Capítulo 5

Funciones

5.1. El concepto de función

En matemática, una **función** es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto A un único elemento de un conjunto B. Esto significa que, dado un elemento $x \in A$, le corresponde un único valor que pertenece al conjunto B, al cual denotamos por $f(x)$. Escribimos:

$$\begin{aligned} f :\ & A \to B \\ & x \mapsto f(x). \end{aligned}$$

Lo anterior se lee "f es una función de A en B". En el renglón de abajo se indica qué valor de B se le asigna a cada $x \in A$, y $f(x)$ se lee "f de x". El conjunto A se llama **dominio** de f o **conjunto de partida**, mientras que B se llama **conjunto de llegada**.

Por ejemplo, supongamos que en un empleo se paga \$150 por cada hora que se trabaja. Entonces la regla

$$x \mapsto 150x$$

es una función que nos dice el salario obtenido al trabajar x horas. Este salario depende, obviamente, de la cantidad de horas trabajadas, lo que se expresa también como "el salario es función de las horas trabajadas".

En forma general, se dice que **una cantidad y es función de otra cantidad x**, si el valor de la primera depende del valor que tome la segunda. Para simbolizar esto se escribe

$$y = f(x).$$

Para indicar en palabras lo anterior, decimos:

y es la **imagen** de x a través de f.

El significado de ambas expresiones es el mismo: que y es el resultado de aplicar la regla f a un determinado valor x. Por eso decimos que x es la **variable independiente**, mientras que y es la **variable dependiente**, ya que su valor depende del valor que tome x.

Para fijar estos conceptos, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 137. **Evaluando una función.** Consideremos la regla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Es decir, la función f que va de los reales en los reales, tal que a cada x real le asigna su cuadrado x^2. En la siguiente tabla, vamos a calcular la imagen a través de esta función de algunos valores del dominio de f:

x	$f(x)$
-2	$(-2)^2 = 4$
-1	$(-1)^2 = 1$
0	$0^2 = 0$
$\frac{5}{3}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$
$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2})^2 = 2$
2	$2^2 = 4$
5	$5^2 = 25$

«

En la definición de “función” hay dos condiciones que no deben pasarse por alto: **existencia y unicidad de imagen**. Esto significa que para cada valor x en el dominio debe **existir** un **único** valor en el conjunto de llegada que sea imagen de x. Para ilustrarlo, supongamos que hay un concurso de baile, y tenemos el conjunto A formado por los jurados, y el conjunto B formado por los participantes del concurso. Cada jurado vota por quién piensa que debería ser el ganador:

$$\text{jurado} \mapsto \text{participante elegido.}$$

Pero existe una condición: no se puede votar en blanco o no votar, ni se puede elegir a dos candidatos. Es decir, cada jurado debe elegir un único ganador del concurso. Votar en blanco (o no votar) representa la no existencia de imagen, mientras que elegir a dos candidatos significa la no unicidad de ella. El requisito establecido sobre el voto es lo que convierte a la relación “elección de ganador” en una función.

Ejemplo 138. **No es función.** Sea $f(x) = \sqrt{x}$. ¿Podemos determinar si es o no función? No, no podemos porque la definición está incompleta, ya que la fórmula sola no es suficiente. Para definir una función hay que indicar además su dominio y conjunto de llegada. Esto puede cambiar la decisión, como veremos a continuación. Sean

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g : [0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Las asignaciones f y g se definen mediante la misma fórmula, pero tienen distintos dominios, por lo tanto, son distintas. De hecho, como veremos ahora, f no es función, mientras que g sí lo es. En efecto, f no es función porque para algunos elementos del dominio no existe imagen en el conjunto de llegada:

$$f(-4) = \sqrt{-4} \rightsquigarrow \text{ no existe en } \mathbb{R}.$$

Lo mismo ocurre con cualquier otro número negativo, pues la raíz cuadrada de un número negativo no está definida en los reales. Al no cumplir una de las dos condiciones, en este caso la existencia de imagen, f no es función. Sin embargo, para cada número no negativo x, el símbolo $\sqrt{x}$ denota al único real no negativo r que satisface $r^2 = x$. Por lo tanto g sí resulta ser función. «

Como vimos en el ejemplo anterior, explicitar el dominio es parte importante al momento de definir una función. Sin embargo, existe una **convención** sobre dominios cuando el mismo no esté dado, y consiste en tomar como dominio el mayor conjunto de números reales x para los cuales $f(x)$ es también un número real. Utilizamos

$$\mathrm{Dom}(f) \quad \text{o} \quad \mathrm{D}_f$$

para denotar el dominio de una función f.

Ejemplo 139. **Determinando el dominio.** Hallar el dominio de la función definida por $f(x) = \sqrt{2x-5}$.

Solución: Debido a la convención mencionada, el dominio son todos aquellos valores de x tales que $\sqrt{2x-5}$ sea un número real. Puesto que la raíz cuadrada está definida para números mayores o iguales que cero, queremos que todo el radicando lo sea. Es decir, $f(x)$ está definida si y solo si

$$2x - 5 \geq 0.$$

Esta inecuación es equivalente a $x \geq \frac{5}{2}$. Es decir, $\mathrm{Dom}(f) = \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$. «

Ejemplo 140. **Determinando el dominio.** Hallar el dominio de $g(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$.

Solución: Para que la función g esté definida necesitamos dos condiciones: que el radicando involucrado no sea negativo, y que el denominador no sea cero. Esto se traduce en

$$4 - x^2 \geq 0 \qquad \text{y} \qquad x - 1 \neq 0.$$

Es claro que la última condición se cumple siempre que $x \neq 1$. Con respecto a la primera, resolviendo tenemos que

$$4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq x^2 \Leftrightarrow 2 \geq |x| \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

Por lo tanto $\mathrm{Dom}(f) = [-2,2] - \{1\} = [-2,1) \cup (1,2]$. «

Se dice que una función f es **polinómica** si es de la forma

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

es decir, si la expresión que la define es un polinomio.

Notar que si f es una función polinómica, entonces $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Para entender el próximo concepto a definir, volvamos a la función f dada en el Ejemplo 137, definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ como $f(x) = x^2$. Nos preguntamos si, por ejemplo, el número -4 es imagen de algún real x. En otras palabras, ¿existe algún número x real tal que su cuadrado sea igual a -4? Claramente la respuesta es **no**, pues al elevar al cuadrado cualquier número se obtiene como resultado otro número positivo o cero. Luego, no todo elemento en el conjunto de llegada es imagen de algún elemento en el dominio. Todos los que sí son imágenes de algún elemento del dominio, se coleccionan en un conjunto llamado **imagen** del dominio bajo f, el cual se denota y define formalmente como

$$\mathrm{Img}(f) = \{y \in B : y = f(x) \text{ para algún } x \in A\},$$

siendo f una función definida de A en B. De la definición se sigue que la imagen está contenida en el conjunto de llegada. Resumiendo:

Dominio de f: todos los valores x tales que $f(x)$ está definida,

Imagen de f: todos los posibles resultados al efectuar $f(x)$.

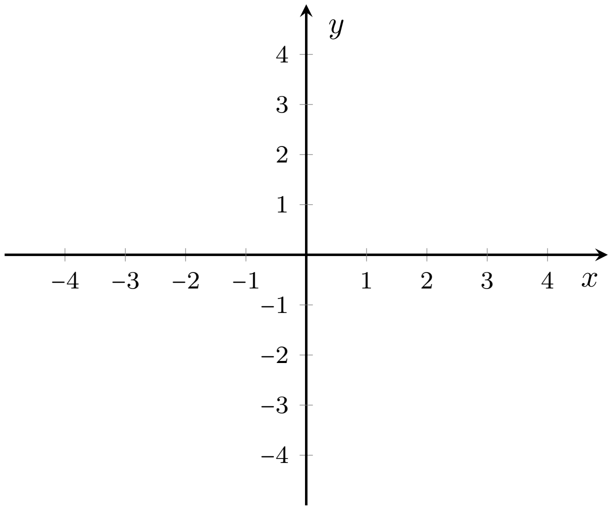
Ejemplo 141. Algunas imágenes. Por lo mencionado arriba, para la función f del Ejemplo 137 tenemos que

$$\mathrm{Img}(f) = [0, \infty).$$

En el ejemplo del concurso de baile, la imagen se forma con todos los participantes que recibieron algún voto. Los que no recibieron ningún voto, son parte del conjunto de llegada pero no de la imagen de la función "elección de ganador", ya que no existe un jurado (en este caso son quienes forman el dominio) que haya votado por ellos. ☹

Para funciones polinómicas, existen infinitas posibilidades para la imagen, que dependerán de cada caso en particular. «

Hasta ahora hemos representado funciones mediante su ecuación, es decir, dando la expresión que la define. Otra forma de representar una función es mediante su gráfica. Para ello, necesitamos primero el concepto de **ejes cartesianos** o **coordenados**, que son simplemente un par de rectas numéricas perpendiculares que nos permitirán ubicar puntos en el plano:



Ejes cartesianos.

La recta horizontal se llama **eje x** o **eje de las abscisas**, mientras que la recta vertical recibe el nombre de **eje y** o **eje de las ordenadas**. Llamaremos **origen** de coordenadas al punto donde se cruzan las dos rectas, que corresponde al cero en ambas direcciones. A la izquierda del origen, en el eje de las abscisas, se encuentran los valores negativos, y a la derecha los positivos. En el eje de las ordenadas, hacia arriba del origen se encuentran los valores positivos y hacia abajo, los negativos.

Un punto en el plano se localiza con un **par ordenado** de valores (x, y) llamados **coordenadas**, siendo el número x la **abscisa** del punto, y el número y su **ordenada**. Luego, la primera componente del par se localiza en el eje de las abscisas, y la segunda en el eje de las ordenadas. Al trazar las paralelas a cada uno de los ejes desde esos puntos, las líneas resultantes se intersecan* en un punto que es el lugar buscado.

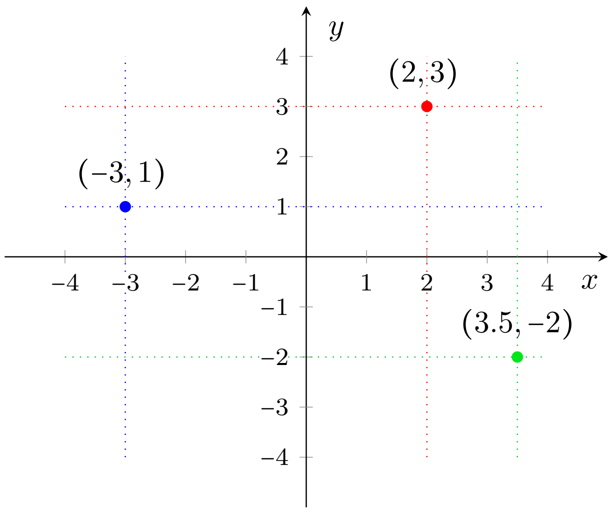
La primera coordenada de un punto indica el desplazamiento horizontal desde el origen de coordenadas (hacia la derecha si es positiva, o hacia la izquierda si es negativa), mientras que la segunda indica el desplazamiento vertical (hacia arriba si es positiva, o hacia abajo si es negativa). El origen representa al punto de coordenadas $(0, 0)$, el cual suele denotarse con la letra O.

*Dos curvas se intersecan si se cortan entre sí.

Ejemplo 142. **Ubicando puntos en el plano.** Representar en un sistema de ejes cartesianos los puntos

$$P = (2, 3), \quad Q = (-3, 1) \quad \text{y} \quad R = (3.5, -2).$$

Solución: Para ubicar al punto P vamos hasta el 2 en el eje x y trazamos una recta paralela al eje y allí. Luego hacemos lo mismo en el valor 3 sobre el eje y (ahora la recta será paralela al eje x), y donde se cortan ambas rectas se ubica el punto P (en color rojo en el gráfico siguiente). Los otros dos puntos los ubicamos de la misma forma (azul para el punto Q y verde para R).

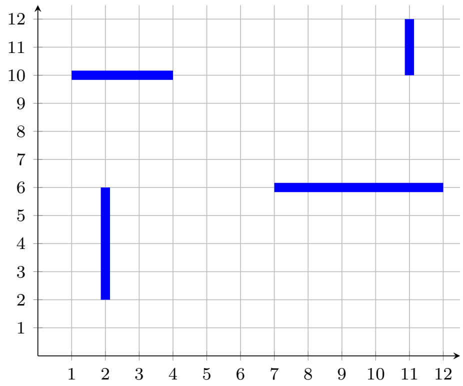


«

Así, a cada par ordenado de números reales le corresponde un punto en el plano, y recíprocamente, a cada punto del plano le corresponde un par ordenado determinado por su posición.

En GeoGebra, un punto se ingresa escribiendo en el campo de entradas su nombre y coordenadas, por ejemplo P=(2,3). Desde el menú gráfico, también es posible agregar un punto seleccionando la herramienta y haciendo clic en algún lugar de la vista gráfica. El software nos dará las coordenadas del punto ingresado.

Ejemplo 143. **Batalla naval.** La “Batalla naval” es un juego de estrategia que consiste en destruir la flota de nuestro adversario a través de misiles, los cuales serán dirigidos por medio de coordenadas. Cada competidor deberá ubicar en un sistema de ejes una cierta cantidad de naves, las cuales pueden ocupar 2, 3, 4, o 5 casillas, según el tipo de embarcación que sea. Para ello dispondrá de una grilla, de la cual solamente puede usar valores enteros para ambas coordenadas, entre 1 y 12 (este rango es arbitrario, para poner algún límite), y las naves no pueden ubicarse en diagonal ni tocarse dos en el mismo sentido. El objetivo es hundir todas las naves del rival, acertando misiles en cada una de las casillas ocupadas por cada nave. En el siguiente gráfico ubicamos 4 naves para ilustrar la situación.



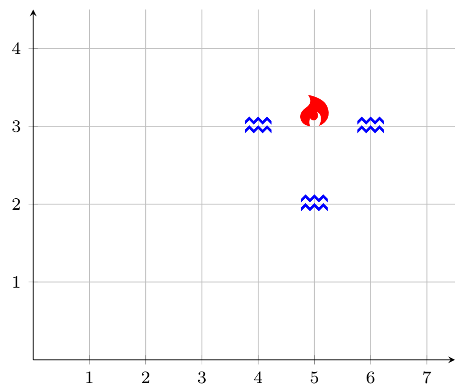
Cuando un misil acierta una nave rival, el participante a cargo de esa flota debe decir "Tocado", y cuando todas las casillas ocupadas por la nave fueron tocadas por un misil, debe decir "Tocado y hundido". Si un misil no impacta en ninguna nave, debe decir "Agua".

Supongamos que se tiene la siguiente situación:

- Un misil lanzando a la posición $(5, 3)$ da como resultado "Tocado".
- Misiles en las posiciones $(6, 3)$, $(4, 3)$ y $(5, 2)$ dan en "Agua".

