Práctico 7: Composición e Inversa de funciones

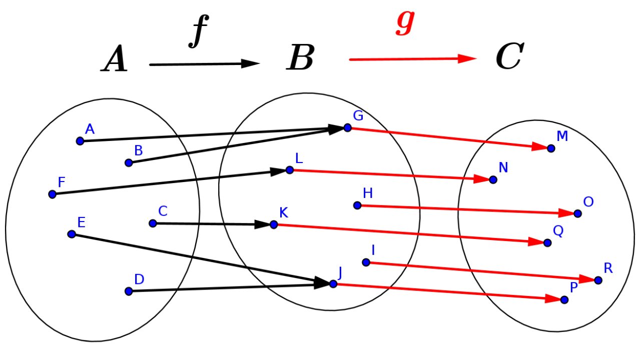
Ejercicio 1 (Composición de funciones) *Para los siguientes pares de funciones definidas en $\mathbb{R}$ calcular $f \circ g$ y $g \circ f$.*

1. a) $f(x) = 2x + 1,$ $\quad g(x) = x^3 - x^2 - 4$
   b) $f(x) = x^2 + x + 4,$ $\quad g(x) = \cos(x)$
   c) $f(x) = x^3,$ $\quad g(x) = \frac{x}{x^4+5}$
2. a) $f(x) = |x + 1|,$ $\quad g(x) = |2x|$
   b) $f(x) = x + 1,$ $\quad g(x) = \text{máx}\{1, x - 1\}$
   c) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & x \leq 0 \\ x - 8 & 0 < x \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ 2x & 0 < x \end{cases}$
   d) $f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x \leq 0 \\ 0 & si \quad x > 0 \end{cases},$ $\quad g(x) = \begin{cases} -x^2 & si \quad x < 2 \\ x + 2 & si \quad x > 2 \end{cases}$

Ejercicio 2 (Composición de funciones y dominio) *Para los siguientes pares de funciones calcular $f \circ g$ y $g \circ f$. En caso de que no esté bien definida la composición modificar los dominios para que resulte bien definida.*

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$ *y* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = 2x + 1$.
2. $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = \log(x)$ *y* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = 2x - 1$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = |x|$ *y* $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Ejercicio 3 (Composición y biyectividad) *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones dadas por el siguiente diagrama*



1. *Calcular $g \circ f$*
2. *Para las funciones f, g y $g \circ f$, determinar cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.*

Ejercicio 4 (Dominio, codominio y biyectividad) *Consideremos las siguientes funciones:*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x^2$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *tal que* $g(x) = x^2$.
3. $h : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ *tal que* $h(x) = x^2$.
4. $i : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *tal que* $i(x) = x^2$.

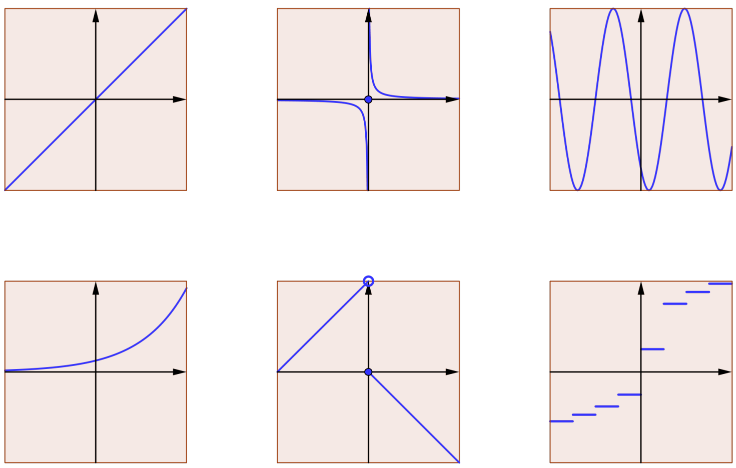
a) ¿Son todas las funciones iguales? Justifique.

b) Estudiar inyectividad, sobreyectividad y biyectividad.

