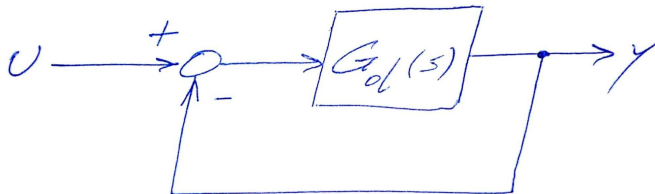


SyC - Hoja 7 - Ej. 3

Dado un sistema con:

$$G_{ol} = \frac{1000K (s^2 + 10s + 50) (s + 1)}{s^4 (s + 20)},$$

dibujar el lugar de las raíces y calcular el K límite de estabilidad.



Algunas definiciones

Sean: $k := 1000K$ y $H(s) := \frac{q(s)}{p(s)}$, donde

$$p(s) := s^4 (s + 20) \quad \text{y} \quad q(s) := (s^2 + 10s + 50) (s + 1).$$

Sean también:

$$n := \text{gr}(p), \quad m := \text{gr}(q).$$

Entonces

$$G_{\text{ol}}(s) = kH(s) = k \frac{q(s)}{p(s)}.$$

La función de transferencia del sistema de entrada u y salida y es:

$$G_{\text{cl}}(s) = \frac{G_{\text{ol}}(s)}{1 + G_{\text{ol}}(s)} = \frac{kH(s)}{1 + kH(s)} = \frac{k \frac{q(s)}{p(s)}}{1 + k \frac{q(s)}{p(s)}} = \frac{kq(s)}{d(s)},$$

donde $d_k(s) := p(s) + kq(s)$. Queremos estudiar cómo varían las raíces del polinomio $d_k(s)$ al variar $k \in (0, \infty)$.

Aplicación de las reglas de construcción del LGP

1. Origen y fin

- ▶ Cantidad de ramas independientes:

$$\text{máx} \{n, m\} = \text{máx} \{5, 3\} = 4$$

- ▶ Puntos de partida ($k \rightarrow 0$):

$n = 5$ ramas comienzan en los polos de $H(s)$ (raíces de $p(s)$):

$$p_1 := 0, p_2 := 0, p_3 := 0, p_4 := 0, p_5 := -20.$$

- ▶ Puntos de llegada ($k \rightarrow \infty$)

$m = 3$ ramas terminan en los ceros de $H(s)$ (raíces de $q(s)$):

$$z_1 := -1, z_2 := -5 + 5j, z_3 := -5 - 5j.$$

2. Asíntotas

- ▶ Centroide

$$\begin{aligned}c &= \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} = \frac{0 \times 4 - 20 - (-1 - 5 + 5j - 5 - 5j)}{5 - 3} \\ &= -4,5\end{aligned}$$

- ▶ Ángulos de las asíntotas

$$\theta_h = \frac{(2h + 1)\pi}{n - m}, \text{ donde } h \in \{0, 1, \dots, |n - m| - 1\}.$$

En este caso: $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_1 = \frac{3\pi}{2}$.

Aplicación de las reglas de construcción del LGP

3. LGP sobre el eje real

Pertencen al LGP los $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que s_0 tiene a su derecha un número *impar* de singularidades (ceros o polos) de $H(s)$ sobre el eje real.

En este caso, el LPG sobre el eje real es el intervalo $(-20, -1)$.

4. Puntos múltiples

s_0 es punto múltiple del *LGP* si y solo si

$$\begin{cases} s_0 \in \text{LPG} \\ \frac{dH}{ds}(s_0) = 0 \end{cases}$$

En este caso $\frac{dH}{ds} = \frac{-s^3(2s^4 + 53s^3 + 680s^2 + 3850s + 4000)}{s^8(s+20)^2}$.

Los candidatos a puntos múltiples son los ceros de $s^3(2s^4 + 53s^3 + 680s^2 + 3850s + 4000)$, es decir:

$$\begin{aligned} s_0^* &= 0 \text{ (con multiplicidad 3)}, & s_{1,2}^* &\approx -7,734 \pm 9,837j \\ s_3^* &\approx -9,718 & s_4^* &\approx -1,314 \end{aligned}$$

Ya sabíamos que $s_0^* = 0$ es un punto de partida *cuádruple*.