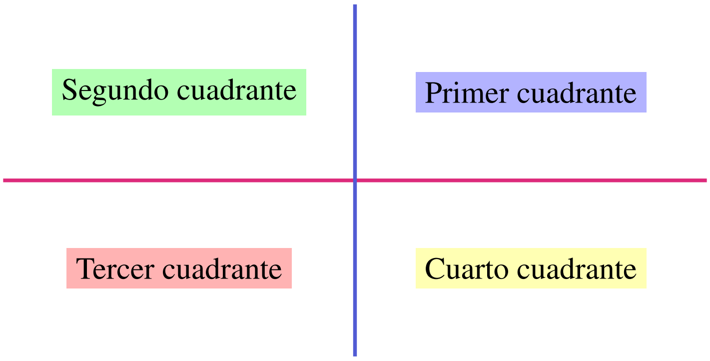
¿Dónde deberá lanzarse el próximo misil para asegurar que se volverá a tocar la nave?

Solución: La situación se ilustra como sigue:



Por lo tanto, para asegurarnos de que el próximo misil toque a la nave, el disparo deberá dirigirse a la posición $(5, 4)$.

Los ejes cartesianos dividen al plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes**, que se numeran en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, como se indica en el siguiente gráfico:



Entonces, el signo que posean las coordenadas de un punto determina la posición en los cuadrantes:

- **Primer cuadrante:** abscisa positiva y ordenada positiva.
- **Segundo cuadrante:** abscisa negativa y ordenada positiva.
- **Tercer cuadrante:** abscisa negativa y ordenada negativa.
- **Cuarto cuadrante:** abscisa positiva y ordenada negativa.
- **Eje horizontal:** ordenada cero, cualquier abscisa.
- **Eje vertical:** abscisa cero, cualquier ordenada.

Si f es una función con dominio es un subconjunto A de los números reales, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de todos los puntos de la forma $(x, f(x))$, para $x \in A$:

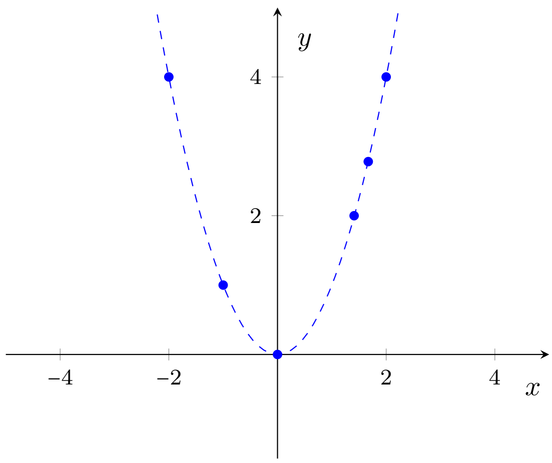
$$\text{gráfica de } f = \{(x, y) : x \in A, y = f(x)\}.$$

Un método para dibujar la gráfica de una función f es representar suficientes puntos de manera que se pueda sospechar cuál es la forma de la gráfica. Entonces se unen los puntos marcados con una línea. En las secciones siguientes veremos que para ciertas funciones podemos identificar la forma de antemano, de acuerdo a la ecuación que la define. En esos casos, esbozar el gráfico de la función es más rápido y sencillo.

Ejemplo 144. Esbozando el gráfico de una función mediante puntos. Retomemos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ dada en el Ejemplo 137. Allí hicimos una tabla con las imágenes correspondientes a algunos valores del dominio. Esto nos generó los siguientes pares ordenados:

$$(-2, 4), \quad (-1, 1), \quad (0, 0), \quad \left(\tfrac{5}{3}, \tfrac{25}{9}\right), \quad (\sqrt{2}, 2), \quad (2, 4), \quad (5, 25).$$

En el gráfico siguiente representamos estos puntos. Si agregamos varios puntos más, podemos esbozar la forma de la gráfica de la función, que corresponde a una *parábola*, la cual marcamos con línea punteada. Las parábolas serán estudiadas en detalle en la Sección 5.5.



«

Hasta ahora vimos cómo representar gráficamente una función, pero es fundamental en este punto comprender la información que nos brinda. Teniendo la gráfica, para conocer el valor de la función en un valor x cualquiera del dominio, es suficiente con “caminar” sobre el eje horizontal hasta llegar a dicho valor, y “mirar” hacia arriba o hacia abajo, hasta encontrar el gráfico de la función (la existencia y unicidad de la imagen asegura que el gráfico se encuentra, y que se encuentra una única vez). La altura a la que se halla el punto que encontramos al “mirar”, corresponde al valor de f en x (será positivo si la gráfica queda hacia arriba del eje horizontal, o negativo si queda hacia abajo).

Ejemplo 145. **Interpretando el gráfico de una función.** Supongamos que el gráfico en la Figura 5.1 representa los registros de la presión arterial (en milímetros de mercurio, denotados como mmHg) de un paciente durante un período de tiempo medido en horas*. En el eje horizontal se representan las horas transcurridas desde su internación, y en el vertical, la presión del paciente en cada instante de tiempo (en mmHg)†. Las mediciones comienzan un lunes a las 7 de la mañana (lo que consideramos como tiempo $t = 0$), momento en el que el paciente queda internado. Observando el gráfico, determinar:

(a) ¿Qué presión tenía el paciente al momento de la internación?

(b) ¿Durante cuánto tiempo se tomaron las mediciones?

(c) ¿Qué presión tenía el paciente el día miércoles a las siete de la mañana? ¿En cuántos momentos tuvo la misma presión?

(d) ¿Cuál fue la presión mínima y cuándo la alcanzó? ¿Y la máxima?

(e) ¿En qué momento la presión fue en aumento? ¿Y en disminución?

(f) ¿En qué momento la presión se mantuvo constante y cuál fue ese valor?

*Datos extraídos de `http://unrn.edu.ar/blogs/RRP-Roca/files/2014/04/TP-Funciones-Interpretacion.pdf`. Consultado en agosto de 2018.

†En el lenguaje coloquial suele utilizarse, por ejemplo, “18” para referirse a una presión de 180 mmHg.

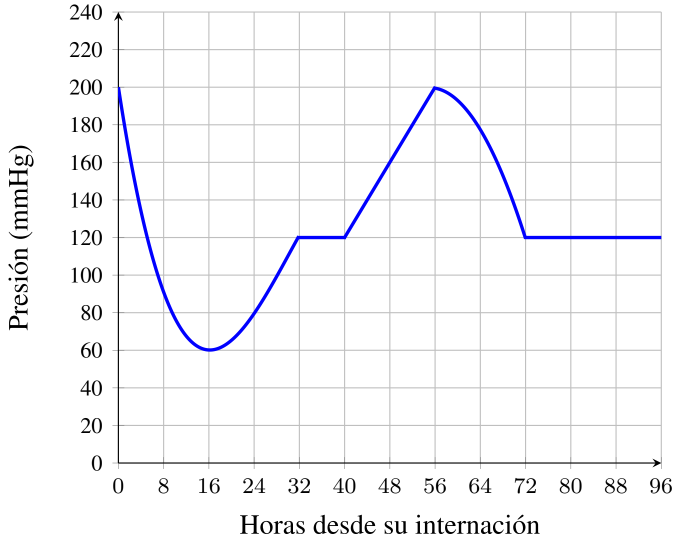


Figura 5.1: Registro de la presión arterial de un paciente.

(g) ¿Cuántos días transcurrieron hasta que el paciente consiguió mantener una presión constante por 24 horas?

Solución:

(a) Al momento de internarse el paciente tenía 200 mmHg de presión arterial.

(b) Las mediciones se tomaron por 96 horas, es decir, durante 4 días.

(c) El día miércoles a las siete de la mañana corresponde a 48 horas luego de la internación. Según el gráfico, la presión era de 160 mmHg. Ese mismo valor lo tuvo además en otros dos momentos (aproximadamente a las 2 horas luego de internarse, y a las 68 horas).

(d) La presión mínima fue de 60 mmHg, y la alcanzó a las 16 horas después de internarse (es decir, el lunes a la hora 23:00). La presión máxima fue de 200 mmHg, y se alcanzó al momento de internarse y a las 56 horas desde el momento de la internación, lo que corresponde al día miércoles a la hora 15:00.

(e) La presión aumentó entre las 16 y 32 horas desde la internación, y también entre las 40 y 56 horas. Esto corresponde al período entre el día lunes a las 23:00 y el día martes a las 15:00, y desde el martes a la hora 23:00 hasta el miércoles a las 15:00. La presión disminuyó durante las primeras 16 horas de internación, y también desde las 56 hasta las 72 horas, lo que se corresponde con el período entre la hora 15:00 del día miércoles, hasta la hora 7:00 del día jueves.

(f) La presión se mantuvo constante en 120 mmHg durante dos momentos: desde las 32 horas de internación hasta las 40 (desde el miércoles a las tres de la tarde hasta las once de la noche), y desde las 72 horas hasta las 96 (desde el jueves a las siete de la mañana hasta el viernes a la misma hora).

(g) El paciente consiguió mantener su presión constante por 24 horas luego de 72 horas desde el día de internación, es decir, luego de 3 días. «

Ejemplo 146. **Interpretando gráficos: Tiro de proyectil.** La gráfica en la Figura 5.2 corresponde a la altura de un objeto en función del tiempo transcurrido, desde el momento de su lanzamiento hasta que llega al suelo. Observando el gráfico, determinar:

(a) ¿Cuánto tiempo demoró el objeto en llegar al suelo?

(b) ¿Cuál fue la altura máxima alcanzada, y en qué momento la alcanzó?

(c) ¿A qué altura se encontraba a los 3 segundos luego de su lanzamiento? ¿Alcanzó esa altura en algún otro momento?

(d) ¿En qué momentos se encontraba a una altura aproximada de 7 metros?

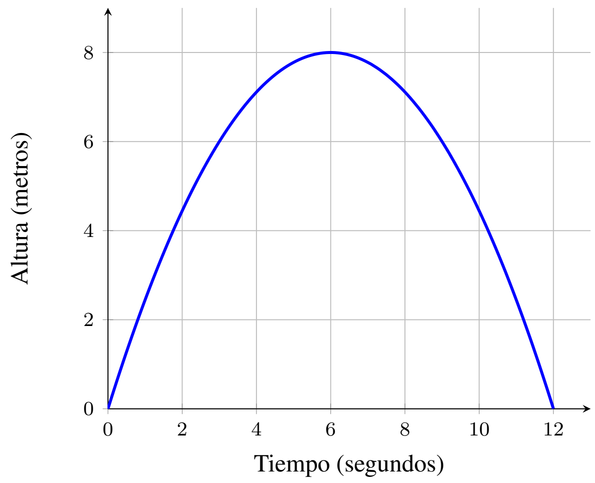


Figura 5.2: Altura del objeto en cada instante.

Solución: Es muy importante observar el gráfico para comprender el por qué de las siguientes respuestas:

(a) Demoró 12 segundos en llegar al suelo.

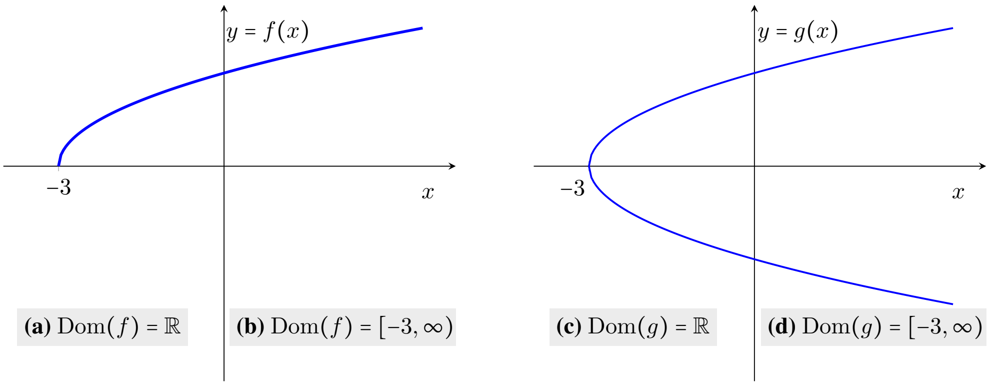
(b) La altura máxima alcanzada fue de 8 metros, a los 6 segundos luego de haber sido lanzado.

(c) A los 3 segundos se encontraba a una altura aproximada de 6 metros, al igual que a los 9 segundos.

(d) El objeto alcanzó una altura de 7 metros a los 4 y 8 segundos posteriores al lanzamiento. «

El gráfico de una curva también nos permite determinar si corresponde o no al gráfico de una función. Como mencionamos, uno debe desplazarse por cada punto del dominio (en el eje horizontal) y "mirar" verticalmente (hacia arriba o abajo) hasta encontrarse con la curva. Esto corresponde a trazar líneas verticales imaginarias en cada punto del dominio, hasta cortar a la curva. Para que sea función, **cada una de estas rectas verticales debe cortar una y solo una vez al gráfico**. Si no lo corta, ese punto no tiene imagen por lo que no cumple con la existencia. Si lo corta más de una vez, no cumple con la unicidad de imagen. Lo ilustramos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 147. Determinando gráficamente si es función. Determinar si los siguientes gráficos corresponden a funciones en cada uno de los dominios dados.



(a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ **(b)** $\mathrm{Dom}(f) = [-3, \infty)$ **(c)** $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$ **(d)** $\mathrm{Dom}(g) = [-3, \infty)$

Solución:

(a) El gráfico de f **no corresponde** al de una función con dominio $\mathbb{R}$, ya que si nos situamos en algún punto a la izquierda de -3, y trazamos una recta vertical, esta no corta a la curva, lo que significa que no existe imagen a través de f para ese punto.

(b) El gráfico de f **corresponde** al de una función con dominio $[-3, \infty)$, porque si nos situamos sobre cualquier punto en el eje x que pertenezca a dicho intervalo, y trazamos una recta vertical, esta cortará al gráfico exactamente una vez. Es decir, cumple con la existencia y unicidad de imagen para cada $x \in [-3, \infty)$.

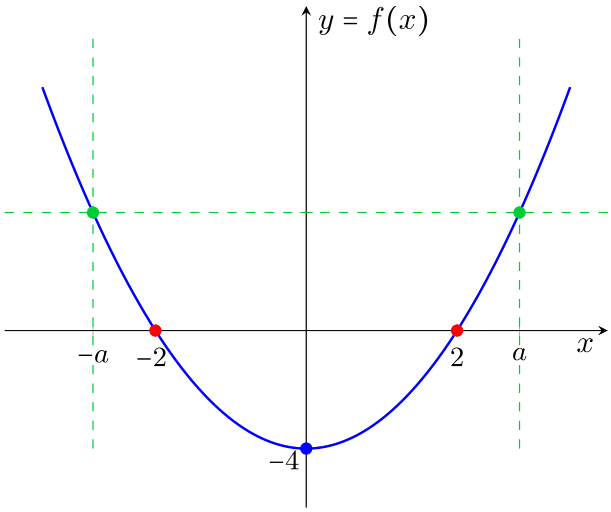
(c) El gráfico de g **no corresponde** al de una función con dominio $\mathbb{R}$, ya que si nos situamos en algún punto a la izquierda de -3 y trazamos una recta vertical, esta no corta a la curva, lo que significa que no existe imagen a través de g para ese punto. Esto ya es suficiente para afirmar que no es la gráfica de una función con dominio $\mathbb{R}$, pero notar que tampoco satisface con la unicidad de imagen para los puntos $x \geq -3$ pues, si nos situamos en uno de estos puntos y trazamos una recta vertical, esta corta al gráfico en dos puntos (arriba y abajo del eje horizontal).