Ejercicio 5 (Dominio, codominio y biyectividad) *Determinar para las siguientes funciones $f : A \to B$ cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas:*

1. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $f(x) = x + 5$
2. $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 5$
3. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$
4. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$
5. $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$
6. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$

Ejercicio 6 (Biyectividad - Interpretación gráfica) *Determinar para los siguientes bosquejos de funciones cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas:*



Ejercicio 7 (Inyectividad/ Sobreyectividad y Composición) *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos funciones.*

1. *Pruebe que si f y g son inyectivas entonces también lo es $g \circ f$.*
2. *Pruebe que si f y g son sobreyectivas entonces también lo es $g \circ f$.*
3. a) *Enuncie el recíproco de 1.*
   b) *¿Es verdadero el enunciado anterior? Discutir en detalle.*
4. a) *Enuncie el recíproco de 2.*
   b) *¿Es verdadero el enunciado anterior? Discutir en detalle.*

Ejercicio 8 (Inyectividad y crecimiento) *¿Verdadero o falso?*

1. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente (resp. decreciente) entonces f es inyectiva (si es verdadero pruébelo, si es falso dé contraejemplo).*

2. *Si f es inyectiva, ¿debe ser estrictamente creciente?*

3. *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 + x$ es biyectiva.*

Ejercicio 9 (Verificar inversa) *Verificar que los pares de funciones dadas corresponden a una función y su inversa. Salvo que se indique lo contrario el dominio es el más grande posible.*

1. $\begin{cases} f(x) = 2x - 1 \\ g(x) = \frac{x+1}{2} \end{cases}$

2. $\begin{cases} f(x) = x^{1/3} \\ g(x) = x^3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} f(x) = \log_2(x+1) & \text{con dominio } (0,\infty) \\ g(x) = 2^x - 1 & \text{con dominio } \mathbb{R} \end{cases}$

4. $\begin{cases} f(x) = 2 + e^{x-1} & \text{con dominio } \mathbb{R} \\ g(x) = \ln(x-2) + 1 & \text{con dominio } (2,\infty) \end{cases}$

Ejercicio 10 (Cálculo de función inversa) *Verificar que las siguientes funciones son biyectivas y hallar una fórmula para la función inversa.*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x + 7$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 2 - 3x^3$.

3. $f : \mathbb{R} \setminus \{5/2\} \to \mathbb{R} \setminus \{3/2\}$ *tal que* $f(x) = \frac{3x+2}{2x-5}$.

4. $f : \left[\frac{-4}{3}, \infty\right) \to [0, +\infty)$ *con* $f(x) = \sqrt{3x+4}$.

Graficar f^{-1}. Utilizar GeoGebra.

Ejercicio 11 (Cálculo de función inversa II) *Demostrar que las siguientes funciones son biyectivas y hallar una fórmula para la función inversa.*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$.

2. $f : [0,4] \to [0,32]$ *tal que* $f(x) = -x^2 - 4x + 32$.

3. $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 2\ln(x-1)$.

4. $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = e^x$.

Graficar f^{-1}. Utilizar GeoGebra.

Ejercicio 12 (Ejercicios de pruebas anteriores) *Sean $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definidas por:*

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad y \quad g(x) = e^{-x/2}.$$

Consideramos la composición: $h = f \circ g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to Im(h)$.

Indicar la opción correcta:

1. *h es invertible y $h^{-1}(x) = 2\ln(\frac{x}{x-1})$.*

2. *h no es invertible.*

3. *h es invertible y $h^{-1}(x) = \ln(\frac{2x}{x-1})$.*

4. *h es invertible y $h^{-1}(x) = 2\ln(\frac{1}{x}) + 1$.*

Ejercicio 13 (Ejercicios de pruebas anteriores) *Indicar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa.*
La función $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [0,2]$ dada por $f(x) = cos(x) + 1$ es biyectiva.