2}-\frac{k_y^2}{k_0^2}}\,z}}$$

$k_x^2+k_y^2 \ll k_0^2$ (aproximación paraxial o de Fresnel)

$$H_F(k_x,k_y;z) \approx \boxed{e^{-jk_0 z}\, e^{j\left(\frac{k_x^2+k_y^2}{2k_0}\right)z}}$$

antitransformando:

$$h_F(x,y;z) \approx e^{-jk_0 z}\left(\frac{jk_0}{2\pi z}\right) e^{-jk_0\frac{(x^2+y^2)}{2z}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi_p(x,y,z) = \psi_{p_0}(x,y) * h_F(x,y;z)}$$

$$= e^{-jk_0 z}\left(\frac{jk_0}{2\pi z}\right)\iint \psi_{p_0}(x',y')\, e^{-j\frac{k_0}{2z}\left[(x-x')^2+(y-y')^2\right]}\, dx'\,dy'$$

Fórmula de la difracción de Fresnel
(transformada de Fresnell)

Block diagram representation in spatial domain

$$\psi_{p0}(x,y) \longrightarrow \boxed{h(x,y;z)} \longrightarrow \psi_p(x,y;z)$$

$$\psi_p(x,y;z) = \psi_{p0}(x,y) * h(x,y;z)$$

$$h(x,y;z) = \exp(-jk_0z)\,\frac{jk_0}{2\pi z}\exp\left[\frac{-jk_0\,(x^2+y^2)}{2z}\right]$$

Block diagram representation in spatial frequency domain

$$\Psi_{p0}(k_x,k_y) \longrightarrow \boxed{H(k_x,k_y;z)} \longrightarrow \Psi_p(k_x,k_y;z)$$

$$\Psi_p(k_x,k_y;z) = \Psi_{p0}(k_x,k_y)H(k_x,k_y;z)$$

$$H(k_x,k_y;z) = \mathcal{F}_{xy}\left\{h(x,y;z)\right\} = \exp(-jk_0z)\exp\left[\frac{j(k_x^2+k_y^2)z}{2k_0}\right]$$

Fig. 2.9 Block diagrams to summarize Fresnel diffraction.

Difracción de una fuente puntual

$$\psi_{p_0}(x,y) = \delta(x,y)$$

En la aprox. de Fresnel, la amplitud compleja del campo a distancia z está dada por:

$$\psi_p(x,y;z) = \delta(x,y) * h_F(x,y;z)$$
$$= e^{-jk_0z}\left(\frac{jk_0}{2\pi z}\right)e^{-jk_0\left(\frac{x^2+y^2}{2z}\right)}$$

que es la aproximación paraxial

de una onda esférica divergente (el frente de onda esférico se aproxima por un frente de onda parabólico)

Eso se puede ver usando:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \simeq z + \frac{x^2+y^2}{2z} \quad \text{para } x^2+y^2 \ll z^2$$

$$\psi_p(x,y,z) \simeq \frac{jk_0}{2\pi z} e^{-jk_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

usando $z \simeq r$

$$\simeq \frac{e^{jk_0}}{2\pi r} e^{-jk_0 r}$$

(onda esf. divergente)

§ Propagación de onda plana

$$\psi_{P_0}(x,y) = 1$$

$$\mathcal{F}_{xy}$$

$$\Psi_{P_0}(k_x,k_y) = 4\pi^2 \delta(k_x)\delta(k_y)$$

Fresnel

$$\Psi_p(k_x,k_y;z) = \Psi_{P_0}(k_x,k_y) H_F(k_x,k_y;z)$$

$$= 4\pi^2 \delta(k_x)\delta(k_y)\, e^{-jk_0 z}\, e^{+j\frac{(k_x^2+k_y^2)z}{2k_0}}$$

$$\psi_p(x,y;z) = \mathcal{F}_{xy}^{-1}\left\{\Psi_p(k_x,k_y;z)\right\}$$

$$= \frac{1}{\cancel{4\pi^2}}\iint \underbrace{\Psi_{p_0}(k_x,k_y)}_{\cancel{4\pi^2}\,\delta(k_x)\,\delta(k_y)} e^{-jk_0z} e^{-j\frac{(k_x^2+k_y^2)z}{2k_0}} e^{-j(k_x x+k_y y)}\, dk_x dk_y$$

$$\psi_p(x,y;z) = e^{-jk_0z}$$

$\rightarrow$ a medida que la onda plana viaja, sólo adquiere un corrimiento de fase (sin difractarse)