(d) El gráfico de g **no corresponde** al de una función con dominio $[-3, \infty)$, ya que no satisface la unicidad de imagen para los puntos $x \geq -3$: si nos situamos en uno de estos puntos y trazamos una recta vertical, esta corta al gráfico dos veces. «

Finalmente, notar que el gráfico de una función también nos permite detectar la imagen de la misma. Recordemos que la imagen de una función es el conjunto de valores obtenidos al aplicar f a todos los puntos del dominio, es decir, aquellos alcanzados por la función. Para determinarlos, debemos mirar el eje y e identificar qué valores alcanza la función, y cuáles no. Esto corresponde a trazar **rectas horizontales**, y ver cuáles cortan a la gráfica (no importa cuántas veces) y cuales no.

Por ejemplo, para el caso del tiro de proyectil, podemos observar en el gráfico (ver Figura 5.2) que el objeto nunca superó los 8 metros de altura, y tampoco estuvo debajo del nivel del suelo. Esto nos dice que la imagen de la función representada es $[0, 8]$. Para el gráfico de la presión arterial (ver Figura 5.1), se observa que los valores se mantuvieron entre 60 y 200, por lo que la imagen de la función es el conjunto $[60, 200]$.

Ejemplo 148. **Determinando gráficamente la imagen.** Determinar la imagen de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuyo gráfico se incluye a continuación:



Solución: En el gráfico puede verse, por ejemplo, que $f(0) = -4$ (marcamos el punto $(0, f(0))$ con azul). En otras palabras, $-4 \in \mathrm{Img}(f)$ pues es la imagen del cero a través de f. También podemos ver que $f(2) = f(-2) = 0$ (puntos marcados en color rojo), por lo que el cero es imagen tanto de 2 como de -2. De manera general, si nos situamos en cualquier punto sobre el eje y por encima de -4 y trazamos una recta horizontal, vemos que siempre corta al gráfico en dos puntos (representados en color verde), y que si trazamos una recta por debajo de -4, esta no corta a la gráfica. De todo esto, y suponiendo que la gráfica continúa de igual modo hacia arriba, podemos concluir que

$$\operatorname{Img}(f) = [-4, \infty).$$ «

En el ejemplo anterior, los puntos representados en color rojo reciben un nombre especial. Se dice que un valor x^* perteneciente al dominio de una función f es **raíz** de f si

$$f(x^*) = 0.$$

Es decir, se llama raíz de una función f a todo valor del dominio tal que, si le aplicamos f, obtenemos el valor cero como resultado. Gráficamente, esto significa que el punto $(x^*, 0)$ pertenece al gráfico de f, o equivalentemente, la gráfica de f "corta" al eje horizontal en dicho valor. Las raíces de una función también se conocen como **ceros** de dicha función, pues son las soluciones de la ecuación

$$f(x) = 0.$$

Entonces, en el último ejemplo los ceros o las raíces de f son $x = 2$ y $x = -2$.

Ejemplo 149. **Determinando raíces analíticamente.** Hallar las raíces de la función $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

Solución: Observar primero que al ser una función polinómica, el dominio de f es $\mathbb{R}$. Para hallar las raíces debemos resolver la ecuación

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0.$$

Como vimos en el capítulo anterior, la forma de resolver este tipo de ecuaciones es factorizando el polinomio del miembro izquierdo, para aplicar luego la propiedad de producto cero. Para factorizar, notar que $f(1) = 0$, por lo que $x - 1$ es divisor del polinomio (por el teorema del resto). Aplicamos entonces la regla de Ruffini para dividir

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 1 & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

Entonces

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x^2 + 5x + 6).$$

Aplicando la resolvente para $x^2 + 5x + 6$, obtenemos $x_1 = -2$ y $x_2 = -3$. Así,

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+3),$$

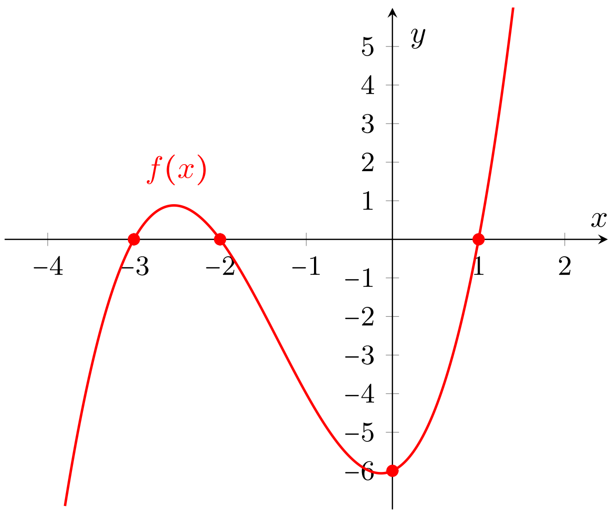
por lo que el conjunto de raíces de f es $\{1, -2, -3\}$. «

Ejemplo 150. **Esbozando el gráfico de funciones polinómicas.** Utilizar una tabla de signos para esbozar el gráfico de la función del ejemplo anterior.

Solución: Vimos que las raíces de f son $x = -3$, $x = -2$ y $x = 1$, lo que divide la recta numérica en 4 intervalos. La tabla correspondiente es:

Factor \ Intervalo	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, \infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x + 3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)(x+2)(x+3)$	$-$	$+$	$-$	$+$

La tabla anterior nos da una idea del comportamiento de la gráfica de f: sabemos que se encuentra sobre el eje x en los intervalos $(-3, -2)$ y $(1, \infty)$ (pues $f(x) > 0$ para los x allí), y que está por debajo de dicho eje cuando x pertenece a alguno de los dos intervalos restantes $(-\infty, -3)$ o $(-2, 1)$. También sabemos, porque calculamos las raíces de f, que la gráfica pasa por lo puntos $(-3, 0)$, $(-2, 0)$ y $(1, 0)$. Toda esta información, más algún punto adicional que podemos marcar, nos da una idea de cómo será el gráfico de f. Un punto adicional que se suele graficar es el $(0, f(0))$, que corresponde a la intersección de la gráfica con el eje vertical y (pues $x = 0$). En este caso, este punto es $(0, -6)$. Uniendo estos 4 puntos mediante una curva continua que esté por encima y por debajo del eje x en los intervalos indicados, se obtiene un bosquejo aproximado de la gráfica de f. Este procedimiento no vale para cualquier tipo de función, pero sí para las polinómicas. A continuación ilustramos la gráfica exacta, que puede obtenerse ingresando la función en el campo de entradas de GeoGebra.



Con la gráfica de una función en GeoGebra, los puntos de corte con los ejes pueden encontrarse mediante el comando Interseca, el cual tiene también su ícono gráfico, ya que es una de las herramientas frecuentes. Una vez elegida la herramienta, bastará con cliquear sobre la gráfica de la función y sobre uno de los ejes para obtener los puntos de intersección. Si el eje elegido es el horizontal, tenemos así otra forma de obtener las raíces de la función.

Ejemplo 151. Determinar el dominio y los ceros de la función

$$g(x) = \sqrt{x-1}\,\log_3(x+5).$$

Solución: Comencemos determinando el dominio. Para que la raíz esté definida en los reales, el radicando no debe ser negativo. Además, el logaritmo solamente existe para números positivos, lo que nos da las condiciones

$$x - 1 \geq 0 \quad \text{y} \quad x + 5 > 0.$$

La intersección de los conjuntos solución de estas inecuaciones es $[1, \infty)$. Luego, $\mathrm{Dom}(g) = [1, \infty)$. Para hallar las raíces, debemos resolver la ecuación

$$\sqrt{x-1}\,\log_3(x+5) = 0.$$

Por la propiedad del producto cero, esto es equivalente a

$$\sqrt{x-1} = 0 \quad \text{o} \quad \log_3(x+5) = 0.$$

Resolvamos estas ecuaciones:

$$\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

y por definición de logaritmo tenemos

$$\log_3(x+5) = 0 \Leftrightarrow 3^0 = x + 5 \Leftrightarrow 1 = x + 5 \Leftrightarrow x = -4.$$

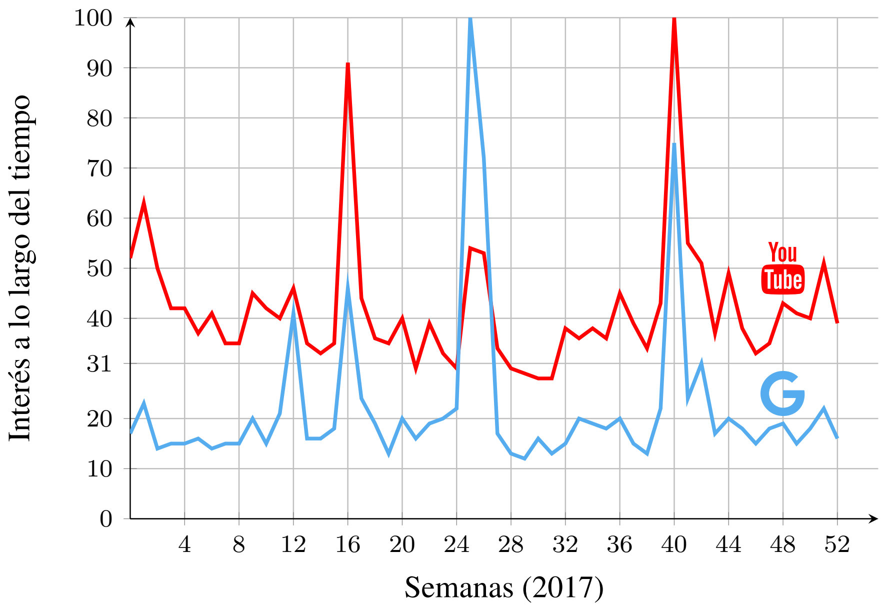
Este último valor no pertenece al dominio de g, por lo que se descarta como raíz. Luego, la única raíz de g es $x = 1$. «

Ejemplo 152. Google Trends y algo de fútbol. La herramienta Google Trends permite obtener la tendencia de búsquedas realizadas de un tema o palabra clave, en una región geográfica específica y en un determinado período de tiempo, elegido a partir del año 2004. Google Trends **no** indica el número de visitas. Los números reflejan el interés de búsqueda, con valores relativos basados en una escala de 0 a 100, donde 100 representa el punto más alto en niveles de búsquedas realizadas. Eso quiere decir que 100 es el valor máximo de interés de búsqueda para el tiempo y el lugar seleccionados, e indica la popularidad máxima de un término, mientras que 50 indica que un término es la mitad de popular en relación con el valor máximo.

Por ejemplo, si en un determinado día y lugar la palabra más buscada tuvo 40000 búsquedas en Google, y nuestra palabra clave tiene un nivel de interés igual a 50, significa que fue buscada unas 20000 veces en ese mismo día y lugar. Si tiene un nivel de 30, fue buscada 12000 veces. Es decir, la función nos brinda un porcentaje de búsqueda con respecto a la palabra más buscada, en el mismo tiempo y lugar.

Los datos de Google Trends se obtienen de las búsquedas en la web mediante Google, pero también permite elegir si las mismas se realizaron en YouTube.

Como ejemplo, veamos el resultado que arroja Google Trends si ponemos como término de búsqueda "Lionel Messi", eligiendo Argentina como región geográfica, y el año 2017 como período de tiempo. Incluimos a continuación, en un mismo gráfico, los resultados para la búsqueda en la web y en YouTube.



Teniendo en cuenta el gráfico anterior, resolver lo siguiente:

(a) ¿En qué semana de 2017 fue "Lionel Messi" uno de los términos más buscados en Google en Argentina?

(b) ¿En qué semana de 2017 fue "Lionel Messi" uno de los términos más buscados en Youtube en Argentina?

(c) En la semana 16, ¿fue más popular en Google o en YouTube?

(d) Durante la semana 12 de 2017 ocurrió el partido en el cual Lionel Messi fue suspendido por cuatro partidos por la FIFA, lo que le impidió jugar con la selección Argentina hasta la última fecha de las eliminatorias, frente a

Ecuador en Quito. ¿Qué nivel de popularidad tuvo este suceso en Argentina, tanto en Google como en YouTube?

(e) Supongamos, solamente para hacer cálculos, que en la semana 20 lo más popular en Google tuvo 600000 búsquedas en Argentina, mientras que lo más popular en YouTube tuvo 800000. Determinar en número de búsquedas para "Lionel Messi" en ambos sitios para esa semana en Argentina.

Solución:

(a) "Lionel Messi" fue uno de los términos más buscados en Google en Argentina en la semana 25 de 2017 (correspondiente a la fecha de su casamiento).

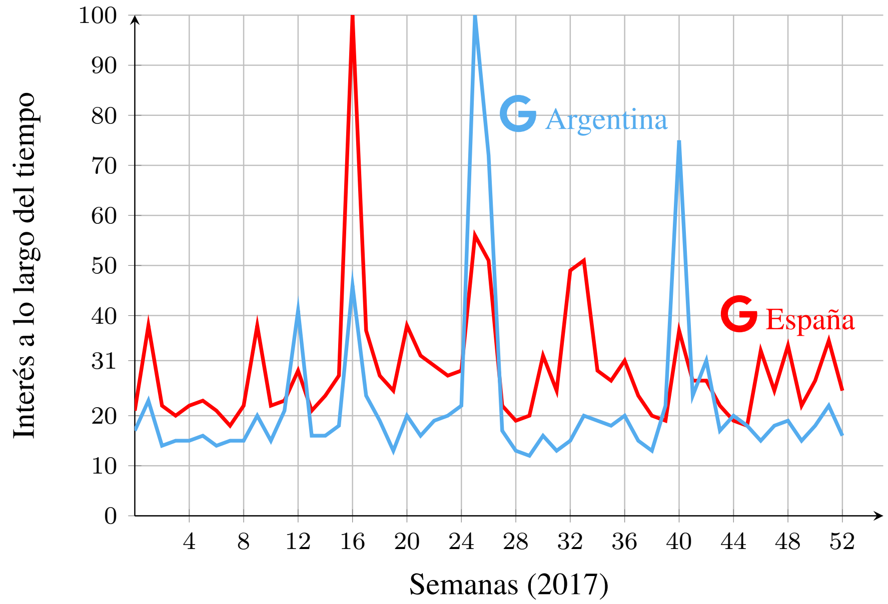
(b) En el caso de YouTube, fue uno de los términos más buscados en Argentina en la semana 40 (cuando Messi convirtió tres goles en Quito ante Ecuador, y le dio la clasificación a la Copa Mundial de la FIFA Rusia 2018 a la Selección Argentina).

(c) En la semana 16 la búsqueda "Lionel Messi" fue más popular en YouTube (esta fecha corresponde a cuando el Barcelona F.C. gana el clásico ante el Real Madrid C. F. en el Estadio Santiago Bernabéu, con dos goles de Messi. El segundo gol ocurrió en la última jugada del partido, llegando así a los 500 goles con la camiseta del Barcelona F. C.).