Aplicación de las reglas de construcción del LGP

4. Puntos múltiples (continuación)

Los candidatos a puntos *dobles* s_1^* y s_2^* *no son* puntos múltiples porque no pertenecen al LGP:

$$1 + kH(s_1^*) = 0 \implies k = -\frac{1}{H(s_1^*)} \notin \mathbb{R}$$

$$1 + kH(s_2^*) = 0 \implies k = -\frac{1}{H(s_2^*)} \notin \mathbb{R}$$

En cambio, los candidatos a puntos *dobles* s_3^* y s_4^* *sí son* puntos múltiples porque pertenecen al LGP:

$$1 + kH(s_3^*) = 0 \implies k = -\frac{1}{H(s_1^*)} \approx 222,6 \in \mathbb{R}$$

$$1 + kH(s_4^*) = 0 \implies k = -\frac{1}{H(s_2^*)} \approx 4,598 \in \mathbb{R}$$

Aplicación de las reglas de construcción del LGP

5. Ángulos de partida y llegada

▶ Ángulos de partida

- ▶ De las ramas que parten de $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$:

$$4\theta_{1-4}^{\text{part}} = \pi + \underbrace{\sum_{i=1}^m \angle 0 - z_i}_{2\pi} - \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1,2,3,4}}^n \angle 0 - p_j}_0 \quad (\text{mód } 2\pi)$$

Es decir: $\theta_1^{\text{part}} = \frac{\pi}{4}$, $\theta_2^{\text{part}} = \frac{3\pi}{4}$, $\theta_3^{\text{part}} = \frac{5\pi}{4}$, $\theta_4^{\text{part}} = \frac{7\pi}{4}$.

- ▶ De la rama que parte de $p_5 = -20$:

$$\theta_5^{\text{part}} = \pi + \underbrace{\sum_{i=1}^m \angle p_5 - z_i}_{2\pi + \pi} - \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 5}}^n \angle p_5 - p_j}_{4\pi} \quad (\text{mód } 2\pi)$$

Es decir: $\theta_5^{\text{part}} = 0$ (ya lo sabíamos luego de aplicar la regla 3).

Aplicación de las reglas de construcción del LGP

5. Ángulos de partida y llegada (continuación)

▶ Ángulos de llegada

- ▶ De la rama que llega a $z_1 = -1$:

$$\theta_1^{\text{lleg}} = \pi + \underbrace{\sum_{j=1}^n \angle z_1 - p_j}_{4\pi} - \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^m \angle z_1 - z_i}_{2\pi} \quad (\text{mód } 2\pi)$$

Es decir: $\theta_1^{\text{lleg}} = \pi$ (ya lo sabíamos luego de aplicar la regla 3).

- ▶ De la rama que llega a $z_2 = -5 + 5j$:

$$\theta_2^{\text{lleg}} = \pi + \underbrace{\sum_{j=1}^n \angle z_2 - p_j}_{4\frac{3\pi}{4} + \arctan \frac{5}{15}} - \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^m \angle z_2 - z_i}_{\left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{4}{5}\right) + \frac{\pi}{2}} \quad (\text{mód } 2\pi)$$

Es decir: $\theta_2^{\text{lleg}} \approx 159,8^\circ$.

Aplicación de las reglas de construcción del LGP

6. Puntos de corte con el eje imaginario

$$p(s) + kq(s) = s^5 + 20s^4 + ks^3 + 11ks^2 + 60ks + 50k$$

El arreglo de Routh–Hurwitz para $p(s) + kq(s)$ es:

s^5	1	k	$60k$
s^4	20	$11k$	$50k$
s^3	$\frac{9k}{20}$	$\frac{115k}{2}$	
s^2	$11k - \frac{23000}{9}$	$50k$	
s^1	$\frac{115k}{2} - \frac{45k^2}{11k - \frac{23000}{9}}$		
s^0	$50k$		

El sistema realimentado es estable si y solo si

$$\begin{cases} k > 0 \\ 11k - \frac{23000}{9} > 0 \\ \frac{115k}{2} - \frac{45k^2}{11k - \frac{23000}{9}} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k > 0 \\ k > \frac{23000}{99} \approx 232,3 \\ k > \frac{132250}{549} \approx 240,9 \end{cases} \iff$$

$$k > k_{\text{crit}} := \frac{132250}{549} \approx 240,9.$$

Aplicación de las reglas de construcción del LGP

6. Puntos de corte con el eje imaginario (continuación)

Para $k = k_{\text{crit}}$, el polinomio $(11k - \frac{23000}{9})s^2 + 50k$ es factor de $p(s) + kq(s)$, según el arreglo de Routh-Hurwitz. Entonces las raíces de

$$\left(11k - \frac{23000}{9}\right)s^2 + 50k$$

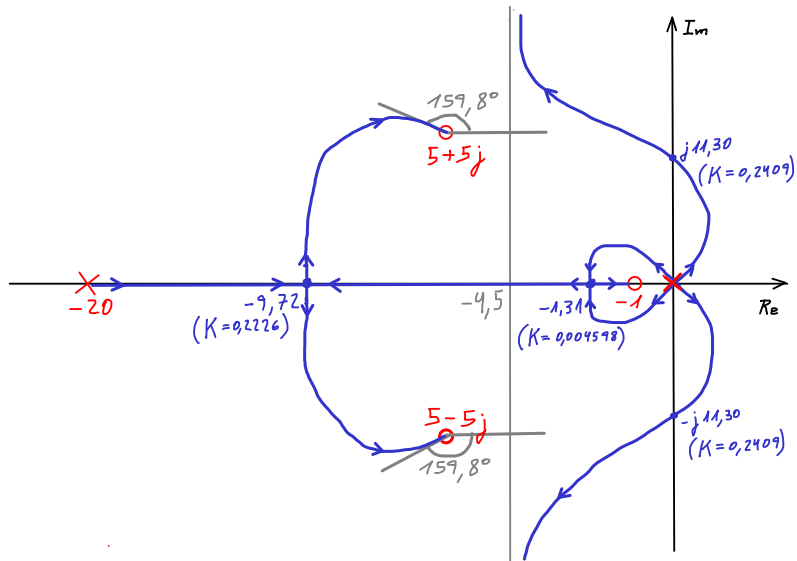
son raíces de $p(s) + kq(s)$. Estas raíces son los puntos de corte con el eje imaginario:

$$s_{\text{crit}} = \pm j \sqrt{\frac{50k_{\text{crit}}}{11k_{\text{crit}} - \frac{23000}{9}}} \approx \pm j11,30.$$

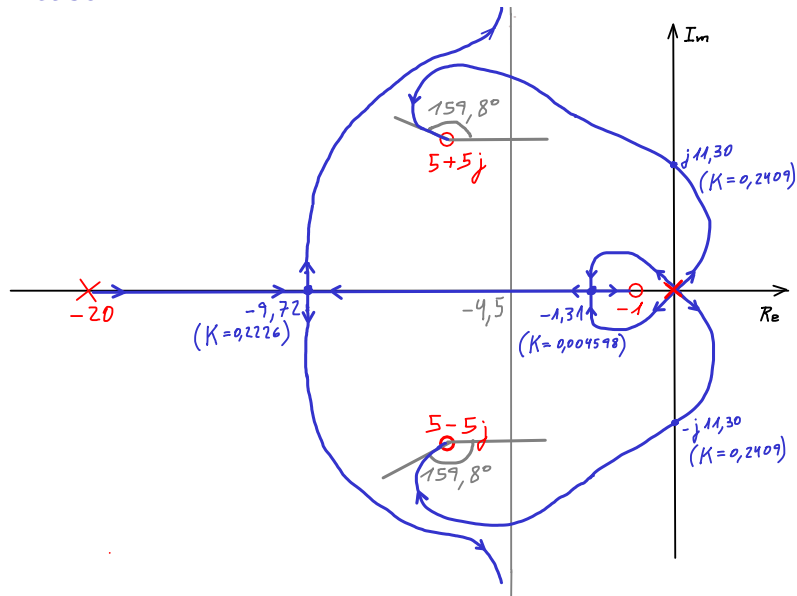
Ahora dibujaremos el LGP recordando que, por conveniencia, definimos $k := 1000K$.

Pero, aun luego de aplicar todas las reglas, tenemos al menos dos casos posibles ...

LGP: caso A



LGP: caso B



LGP: caso A o bien caso B

En el caso A existe solamente un punto de intersección del LGP con la recta $\{s \mid \operatorname{Re}(s) = -\frac{9}{2}\}$, mientras que en el caso B existen tres puntos de intersección del LGP con la misma recta.

Para discriminar entre estos dos casos (y posiblemente entre otros casos no dibujados con más puntos de intersección con la recta $\{s \mid \operatorname{Re}(s) = -\frac{9}{2}\}$) podemos introducir el cambio de variable

$$w := s + \frac{9}{2},$$

y aplicar Routh-Hurwitz al polinomio

$$f_k(w) := d_k \left(w - \frac{9}{2} \right) = p \left(w - \frac{9}{2} \right) + kq \left(w - \frac{9}{2} \right)$$

para estudiar los cortes del LGP con la recta $\{s \mid \operatorname{Re}(s) = -\frac{9}{2}\}$.

LGP: caso A o bien caso B

$$f_k(w) = w^5 - \frac{5}{2}w^4 + \left(k - \frac{315}{2}\right)w^3 + \left(\frac{6075}{4} - \frac{5}{2}k\right)w^2 + \left(\frac{87}{4}k - \frac{83835}{16}\right)w + \frac{203391}{32} - \frac{707}{8}k$$

w^5	1	$k - \frac{315}{2}$	$\frac{87}{4}k - \frac{83835}{16}$
w^4	$-\frac{5}{2}$	$\frac{6075}{4} - \frac{5}{2}k$	$\frac{203391}{32} - \frac{707}{8}k$
w^3	450	$-\frac{136k+26973}{10}$	
w^2	$-\frac{4636k-2706777}{1800}$	$-\frac{2828k-203391}{32}$	
w^1	$-\frac{8(39406k^2+29547666k-7780827681)}{5(4636k-2706777)}$		
w^0	$-\frac{2828k-203391}{32}$		

Para $k \in (0, \frac{203391}{2828})$: 4 cambios de signo en la primer columna.

Para $k \in (\frac{203391}{2828}, \infty)$: 3 cambios de signo en la primer columna.

Entonces, se trata del caso A (solamente una rama del LGP interseca la recta $\{s \mid \operatorname{Re}(s) = -\frac{9}{2}\}$).