(d) El nivel de popularidad en ambos sitios estuvo cerca de 45.

(e) En la semana 20, "Lionel Messi" obtuvo 120000 búsquedas en Google y 320000 en YouTube.

Comparemos ahora la popularidad de Messi en Google durante el mismo período de tiempo, en Argentina y en España. Según Google Trends, la tendencia fue la que se ilustra a continuación.



Observando el gráfico podemos determinar cuán populares fueron en Google ciertos momentos de la vida del jugador argentino, en relación a otros hechos ocurridos en sendos países en el mismo momento. Por ejemplo, el clásico Real Madrid vs. Barcelona (semana 16) fue completamente popular en España, mientras que en Argentina solamente llegó a la mitad de ese nivel (aunque vimos antes que fue lo más popular en YouTube en Argentina). También podemos decir que el casamiento y la clasificación a la Copa de Mundo tuvieron la mitad de popularidad relativa en España respecto a la que tuvieron en Argentina. «

Ejercicios 5.1

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2x^3 + x + 5$. Hallar la imagen a través de f de $x = 2$, $x = 0$ y $x = -1$.

2. Sea $g(x) = \sqrt{3x - 6}$. Hallar el dominio de g. Luego, escoger un valor c en dicho dominio y calcular $g(c)$.

3. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

(a) $\frac{x+3}{x^2-16x+64}$

(b) $\frac{\sqrt{-2x+8}}{x^3+x^2}$

(c) $\frac{1}{\log(x^2+10x+25)}$

(d) $\frac{\sqrt{x^2+6x+5}}{\log(x+1)}$

4. Ubicar los siguientes puntos en un mismo sistema de ejes coordenados:

(a) $P_1 = (-2, 4)$ **(b)** $P_2 = (0, -1)$ **(c)** $P_3 = (-3, -3)$ **(d)** $P_4 = (1, 2)$ **(e)** $P_5 = (2, -3)$ **(f)** $P_6 = (3, 0)$

5. Sea a un número real positivo. Determinar a qué cuadrante pertenecen los siguientes puntos:

(a) $P = (-a, 2a)$

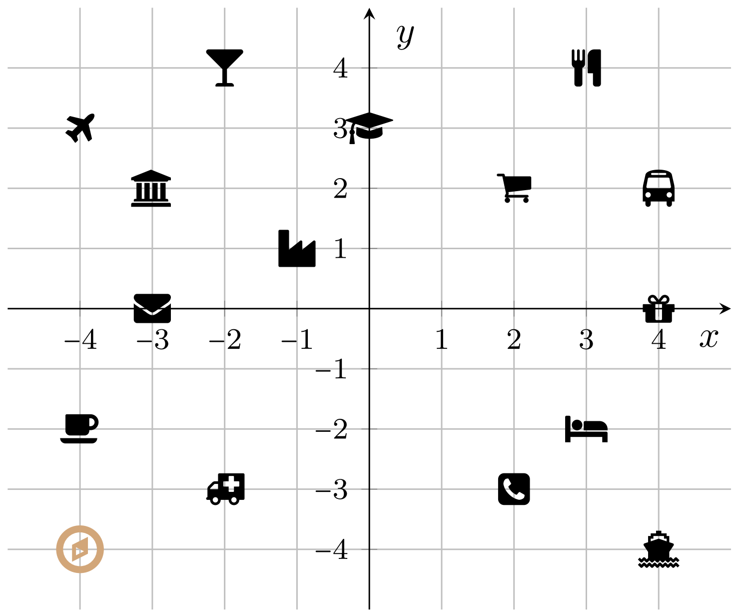
(b) $Q = (a, 4)$

(c) $R = (1, -a)$

(d) $S = (-\sqrt{a}, -2)$

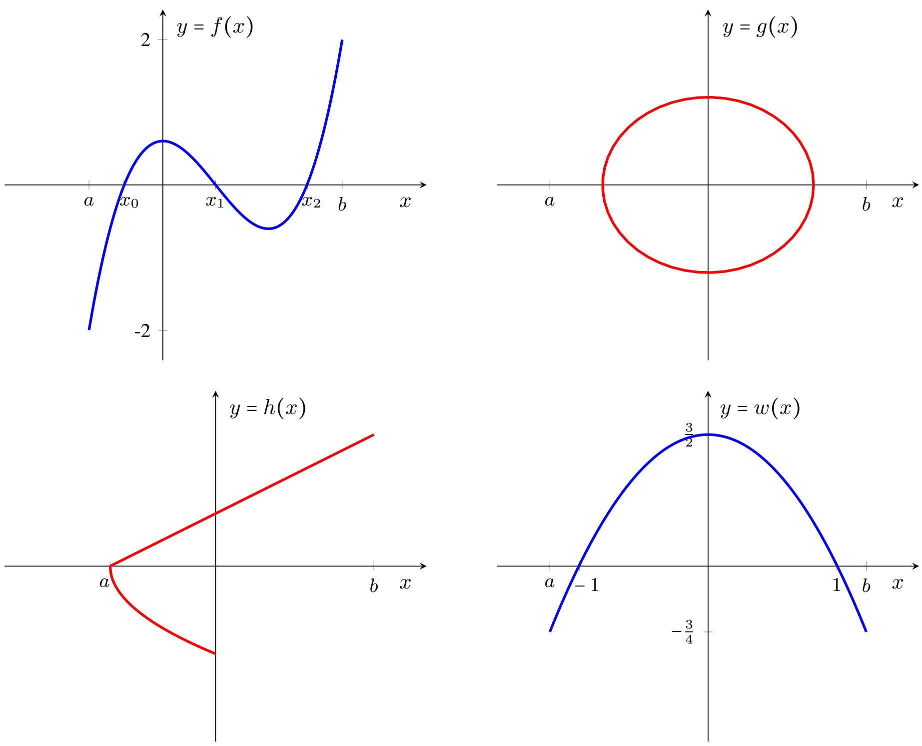
6. Observando los dibujos en el siguiente plano, indicar las coordenadas de cada sitio, suponiendo que estas son siempre números enteros:

Universidad =	Hospital =	Fábrica =
Shopping =	Cafetería =	Banco =
Bar de tragos =	Autobús =	Puerto =
Supermercado =	Telefónica =	Hotel =
Comedor =	Aeropuerto =	Correo =



7. Sea $f(x) = -x^2 + 3$. Representar en un mismo gráfico los puntos $(x, f(x))$, para $x = 1$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$, $x = \sqrt{2}$ y $x = \sqrt{3}$. Unir dichos puntos con línea punteada para ver el aspecto de la gráfica de f.

8. Determinar si los gráficos en la figura siguiente corresponden o no a funciones con dominio $[a, b]$. En caso de no serlo, indicar qué condiciones no se cumplen. En caso de serlo, determinar su imagen y sus raíces, si las tiene.



9. Hallar analíticamente las raíces de las siguientes funciones (recordar que deben pertenecer al dominio).

(a) $f(x) = x^2 + x - 30$

(b) $g(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

(c) $q(x) = \sqrt[3]{x^2 - 25}$

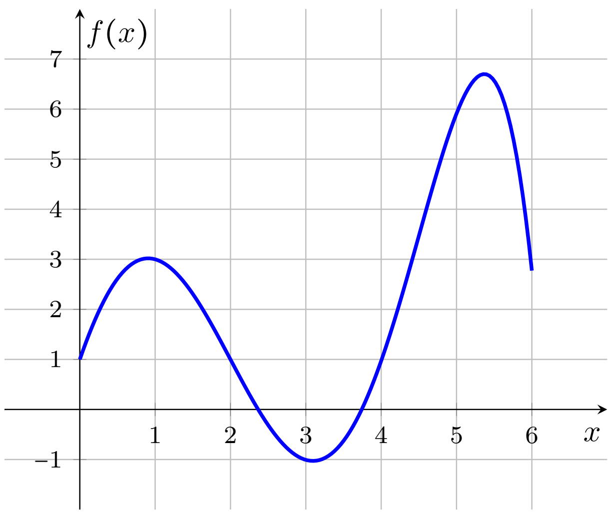
(d) $p(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

(e) $h(x) = \frac{\log(x^2-3)}{x+2}$

(f) $w(x) = \frac{(x-1)\sqrt{3x^2-27}}{x+3}$

10. Representar en GeoGebra las funciones del ejercicio anterior, y hallar la intersección de cada una con el eje x para comparar con lo obtenido.

11. La representación gráfica de una función $f : [0,6] \to \mathbb{R}$ es la siguiente:



A partir de ella, resolver las siguientes consignas:

(a) ¿Cuál es la imagen de $x = 1$ a través de f?

(b) Determinar $f(5)$.

(c) Hallar un valor de x tal que $f(x) < 0$.

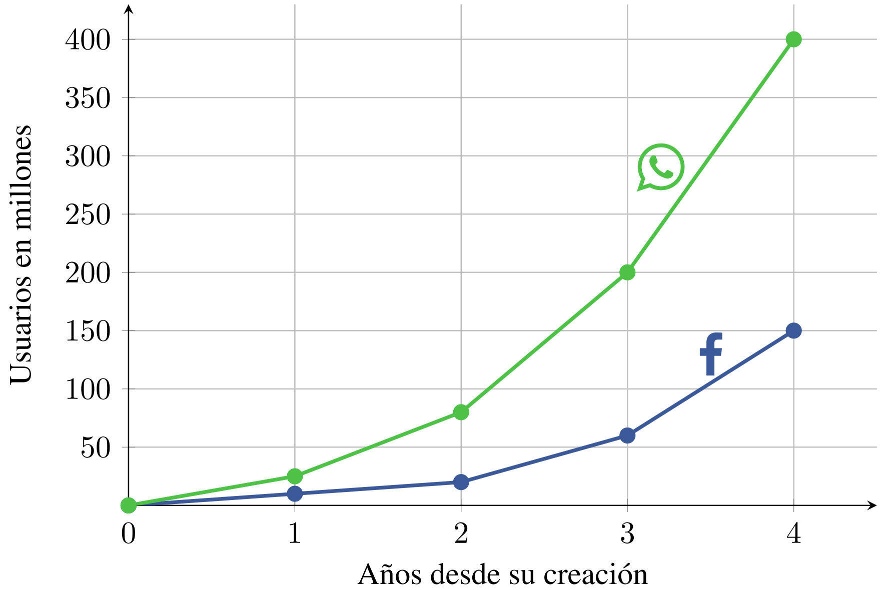
(d) ¿Para qué valores de x se tiene $f(x) = 1$?

(e) ¿Cuántas raíces tiene f?

(f) ¿Cuántos valores de x satisfacen $f(x) = 5$?

(g) Determinar si $y = 7$ pertenece a la imagen de f.

12. El siguiente gráfico muestra el crecimiento en la cantidad de usuarios de Facebook y WhatsApp durante los primeros años desde su creación*.



Teniendo en cuenta que el lanzamiento de WhatsApp fue en 2009, y el de Facebook en 2004, responder las siguientes preguntas de acuerdo a lo que indica el gráfico:

(a) Indicar a qué años corresponde la información dada en el gráfico para cada una de las compañías.

(b) Determinar la cantidad aproximada de usuarios de WhatsApp en 2012 y 2013.

(c) Determinar la cantidad aproximada de usuarios de Facebook en 2007 y 2008.

(d) ¿En qué año WhatsApp alcanzó los 200 millones de usuarios?

(e) Determinar, para cada compañía, el incremento aproximado de usuarios producido desde el segundo hasta el tercer año, a partir de su creación.

13. El gráfico en la Figura 5.3 ilustra la cantidad de usuarios activos en diferentes redes sociales y servicios de mensajería, desde 2013 hasta 2017. A partir de esta información, responder lo siguiente:

(a) Indicar la cantidad aproximada de usuarios activos en cada red social o aplicación al finalizar el año 2017.

(b) Determinar la cantidad aproximada de usuarios que poseía WhatsApp al momento de ser comprada por Facebook, en febrero de 2014. ¿Cuánto tiempo pasa hasta que esta cantidad se duplica?

*Todos los datos son ilustrativos, y pueden no ser completamente exactos.

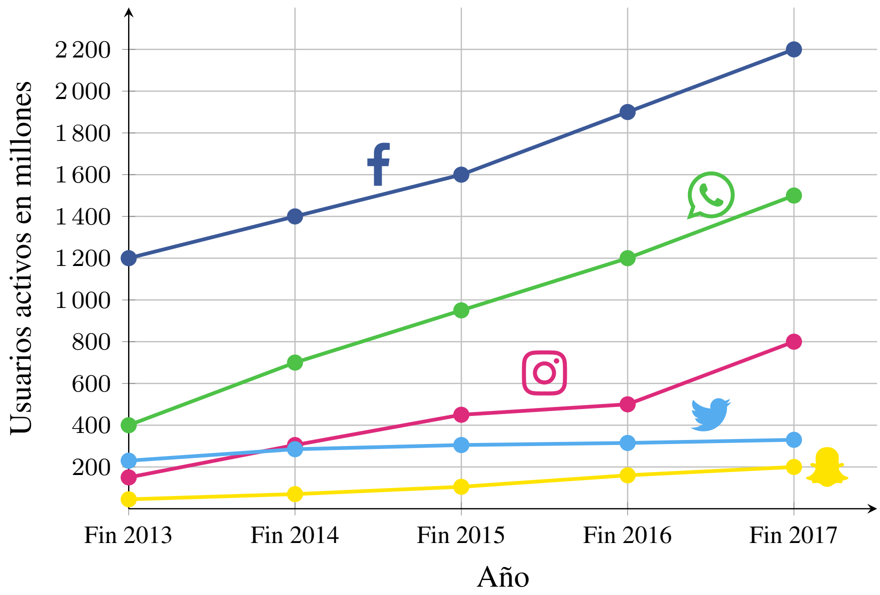


Figura 5.3: Usuarios activos.

(c) ¿Cuándo alcanza Facebook los 1400 millones de usuarios? En ese momento, ¿qué aplicación o red social tiene casi la mitad de usuarios que Facebook? ¿Cuáles tienen casi la cuarta parte?

(d) Indicar el momento aproximado en que la cantidad de usuarios de Instagram comienza a superar a la de Twitter, y cuál es esa cantidad.

(e) ¿Qué redes o aplicaciones no alcanzaron los 800 millones de usuarios en el período informado? ¿Cuáles superaron los 1000 millones?

(f) Hay dos redes o aplicaciones que sextuplican en algún momento la cantidad de usuarios que tiene Snapchat al finalizar 2017. Indicar cuáles son y cuándo alcanzan dicha cantidad.

14. Se cuenta con la siguiente información sobre Instagram:

Se crea Instagram en octubre de 2010.

En 2011 añade hashtags, filtros y efectos, para aumentar los “Me gusta”.

El 3 de abril de 2012 se lanza la versión para Android.

El 9 de abril de 2012 es adquirido por Facebook.

A partir de agosto de 2012 permite etiquetar lugares.

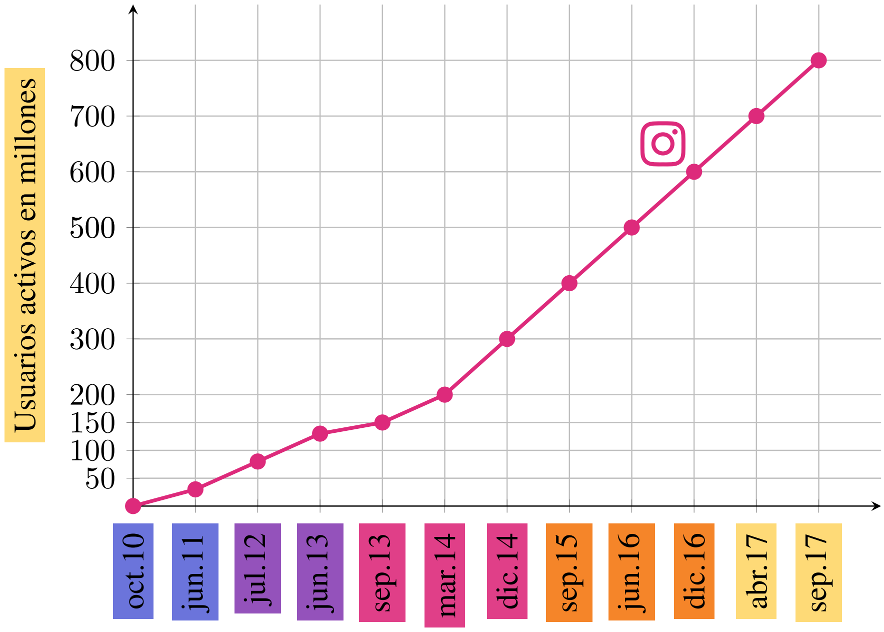
Desde mayo de 2013 permite etiquetar a personas.

En junio de 2013 incorpora videos.

En diciembre de 2013 añade Instagram Direct, para mensajes privados.

En agosto de 2016 llegan las Instagram Stories (historias).

Además, el gráfico siguiente contiene información sobre la cantidad de usuarios activos en Instagram desde su creación hasta el año 2017.



Teniendo en cuenta el gráfico y la información dada, resolver las siguientes consignas:

(a) Cuando es comprado por Facebook, ¿cuántos usuarios activos tenía aproximadamente Instagram?

(b) Indicar la cantidad aproximada de usuarios activos que tenía Instagram al momento de incorporar los videos.

(c) ¿Cuántos usuarios activos había en septiembre de 2013?

(d) Determinar la cantidad de usuarios que había a los 3 meses de haberse incorporado los mensajes privados.

(e) ¿Cuántos usuarios activos había al finalizar el año en el que Instagram introduce las historias?

(f) Indicar el momento en el que se llegó al medio millón de usuarios.

(g) En los dos últimos años contemplados en el gráfico, ¿qué cantidad de usuarios activos se agregó?

15. Mediante el uso de una tabla de signos como en el Ejemplo 150, esbozar la gráfica de las siguientes funciones polinómicas.

(a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 3x + 4$

(b) $g(x) = x^3 - 7x + 6$

(c) $h(x) = x^3 + 2x^2 - 33x - 90$

16. Graficar en GeoGebra las funciones del ejercicio anterior para comprobar los resultados obtenidos.

5.2. Función afín

En esta sección nos ocuparemos de estudiar el comportamiento de la denominada **función afín***, que es una de la forma

$$f(x) = ax + b,$$

siendo a y b números reales. Si $a \neq 0$ entonces es una función polinómica de grado 1, y si además se tiene $b = 0$, la función $f(x) = ax$ es conocida como **lineal**. Cuando $a = 0$, la función $y = b$ es llamada también **función constante**.

Vimos en la sección anterior que el dominio de cualquier función polinómica es el conjunto de todos los números reales. En particular, lo mismo vale para las funciones afines. Luego, si no se indica lo contrario, la convención sobre dominios indica que $\mathbb{R}$ es el dominio de las mismas.

Ejemplo 153. Las siguientes son funciones afines:

$$y = 2x - 5, \qquad y = -x + 2, \qquad y = \tfrac{1}{2}x, \qquad y = -\pi x + 1, \qquad y = 3 + x.$$ «

Ejemplo 154. **Esbozando el gráfico de funciones afines.** Analizaremos las gráficas de las funciones dadas por

$$y = 2x - 1, \qquad y = 2, \qquad y = -x + 1.$$

Haremos tablas de valores para detectar la "forma" de las mismas.

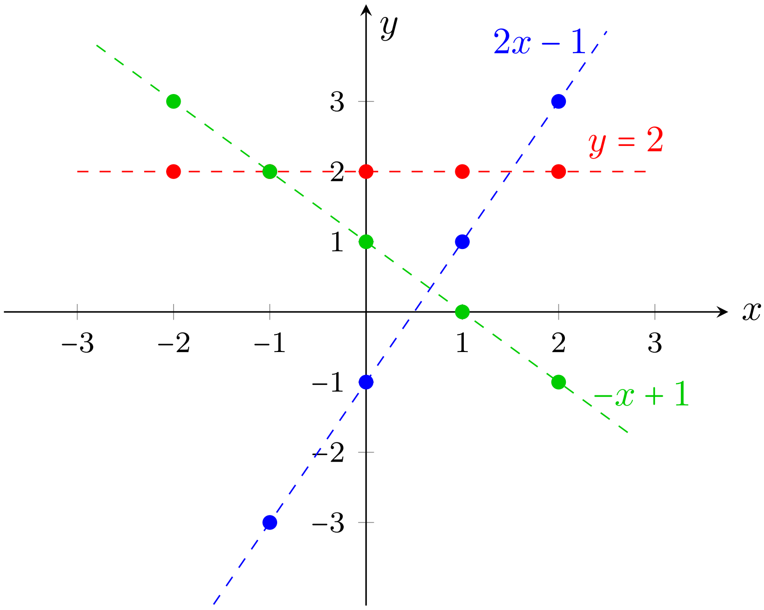
x	$y = 2x - 1$
-2	$2 \cdot (-2) - 1 = -5$
-1	$2 \cdot (-1) - 1 = -3$
0	$2 \cdot 0 - 1 = -1$
1	$2 \cdot 1 - 1 = 1$
2	$2 \cdot 2 - 1 = 3$

x	$y = 2$
-2	2
-1	2
0	2
1	2
2	2

x	$y = -x + 1$
-2	$-(-2) + 1 = 3$
-1	$-(-1) + 1 = 2$
0	$-0 + 1 = 1$
1	$-1 + 1 = 0$
2	$-2 + 1 = -1$

En la figura siguiente representamos algunos de los puntos obtenidos (con el color indicado en cada tabla), y los unimos mediante una línea para ver el aspecto de la gráfica de cada función.

*Esta clase de funciones es conocida también como **función lineal**. Sin embargo, en matemática "ser lineal" significa satisfacer una propiedad, que no enunciaremos aquí, pero que las únicas funciones afines que la cumplen son aquellas con $b = 0$, es decir, las de la forma $f(x) = ax$.



Como en el ejemplo anterior, la gráfica de una función afín es siempre una **recta**. Puesto que una recta queda completamente determinada al trazar dos puntos que pertenezcan a ella, dada una función afín será suficiente con conocer la imagen de dos valores para obtener su gráfica. Por simplicidad se suele tomar $x = 0$ como uno de esos valores, lo que produce el punto de coordenadas

$$P = (0, b),$$

y corresponde al punto sobre el eje y por el que pasa la recta. Otro punto que podemos marcar, si $a \neq 0$, es la intersección de la recta con el eje x, es decir, la raíz de la función. Notar que

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

En otras palabras, la gráfica interseca al eje horizontal cuando $x = -\frac{b}{a}$, que es la única raíz de f. Entonces, otro punto que pertenece a la recta es el de coordenadas

$$Q = \left(-\frac{b}{a}, 0\right).$$

Como mencionamos al comienzo, si $a = 0$ entonces la función tiene la forma $y = b$. Vimos en el ejemplo anterior que en tal caso el gráfico es una recta horizontal trazada a la altura b del eje y. Entonces, esta recta no interseca al eje x (es decir, la función no tiene raíces), salvo la gráfica de la función $y = 0$ que coincide con el eje horizontal.

Notar que si la función afín es lineal, es decir, de la forma $y = ax$, entonces $b = 0$ y los dos puntos definidos arriba son $P = (0,0) = Q$. Entonces será necesario ubicar otro punto perteneciente a la recta además del origen, como por ejemplo $(1,a)$ o cualquiera de la forma $(x, f(x))$.

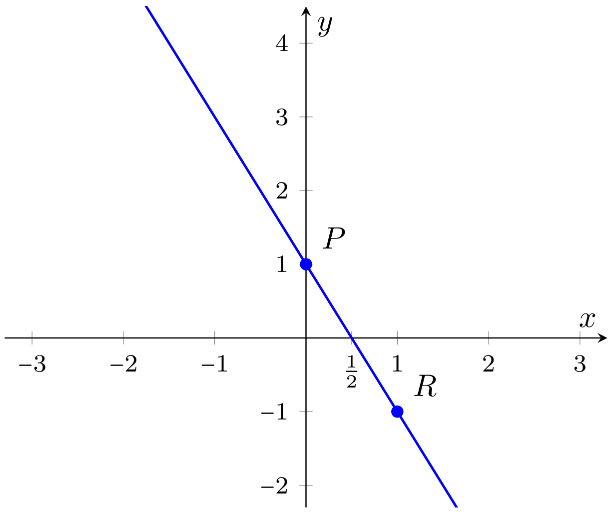
Resumiendo, para representar gráficamente una función afín, ubicamos los puntos P y Q, o cualesquiera otros dos de la forma $(x, f(x))$, en un sistema de ejes cartesianos, y luego trazamos la recta que pasa por ellos.

Ejemplo 155. **Graficando una función afín.** Representar gráficamente la recta de ecuación $y = -2x + 1$.

Solución: Graficaremos los puntos

$$P = (0, f(0)) = (0,1) \quad \text{y} \quad R = (1, f(1)) = (1,-1),$$

y luego la recta que pasa por ellos. Esta recta debe cortar al eje x en el punto $Q = \left(-\frac{b}{a}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.



«

En lo anterior hemos utilizado varias veces la expresión “un punto que pertenezca a la recta” correspondiente al gráfico de $f(x) = ax + b$. Esto significa que las coordenadas del punto son de la forma $(x, f(x))$. En otras palabras, la coordenada y del punto no es cualquier valor, sino que dado un valor para x, esta debe satisfacer $y = ax + b$. Así, dada la ecuación de la recta, hallamos puntos sobre ella dando diferentes valores a x, y calculando el correspondiente valor de y. Esto también nos permite hacer el proceso inverso, es decir, dado un punto, podemos determinar si está o no sobre la recta, simplemente verificando si sus coordenadas **satisfacen la ecuación** que define la recta. Esto se verá más claro en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 156. **Determinando si un punto pertenece o no a la recta.** Determinar si los puntos $P = (2,4)$ y $Q = (1,5)$ pertenecen o no al gráfico de $y = 3x - 2$.

Solución: Para determinar si un punto pertenece a la recta, debemos ver si sus coordenadas x e y satisfacen la relación $y = 3x - 2$. Para el punto P tenemos $x = 2$ e $y = 4$. Puesto que

$$3 \cdot 2 - 2 = 6 - 2 = 4, \quad ✓$$

se sigue que P es un punto sobre la recta dada. En el caso de Q tenemos $x = 1$ e $y = 5$, pero

$$3 \cdot 1 - 2 = 1 \neq 5, \quad ✗$$

por lo que Q no pertenece a la recta dada. «

Ubicar puntos de una recta no es la única forma de conocer el aspecto de la misma. También podemos esbozar su gráfica según los valores que tomen a y b. Como vimos antes, el valor de b corresponde a la "altura" a la que la recta atraviesa al eje y. Luego,

$b < 0$	$b = 0$	$b > 0$
Pasa por debajo del origen	Pasa por el origen	Pasa por encima del origen

Para ilustrar lo anterior graficaremos, en un mismo sistema de ejes, rectas de la forma $y = x + b$, para diferentes valores de b.

Ejemplo 157. **El efecto de b.** Graficar las funciones afines

$$y = x, \quad y = x + 2, \quad y = x - 3.$$

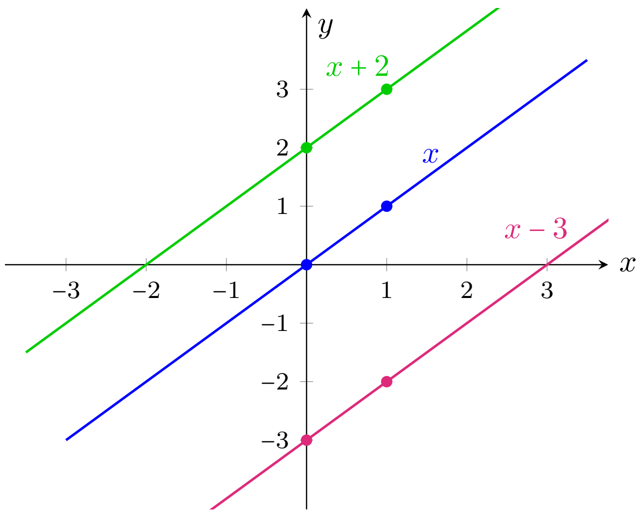
Solución: Para graficar cada recta, aplicaremos el método de ubicar dos puntos pertenecientes a ella, y luego trazaremos la recta que los une. Sabemos que cada una pasa por el punto $(0, b)$, para el valor de b correspondiente en cada caso:

$$b = 0, \quad b = 2 \quad \text{y} \quad b = -3.$$

Necesitamos ubicar otro punto perteneciente a cada una de ellas. Por simplicidad, ubicaremos el punto correspondiente a $x = 1$ para cada una, es decir, el punto $(1, 1 + b)$:

$$\begin{array}{rll} y = x & \text{pasa por el punto} & (1,1) \\ y = x + 2 & \text{pasa por el punto} & (1,3) \\ y = x - 3 & \text{pasa por el punto} & (1,-2) \end{array}$$

En el gráfico siguiente dibujamos las rectas que pasan por los puntos $(0, b)$ y $(1, 1 + b)$, para el valor de b correspondiente en cada caso.



«

Si observamos la recta correspondiente a $y = x$, graficada en color azul en el ejemplo anterior, vemos que a cada número del eje de abscisas le corresponde el mismo número en el eje de ordenadas, es decir, que las dos coordenadas de cada punto son idénticas (la recta pasa por el punto $(1, 1)$, el $(5, 5)$, el $(-3, -3)$, y así). Esto conduce a llamarla de la siguiente forma:

La función $y = x$ se conoce como **función identidad**.

Ahora, para analizar el efecto que produce el número a, graficaremos en un mismo sistema de ejes a rectas de la forma $y = ax$, para diferentes valores de a.

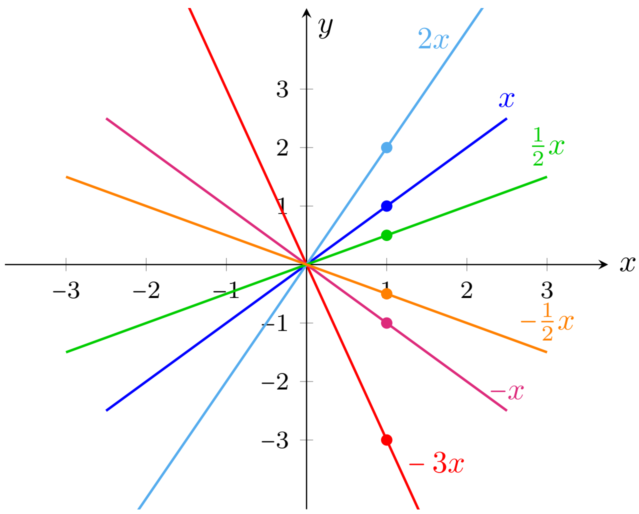
Ejemplo 158. **El efecto de a.** Graficar las funciones lineales

$$y = -\tfrac{1}{2}x, \quad y = -3x, \quad y = -x, \quad y = x, \quad y = 2x, \quad y = \tfrac{1}{2}x.$$

Solución: Aplicaremos como antes el método de ubicar dos puntos pertenecientes a cada una, y luego trazaremos la recta que los une. Ya que para cada una se tiene $b = 0$, estas rectas pasan todas por el punto $(0, 0)$. Necesitaremos ubicar un punto más, perteneciente a cada una de ellas. Por simplicidad, ubicaremos como antes el punto correspondiente a $x = 1$, es decir, el punto $(1, a)$, con a el respectivo en cada caso:

$$
\begin{array}{rll}
y = -\frac{1}{2}x & \text{pasa por el punto} & (1, -\frac{1}{2}) \\
y = -3x & \text{pasa por el punto} & (1, -3) \\
y = -x & \text{pasa por el punto} & (1, -1) \\
y = x & \text{pasa por el punto} & (1, 1) \\
y = 2x & \text{pasa por el punto} & (1, 2) \\
y = \frac{1}{2}x & \text{pasa por el punto} & (1, \frac{1}{2})
\end{array}
$$

En el siguiente gráfico dibujamos las rectas que pasan por cada uno de los puntos anteriores y por el origen.



«

Del ejemplo podemos establecer el efecto que produce el parámetro a en la recta resultante: el signo nos dice si, al mirarla de izquierda a derecha, "sube" (cuando a es positivo) o "baja" (cuando a es negativo). Además, mientras mayor sea su valor absoluto, más empinada será la recta, ya sea en subida o en bajada. Resumimos esto en la Figura 5.4.

Dada una función $f(x) = ax + b$, el número a (es decir, el coeficiente lineal en la expresión polinómica) es llamado **pendiente** de la recta, ya que, como vimos, determina por completo la inclinación de la misma con respecto a los ejes coordenados. El número b (término independiente) es llamado **ordenada al origen**, ya que indica el valor de la ordenada cuando la abscisa toma el valor cero.

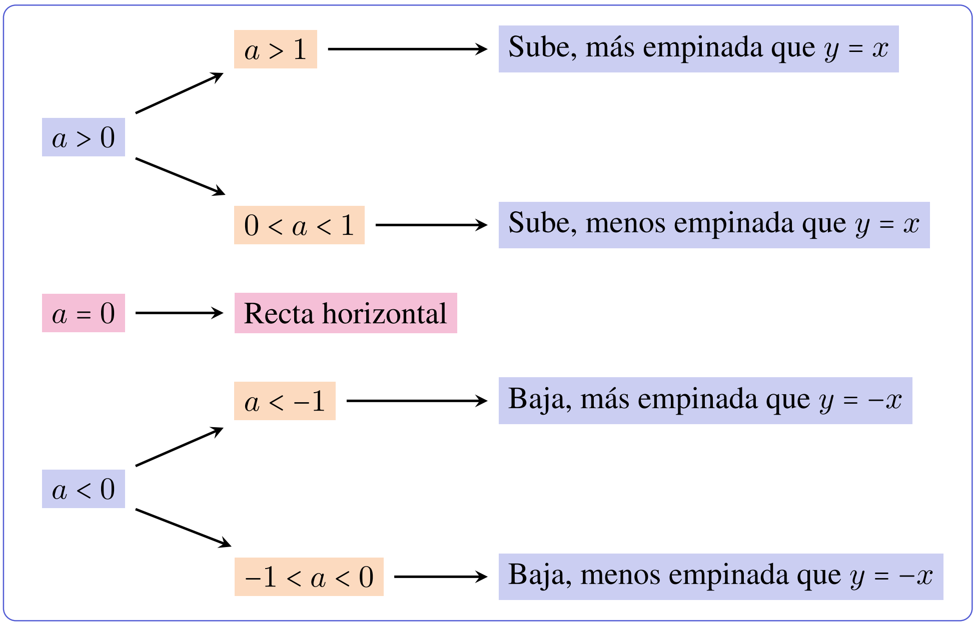


Figura 5.4: El efecto de a.

Para visualizar dinámicamente el efecto de a y b, se propone la siguiente actividad en GeoGebra:

- Con la herramienta a=2 crear un **deslizador** para el número a, el cual permite variar el valor de a en un rango establecido (dejaremos el que viene dado por defecto, que es $-5 \le a \le 5$). Hacer lo mismo para b.
- Ingresar en el campo de entradas y=ax+b.
- Variar los valores de a y de b mediante los deslizadores, para observar el efecto producido en la recta.

Dos rectas son **paralelas** si tienen la misma inclinación. Puesto que, para rectas no verticales, la inclinación está dada por la pendiente, tenemos que:

> Dos rectas no verticales son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente.

Ejemplo 159. **Rectas paralelas.** Hallar una recta paralela a la gráfica de la función $f(x) = 3x + 5$, cuya ordenada al origen sea -4.

Solución: Una recta (no vertical) queda determinada conociendo su pendiente a y su ordenada al origen b. Estos dos datos fueron dados en la consigna, ya que pedir que sea paralela a la mencionada, implica que deben tener la misma pendiente $a = 3$. Además se pide que $b = -4$, por lo que la ecuación de la recta buscada es

$$y = 3x - 4.$$

«

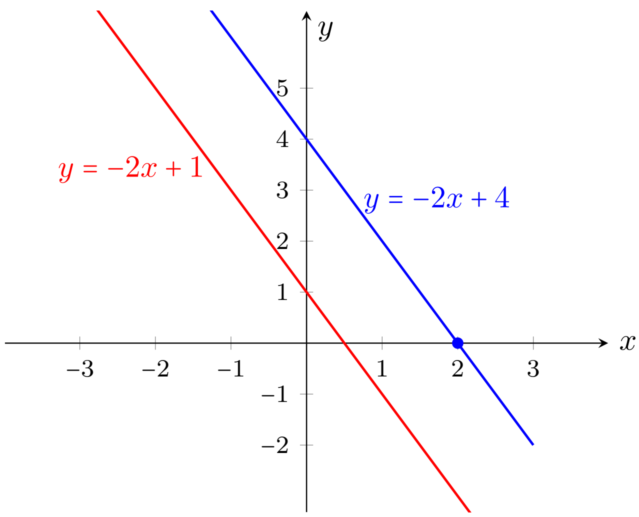
El ejemplo anterior puede resolverse en GeoGebra ingresando el punto P=(0,-4) y la ecuación de la recta dada, a la cual, supongamos, que el software le asigna el nombre f. Luego, el comando Recta(P,f) trazará la recta que pase por P y que sea *paralela* a la recta f. Esta herramienta posee el ícono en la barra gráfica.

Ejemplo 160. **Rectas paralelas.** Hallar la ecuación de la recta paralela a la gráfica de $f(x) = -2x + 1$, cuya raíz sea $x = 2$.

Solución: Ya sabemos que la pendiente de la recta buscada es -2, es decir, la ecuación es $y = -2x + b$. Determinaremos b de manera que la raíz de la función sea $x = 2$, es decir, que debe cumplirse que el punto $(2, 0)$ pertenezca a la recta. Esto ocurre si

$$0 = -2 \cdot 2 + b$$

lo que implica $b = 4$. Entonces, la ecuación de la recta buscada es $y = -2x + 4$. Graficamos esta recta junto con la dada en la figura siguiente.



Recordemos que la raíz de una función afín con pendiente distinta de cero está dada por $x = -\frac{b}{a}$. Luego, conociendo los valores de a y de la raíz, otra forma de calcular b es a partir de esta relación. En este caso, sabemos que $a = -2$ y queremos que la raíz sea $x = 2$. Luego, b debe satisfacer:

$$2 = -\frac{b}{-2} = \frac{b}{2},$$

de lo que se deduce, al igual que antes, que $b = 4$. Aunque cualquiera de las dos formas de hallar b es correcta, la primera evita tener que memorizar fórmulas, recurriendo solamente al significado de pertenencia de un punto a la gráfica de una función. «

Dos rectas son **perpendiculares** si forman entre ellas un ángulo recto. Para el caso de dos rectas con *pendientes no nulas*, puede probarse que:

Dos rectas son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es igual a -1.

Notar que el producto de dos números es igual a -1 si y solo si uno es el inverso multiplicativo del otro, y con signo opuesto. Es decir, dos rectas son perpendiculares si y solo si sus pendientes son de la forma

$$a \quad \text{y} \quad -\frac{1}{a},$$

siendo a cualquier real distinto de cero.

Ejemplo 161. **Rectas perpendiculares.** Los siguientes son pares de rectas perpendiculares entre sí:

$$\begin{array}{ll} y = -2x + 1, & y = \frac{1}{2}x + 5; \\ y = \frac{5}{3}x - 2, & y = -\frac{3}{5}x + 1; \\ y = \pi x + 7, & y = -\frac{1}{\pi}x + 16. \end{array}$$

Esto se debe a que en cada par, el producto de las pendientes es igual a -1:

$$-2 \cdot \frac{1}{2} = -1, \qquad \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -1, \qquad \pi \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right) = -1.$$ «

Ejemplo 162. **Rectas perpendiculares.** Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $y = 3x - 2$, que pasa por el punto $P = (3, 1)$.

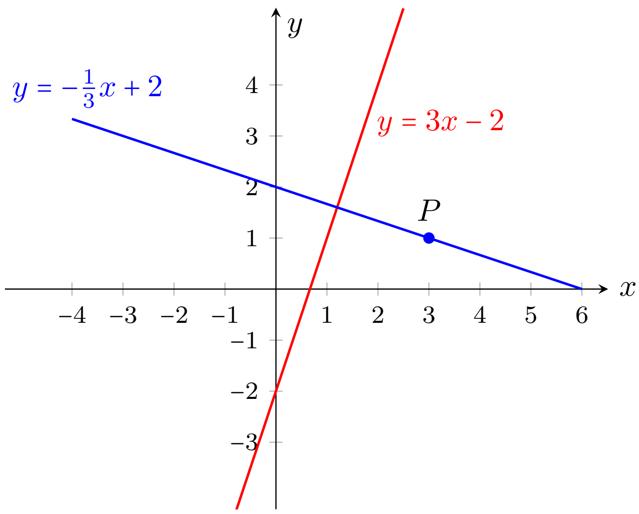
Solución: Al pedir que sea perpendicular a una recta con pendiente 3, nos está diciendo que la recta buscada debe tener pendiente $a = -\frac{1}{3}$. Es decir, será

$$y = -\frac{1}{3}x + b,$$

y determinaremos b de manera que $(3, 1)$ pertenezca a la recta. Para ello, debe valer la igualdad

$$1 = -\frac{1}{3} \cdot 3 + b,$$

de donde se obtiene $b = 2$. Entonces, la recta buscada es $y = -\frac{1}{3}x + 2$, cuya representación gráfica se encuentra en la figura siguiente:



El ejercicio anterior puede resolverse en GeoGebra ingresando primero el punto P=(3,1) y la ecuación de la recta dada. Luego, seleccionando la herramienta cuyo ícono gráfico es , se elige el punto P y después la recta dada. Se obtiene así la recta perpendicular a ella por el punto seleccionado. El comando correspondiente para esto es Perpendicular(<Punto>,<Recta>).

Vimos que dos rectas con pendientes no nulas son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es -1. Pero toda recta horizontal es de la forma $y = b$, por lo que su pendiente es cero, y no podemos obtener su recíproco. Entonces, ¿cuál es la ecuación de la recta perpendicular a una horizontal? Así como las rectas horizontales tiene ecuación $y = b$ (lo que significa que y posee siempre el mismo valor constante aunque x varíe), las **rectas verticales** tienen ecuación

$$x = c,$$

lo que significa que el valor de x no cambia, aunque los valores de y varíen. Toda recta horizontal es perpendicular a cualquier recta vertical (ver Figura 5.5).

Las rectas verticales no corresponden al gráfico de una función, pues no hay unicidad de imagen.

Sabemos que una recta no vertical queda completamente determinada conociendo su pendiente a y su ordenada al origen b. Pero conocer su ordenada al origen es equivalente a saber que el punto $(0, b)$ pertenece a la recta. ¿Será posible hallar una fórmula general para determinar la ecuación de una recta conociendo su pendiente y otro punto que pertenece a ella? Supongamos que sabemos que la recta tiene pendiente $a \neq 0$ y que el punto $P = (x_1, y_1)$ pertenece a

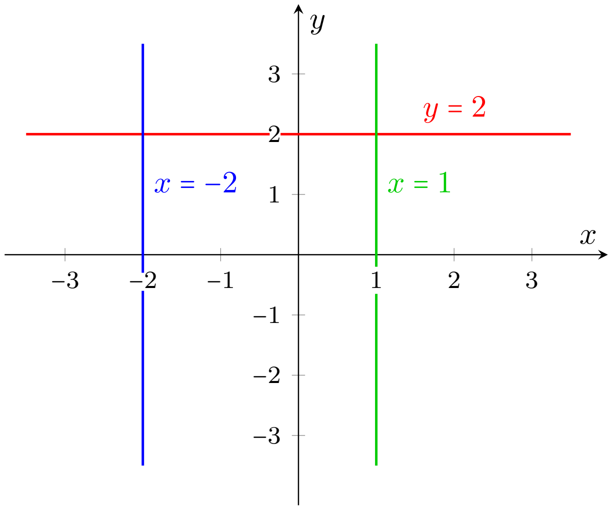


Figura 5.5: $y = b$ es perpendicular a $x = c$.

ella. La ecuación de la recta es $y = ax+b$, y solamente falta determinar b. Pero P pertenece a la recta, por lo que sus coordenadas satisfacen su ecuación, es decir,

$$y_1 = ax_1 + b,$$

de lo que se obtiene inmediatamente $b = y_1 - ax_1$. Entonces la ecuación de la recta con pendiente a que pasa por $P = (x_1, y_1)$ es

$$\boxed{y} = ax + \underbrace{y_1 - ax_1}_{b} = \boxed{a(x - x_1) + y_1,}$$

lo que se conoce como **ecuación punto-pendiente** de una recta.

Ejemplo 163. **Usando la ecuación punto-pendiente.** Hallar la ecuación de la recta con pendiente $a = 4$ y que pasa por el punto $(-2, 5)$.

Solución: Utilizando la ecuación punto-pendiente de una recta, sabemos que la recta buscada está dada por

$$y = 4(x - (-2)) + 5 = 4x + 13.$$ «

No es necesario memorizar la fórmula anterior, ya que podemos obtener b como lo hicimos antes en otros ejemplos. Sabiendo que la pendiente es 4 y que $(-2, 5)$ pertenece a la recta, entonces debe ocurrir que

$$5 = 4 \cdot (-2) + b,$$

y despejando se obtiene $b = 13$, como en el ejemplo anterior.

? Ya que dos puntos dados determinan una única recta que pasa por ellos, nos preguntamos ahora si es posible determinar la ecuación de dicha recta a partir de las coordenadas de los puntos. La respuesta es sí, y lo haremos primero mediante un ejemplo, para luego enunciar la fórmula general.

Ejemplo 164. **Recta por dos puntos dados.** Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P = (2, 3)$ y $Q = (-1, -3)$.

Solución: Sabemos que la ecuación de la recta tiene la forma $y = ax+b$. Debemos determinar a y b de manera que tanto P como Q satisfagan la ecuación de la recta. Es decir,

$$\begin{cases} a \cdot 2 + b &= 3, \\ a \cdot (-1) + b &= -3. \end{cases}$$

Este es un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas a y b, el cual se resuelve por sustitución o por igualación como se estudió en la Sección 4.4. Por ejemplo, despejando b en ambas ecuaciones tenemos

$$b = 3 - 2a \quad \text{y} \quad b = -3 + a.$$

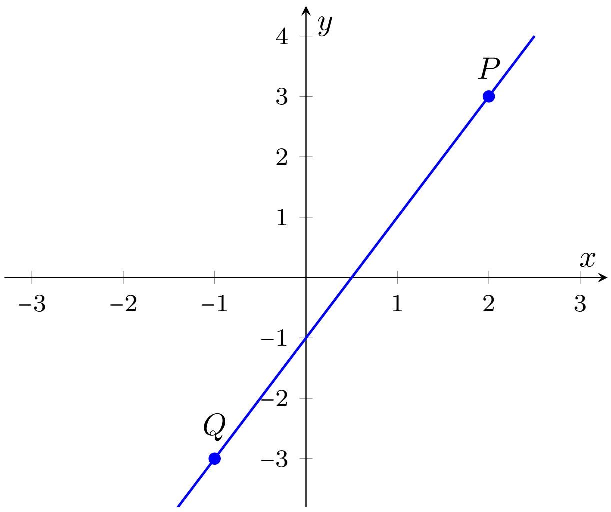
Igualando estas dos cantidades se obtiene

$$3 - 2a = -3 + a,$$

de lo que se concluye fácilmente $3a = 6$, o equivalentemente $a = 2$. Entonces $b = 3 - 2a = 3 - 4 = -1$. Por lo tanto la ecuación de la recta buscada es

$$y = 2x - 1,$$

cuya gráfica se encuentra a continuación:



«

El ejemplo anterior muestra de qué manera, dados dos puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ con $x_1 \neq x_2$, podemos determinar la recta que pasa por ellos. Lo que hicimos fue hallar a y b de manera que ambos puntos satisfagan la ecuación de la recta $y = ax + b$, quedando planteado así el sistema

$$\begin{cases} a \cdot x_1 + b &= y_1, \\ a \cdot x_2 + b &= y_2. \end{cases}$$

Despejando b de ambas ecuaciones e igualando luego lo obtenido, llegamos a

$$y_1 - ax_1 = y_2 - ax_2.$$

Resolvamos esta ecuación para determinar la pendiente a de la recta buscada:

$$y_1 - ax_1 = y_2 - ax_2 \Leftrightarrow ax_2 - ax_1 = y_2 - y_1 \Leftrightarrow a(x_2 - x_1) = y_2 - y_1,$$

de lo que se obtiene

$$\boxed{a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.}$$

Lo anterior nos da la pendiente de la recta que une dos puntos dados, siempre que $x_1 \neq x_2$ (si $x_1 = x_2$, entonces la recta que pasa por P y Q es vertical, de ecuación $x = x_1$). Luego, podemos hallar $b = y_1 - ax_1$, o bien podemos utilizar la fórmula punto-pendiente con el valor de a hallado y con cualquiera de los dos puntos dados.

Vamos a rehacer el ejemplo anterior, utilizando la fórmula hallada.

Ejemplo 165. **Recta que pasa por dos puntos.** Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P = (2, 3)$ y $Q = (-1, -3)$.

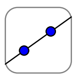
Solución: Sabemos que la pendiente de la recta que une P y Q está dada por

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 3}{-1 - 2} = \frac{-6}{-3} = 2.$$

Aplicando ahora la fórmula punto-pendiente con $a = 2$ y P, obtenemos:

$$y = 2(x - 2) + 3 = 2x - 1.$$

«

En GeoGebra es posible hallar la recta que pasa por dos puntos P y Q mediante el comando Recta(P,Q), introduciendo previamente dichos puntos. Esta herramienta también se encuentra en el menú gráfico como . Notar que la ecuación $y = ax + b$ de una recta también puede expresarse como $y - ax = b$ o $y - ax - b = 0$. Recíprocamente, una expresión de la forma

$$\boxed{Ay + Bx + C = 0} \quad \text{o} \quad \boxed{Ay + Bx = D,}$$

con $A \neq 0$, puede llevarse fácilmente (dividiendo por A y despejando y) a la forma usual $y = ax + b$, conocida también como **ecuación pendiente-ordenada al origen** de la recta. Las formas anteriores se conocen como **ecuación general** de la recta, y GeoGebra suele expresar así la ecuación de la recta hallada en la versión para computadoras. Sin embargo, es posible convertir de una forma a otra simplemente haciendo clic derecho sobre la recta, y eligiendo la forma que uno desee.

Aplicación: modelando problemas reales.

Veamos ahora algunas aplicaciones de las funciones afines a problemas concretos. A lo largo del libro, por simplicidad en la representación gráfica de los modelos, supondremos que todas las variables involucradas (tiempo, dinero, etc.) son **continuas** en lugar de discretas. Esto significa que pueden tomar cualquier valor en un intervalo determinado. Luego, si estuviéramos modelando la ganancia en función de la cantidad de unidades vendidas de un determinado artículo (el cual no puede fraccionarse), el dominio será el conjunto de los números naturales (no se puede vender un lápiz y medio, por ejemplo). En tal caso, el gráfico debería ser un conjunto de puntos, en lugar de una línea continua. Sin embargo, graficaremos aquí la función como si su dominio fuera el conjunto de los números reales o un intervalo, y luego el resultado deberá interpretarse según el contexto.

Ejemplo 166. El dueño de una agencia de viajes paga a cada empleado un sueldo base de \$6300 por mes, más \$500 por cada viaje vendido.

(a) Determinar el sueldo mensual de cada empleado, en función de los viajes vendidos.
(b) Determinar el sueldo de un empleado que vende 12 viajes en un mes.
(c) Determinar la cantidad de viajes que debe vender en un mes para que el sueldo sea de \$14800.

Solución:

(a) El sueldo mensual (en pesos) de cada empleado está dado por

$$S(x) = 500x + 6300,$$

donde x denota la cantidad de viajes vendidos en ese mes.

(b) Si vende 12 viajes en un mes, el sueldo es $S(12) = 500 \cdot 12 + 6300 = 12300$ pesos.

(c) Debemos hallar x natural tal que $S(x) = 14800$. Resolvamos esta ecuación:

$$14800 = 500x + 6300 \Leftrightarrow 8500 = 500x \Leftrightarrow 17 = x.$$

Entonces, un empleado debe vender 17 viajes en un mes para que el sueldo sea de \$14800. «

Ejemplo 167. Una pileta se vacía con una bomba que extrae agua a razón de 400 litros por minuto. Al encender la bomba, en la pileta había 30000 litros de agua.

(a) Hallar la función que indica el caudal restante de agua en función del tiempo, y representarla gráficamente.

(b) Determinar la cantidad de agua que queda en la pileta luego de media hora de comenzar a vaciarla.

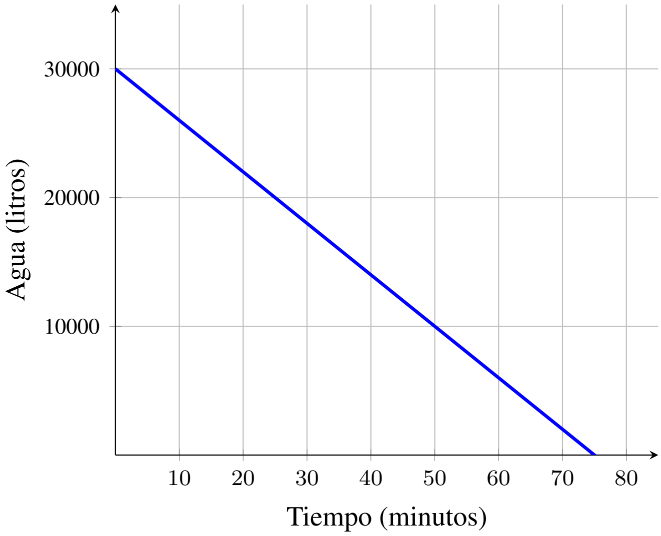
(c) Determinar el tiempo necesario para vaciar la pileta por completo.

Solución:

(a) El caudal de agua (en litros) en función del tiempo (en minutos) es

$$C(t) = 30000 - 400t,$$

cuya gráfica es la siguiente:



(b) Luego de media hora, la cantidad de agua en la pileta está dada por $C(30) = 30000 - 400 \cdot 30 = 18000$ litros de agua.

(c) Debemos hallar t tal que $C(t) = 0$ (es decir, hallar la raíz de C). Resolvamos esta ecuación:

$$0 = 30000 - 400t \Leftrightarrow -30000 = -400t \Leftrightarrow t = 75.$$

Entonces, para vaciar por completo la pileta se necesitan 75 minutos. «

Ejemplo 168. **Grados Celsius vs. Grados Fahrenheit.** En Argentina se utiliza generalmente la escala de grados Celsius (°C) para medir la temperatura. Sin embargo, en otros países se utiliza la escala de grados Fahrenheit (°F). La relación de conversión entre ambas escalas está dada por la fórmula

$$f(x) = \frac{9}{5}x + 32,$$

siendo x la temperatura en grados Celsius, y $f(x)$ es la misma temperatura expresada en grados Fahrenheit.

(a) Graficar la recta correspondiente a los grados Fahrenheit en función de los grados Celsius.

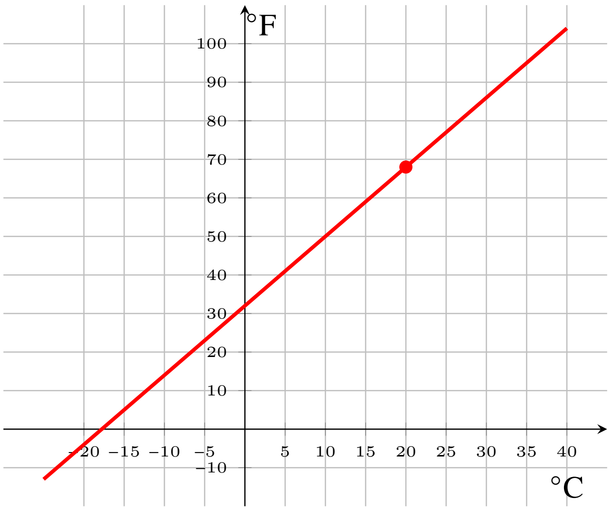
(b) ¿Cuántos grados Fahrenheit son 20 °C?

(c) ¿Cuántos grados Celsius son 50 °F?

(d) ¿Para qué valores de temperatura, expresada en grados Celsius, la temperatura equivalente en grados Fahrenheit es negativa?

Solución:

(a) La recta correspondiente es la siguiente:



(b) El equivalente a 20 °C en °F es $f(20) = 68$ (se marca el punto en la recta).

(c) Debemos hallar x tal que $f(x) = 50$. Resolvemos la ecuación:

$$50 = \frac{9}{5}x + 32 \Leftrightarrow 18 = \frac{9}{5}x \Leftrightarrow 18 \cdot \frac{5}{9} = x \Leftrightarrow 10 = x.$$

Es decir, 50 °F equivalen a 10 °C.

(d) Debemos hallar los valores de x tales que $f(x) < 0$. Entonces resolvemos la inecuación:

$$\frac{9}{5}x + 32 < 0 \Leftrightarrow \frac{9}{5}x < -32 \Leftrightarrow x < -32 \cdot \frac{5}{9} \approx -17.78.$$

Es decir, para tener una temperatura "bajo cero" en la escala Fahrenheit, debemos tener una temperatura inferior a los -17.78 °C (observar en la gráfica que este valor es donde la recta interseca al eje x). «

Ejemplo 169. **Movimiento rectilíneo uniforme.** Se llama **movimiento rectilíneo uniforme** (MRU) al que desarrolla un objeto que describe una trayectoria recta respecto a un observador, con velocidad constante (esto significa aceleración nula). En un movimiento rectilíneo uniforme, la posición s del objeto en cada instante t se puede calcular por la fórmula

$$s(t) = vt + s_0,$$

siendo s_0 la posición inicial del objeto y v la velocidad. La gráfica de la posición en función del tiempo es una recta cuya pendiente es la velocidad, y su ordenada al origen es la posición inicial.

Supongamos que un auto parte desde un punto sobre una autopista recta, y conduce por ella a una velocidad constante de 83 km/h.

(a) Escribir la fórmula que exprese la posición (en km) del auto en función del tiempo (en horas, luego de la partida).

(b) Calcular a qué distancia del punto de partida se encontrará luego de dos horas de recorrido.

(c) ¿Cuánto recorrió luego de tres horas y media?

(d) Hallar el tiempo transcurrido entre su partida y el instante en el que lleva recorridos 498 km.

Solución:

(a) Tomamos como punto de referencia al lugar donde partió, es decir, colocamos allí el "kilómetro cero". Aplicando entonces la fórmula con $s_0 = 0$, la posición (en km) del auto en función del tiempo (en horas) está dada por

$$s(t) = 83t.$$

(b) La distancia que habrá recorrido luego de 2 horas es $s(2) = 166$ km.

(c) Luego de tres horas y media habrá recorrido $s(3.5) = 290.5$ km.

(d) Buscamos t tal que $s(t) = 498$. Debemos resolver la ecuación

$$498 = 83t,$$

lo que equivale a $t = 6$. Luego, pasaron 6 horas desde su partida hasta recorrer 498 km. «

Ejemplo 170. **Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.** Se llama **movimiento rectilíneo uniformemente acelerado** (MRUA) al que desarrolla un objeto cuando se mueve en línea recta y su aceleración es constante (esto quiere decir que su velocidad varía uniformemente). En un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, la velocidad v del móvil en cada instante t se puede calcular por la fórmula

$$v(t) = at + v_0,$$

siendo v_0 la velocidad inicial* del móvil, y a su aceleración. La gráfica de la velocidad en función del tiempo es una recta cuya pendiente es la aceleración, y su ordenada al origen es la velocidad inicial.

Supongamos que un tren de alta velocidad, que se encuentra en reposo, comienza su trayecto en línea recta con una aceleración constante de 0.5 m/s^2.

(a) Escribir la fórmula que exprese la velocidad alcanzada por el tren en función del tiempo, indicando las unidades utilizadas.

(b) Calcular la velocidad (en kilómetros por hora) que alcanza el tren a los 3 minutos y medio.

(c) ¿Cuántos minutos le lleva alcanzar una velocidad de 165 m/s?

Solución:

(a) Como el tren parte desde el reposo, la velocidad inicial es cero. Puesto que la aceleración está dada en m/s^2, la fórmula

$$v(t) = 0.5t$$

nos dará la velocidad del tren (en m/s) en función del tiempo (en segundos).

(b) Notar que 3 minutos y medio equivalen a 210 segundos, por lo que la velocidad en ese momento será $v(210) = 105$, pero en m/s. Para expresarla en km/h, escribimos

$$105\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 105\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \underbrace{\frac{1\text{ km}}{1000\text{ m}}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{3600\text{ s}}{1\text{ h}}}_{=1} = 378\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

(c) Debemos hallar t tal que $v(t) = 165$. Resolvamos la ecuación:

$$165 = 0.5t \Leftrightarrow t = 330.$$

Esto nos dice que le lleva 330 segundos alcanzar la velocidad indicada, lo que equivale a 5 minutos y medio. «

*Por estar en un movimiento rectilíneo, la dirección de la velocidad está dada por su signo.

Ejemplo 171. Hallando la aceleración en un MRUA. Un automóvil que va a una velocidad de 8 m/s acelera uniformemente su marcha, de forma que a los 30 segundos su velocidad es de 23 m/s.

(**a**) Calcular la aceleración aplicada en ese tiempo.

(**b**) Calcular la velocidad (en metros por segundo) que alcanza el automóvil luego de 6 segundos de comenzar a acelerar.

(**c**) Determinar el tiempo transcurrido desde que acelera hasta que alcanza una velocidad de 20 m/s.

Solución:

(**a**) Por un lado sabemos que la aceleración es la pendiente de la recta dada por la velocidad. Por otro lado, sabemos cómo calcular la pendiente de una recta conociendo dos puntos sobre ella. Si empezamos a contar el tiempo desde el momento que empieza a acelerar, entonces dos puntos en la recta correspondiente al gráfico de la velocidad son

$$(0, 8) \quad \text{y} \quad (30, 23).$$

Entonces la aceleración es $a = \frac{23-8}{30} = \frac{15}{30} = 0.5$ m/s^2.

(**b**) La velocidad en cada instante t del período indicado está dada por

$$v(t) = 0.5t + 8,$$

por lo que la velocidad a los 6 segundos de comenzar a acelerar es igual a $v(6) = 11$ m/s.

(**c**) Buscamos t tal que $v(t) = 20$. Entonces resolvemos la ecuación

$$20 = 0.5t + 8 \Leftrightarrow 12 = 0.5t \Leftrightarrow 24 = t.$$

Esto significa que a los 24 segundos de comenzar a acelerar, llegó a una velocidad de 20 m/s (lo que equivale a 72 km/h). «

Ejemplo 172. Caída libre - Tiro vertical. Se denomina **caída libre** al movimiento vertical* de un cuerpo sometido únicamente a la aceleración de la gravedad, la cual es constantemente 9.8 m/s^2 (este valor se denota con la letra g), que lo atrae hacia el suelo (supondremos que no hay resistencia del aire). Este tipo de movimiento se produce cuando se lanza un objeto *verticalmente* hacia arriba o hacia abajo, o cuando simplemente lo dejamos caer. La caída libre (o tiro vertical) es un caso particular del movimiento uniformemente acelerado, por

*Un cuerpo describe un movimiento vertical si su trayectoria forma con la horizontal un ángulo recto. Luego estudiaremos lo que se conoce como “tiro de proyectil”, en el que el objeto se lanza con un ángulo de tiro agudo, produciendo un desplazamiento del mismo en dirección vertical y también horizontal.

lo que la velocidad v (en m/s) de un objeto en caída libre en cada instante t (en segundos) se puede calcular por la fórmula

$$v(t) = -9.8t + v_0,$$

siendo v_0 la velocidad inicial del objeto ($v_0 > 0$ si el objeto es lanzado hacia arriba, $v_0 < 0$ cuando es lanzado hacia abajo, y $v_0 = 0$ cuando el objeto se deja caer). El signo menos en la aceleración de la gravedad corresponde a la dirección, ya que el objeto es atraído hacia abajo. Por otro lado, se sabe que la altura (en metros) del objeto en caída libre en cada instante de tiempo está dada por

$$y(t) = -4.9t^2 + v_0 t + y_0,$$

siendo y_0 la altura desde la que se arroja el objeto. Nos ocuparemos con más detalle de esta función de altura en la Sección 5.5.

Supongamos que una piedra se deja caer desde una altura de 54 metros.

(a) Escribir la fórmula que exprese la velocidad (en m/s) alcanzada por la piedra en función del tiempo (en segundos).

(b) Calcular la velocidad que alcanzará la piedra a los 4 segundos de haber sido soltada.

(c) ¿En qué instante alcanzará una velocidad de -19.6 m/s?

(d) Escribir la fórmula que exprese la altura (en metros) alcanzada por la piedra en función del tiempo (en segundos).

(e) ¿A qué altura se encontrará la piedra a los 3 segundos de haber sido soltada?

(f) Determinar los segundos que demora en llegar al suelo, y con qué velocidad llega.

Solución:

(a) Ya que la piedra se deja caer, se tiene $v_0 = 0$. Luego, la velocidad de la piedra (en m/s) en función del tiempo (en segundos) está dada por

$$v(t) = -9.8t.$$

(b) A los 4 segundos de haberla dejado caer, la velocidad de la piedra será de $-9.8 \cdot 4 = -39.2$ m/s. El signo de la velocidad indica el sentido, en este caso el signo menos indica que la piedra está cayendo.

(c) Buscamos t tal que $v(t) = -19.6$. Es decir, hay que resolver la ecuación $-9.8t = -19.6$, lo que arroja $t = 2$ segundos.

(d) Ya que la altura de lanzamiento es de 54 metros, se tiene $y_0 = 54$. Luego, la altura (en metros) alcanzada por la piedra en función del tiempo (en segundos) está dada por

$$y(t) = -4.9t^2 + 54.$$

(e) La altura a la que se encuentra la piedra a los 3 segundos de haber sido soltada es

$$y(3) = -4.9 \cdot 3^2 + 54 = 9.9,$$

es decir, se encuentra a 9.9 metros de altura.

(f) Primero busquemos t tal que $y(t) = 0$. Para ello resolvemos

$$0 = -4.9t^2 + 54 \Leftrightarrow 4.9t^2 = 54 \Leftrightarrow t^2 \approx 11.02 \Leftrightarrow t \approx \pm 3.32.$$

Como estamos hablando de tiempo, la solución negativa se descarta. Entonces la piedra llega al suelo, aproximadamente, a los 3.32 segundos de comenzar a caer, y la velocidad con la que llega (en m/s) es alrededor de

$$v(3.32) = -32.5.$$

«

Ejemplo 173. Se lanza desde el suelo una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s.

(a) ¿Qué velocidad tendrá la pelota luego de 2 segundos? ¿Se encontrará subiendo o bajando? ¿A qué altura se encontrará?

(b) ¿En qué instantes la pelota estará a 15 metros de altura?

(c) ¿Cuánto tiempo demora en volver al suelo?

(d) Hallar la altura máxima alcanzada por la pelota, sabiendo que esta corresponde al instante en el que su velocidad es cero.

(e) ¿Cuál debió haber sido la velocidad inicial para que la altura máxima de la pelota sea 25 metros?

Solución: Comencemos dando las funciones que determinan la velocidad (en m/s) y la altura (en metros) de la pelota en cada instante de tiempo (en segundos):

$$v(t) = -9.8t + 20, \qquad y(t) = -4.9t^2 + 20t.$$

(a) La velocidad luego de 2 segundos es $v(2) = 0.4$ m/s. Por ser positiva, la pelota se encuentra subiendo, y la altura será $y(2) = 20.4$ metros.

(b) Para determinar en qué momentos la altura de la pelota es de 15 metros, debemos hallar t tal que $y(t) = 15$, es decir, debemos resolver la ecuación

$$15 = -4.9t^2 + 20t.$$

Para ello aplicamos la resolvente, obteniendo como resultados $t_1 \approx 1$ y $t_2 \approx 3.1$, que corresponden a los momentos en que la pelota se encuentra subiendo y bajando, respectivamente. En ambos instantes alcanza 15 metros de altura.

(c) Buscamos t tal que $y(t) = 0$. Esto significa que debemos resolver la ecuación $-4.9t^2 + 20t = 0$. Extrayendo t como factor común, se obtiene

$$t(-4.9t + 20) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \quad \text{o} \quad -4.9t + 20 = 0.$$

La opción $t = 0$ corresponde a cuando la pelota es lanzada, por lo que vuelve al piso cuando $-4.9t + 20 = 0$, lo que implica $t \approx 4.08$ segundos.

(d) Primero hallemos t tal que $v(t) = 0$. Resolviendo $-9.8t + 20 = 0$ se obtiene $t = 20/9.8 \approx 2.04$ segundos. Ahora calculamos

$$y(2.04) = -4.9 \cdot (2.04)^2 + 20 \cdot (2.04) = 20.4,$$

por lo que la altura máxima alcanzada por la pelota es de aproximadamente 20.4 metros.

(e) Sea v_0 la velocidad inicial. Entonces la velocidad y la altura están dadas por

$$v(t) = -9.8t + v_0, \qquad y(t) = -4.9t^2 + v_0 t.$$

Con el mismo razonamiento del inciso anterior, queremos que

$$\begin{cases} -9.8t + v_0 & = & 0, \\ -4.9t + v_0 & = & 25. \end{cases}$$

Este es un sistema con dos ecuaciones lineales y dos incógnitas t y v_0, el cual se resuelve por sustitución o por igualación como se estudió en la Sección 4.4. Resolviendo se obtiene $t \approx 5.10$ y $v_0 = 50$. Esto significa que si la velocidad inicial es de 50 m/s, la pelota alcanza una altura máxima de 25 metros a los 5 segundos de ser lanzada, aproximadamente. «

Las funciones lineales también modelan una infinidad de situaciones frecuentes. Este es el caso de problemas de proporción directa, lo que incluye, en particular, a problemas de porcentaje.

Proporcionalidad directa.

Las relaciones de proporcionalidad aparecen con mucha frecuencia en nuestra vida cotidiana. Para que dos magnitudes mantengan una relación de **proporcionalidad directa**, tienen que estar relacionadas de tal forma que si aumentamos la cantidad de una, la otra tiene que aumentar también proporcionalmente, y lo mismo ocurre si reducimos una de ellas. Por ejemplo, si duplicamos una, la otra se tiene que duplicar, si la triplicamos la otra también se triplica, y si la reducimos a la mitad, la otra también se tiene que reducir a la mitad. Esto se traduce matemáticamente como: dos magnitudes x e y son directamente proporcionales si existe una constante a, llamada **constante de proporcionalidad**, tal que

$$y = ax.$$

Estamos rodeados de magnitudes directamente proporcionales entre sí, como veremos en los ejemplos contenidos hasta finalizar esta sección.

Para resolver un problema de proporcionalidad directa se puede utilizar:

- La constante de proporcionalidad.
- Una regla de tres simple.

En el siguiente ejemplo recordamos estas dos formas de resolución de problemas de proporción directa.

Ejemplo 174. **Proporción directa.** Sabiendo que 16 entradas para el cine costaron \$3840, determinar el precio de 29 entradas (estamos suponiendo que no hay ningún tipo de promoción).

Solución 1: hallando la constante de proporcionalidad. Puesto que la cantidad de entradas a adquirir (x) es directamente proporcional al dinero a abonar (y), sabemos que existe una constante a tal que $y = ax$, lo que equivale a $a = \frac{y}{x}$ cuando $x \neq 0$. Reemplazando x e y por los datos dados, tenemos que

$$a = \frac{3840}{16} = 240.$$

Entonces, el precio a abonar en pesos en función de la cantidad de entradas está dado por

$$y = 240x.$$

Esto implica que el valor de 29 entradas será de $y = 240 \cdot 29 = 6960$ pesos. Notar que la constante de proporcionalidad a corresponde al *valor de la unidad*, lo que en este caso corresponde al valor de una sola entrada.

Solución 2: usando regla de tres simple. La regla de tres simple es una operación que tiene por objetivo hallar el cuarto término de una proporción, cuando se conocen tres. Recordamos a continuación el método para magnitudes directamente proporcionales*:

$$\left.\begin{array}{ccc} 16 & \longrightarrow & 3840 \\ 29 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{29 \cdot 3840}{16} = 6960,$$

obteniendo así el mismo resultado que con el método anterior. «

*Por simplicidad en la escritura, no colocaremos aquí las unidades correspondientes a las cantidades involucradas. Se recomienda al alumno hacerlo en caso de que esto ayude a “encolumnar” de manera correcta dichas cantidades. Recordar que, al resolver, las unidades deben “cancelarse” de forma que el resultado quede indicado en la unidad adecuada.

Ejemplo 175. Al llegar al hotel nos entregaron un mapa con los lugares de interés de la ciudad. El mapa está realizado a escala, y dice que 5 centímetros del mapa representan 800 metros de la realidad. Queremos visitar un puente que se encuentra a 13 centímetros del hotel en el mapa. ¿A qué distancia del hotel se encuentra este puente?

Solución: Aplicaremos regla de tres simple para hallar la distancia x:

$$\left.\begin{array}{ccc} 5 & \longrightarrow & 800 \\ 13 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{13 \cdot 800}{5} = 2080,$$

por lo que la distancia del puente al hotel es de 2080 metros. «

Un caso particular de lo anterior es el cálculo de porcentajes. El **porcentaje** se denota* utilizando el símbolo %, que matemáticamente equivale a multiplicar por el factor 0.01. Por ejemplo, "veintiocho por ciento" se representa como 28 % y equivale a multiplicar por 0.28. Entonces, para obtener el 28 % de 1600 se multiplica $1600 \cdot 0.28 = 448$. Esto proviene de aplicar la regla de tres simple, teniendo el cuenta que el cien por ciento es el total:

$$\left.\begin{array}{ccc} 100\,\% & \longrightarrow & 1600 \\ 28\,\% & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{28 \cdot 1600}{100} = 448.$$

Ejemplo 176. **Calculando un descuento.** Una prenda de vestir que cuesta \$780 tiene un descuento de un 15 % por fin de temporada. Determinar el monto del descuento, y el precio que, finalmente, se pagará por la prenda.

Solución: Si x denota el descuento de la prenda, entonces

$$\left.\begin{array}{ccc} 100\,\% & \longrightarrow & 780 \\ 15\,\% & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{15 \cdot 780}{100} = 117.$$

Por lo tanto el descuento es de \$117 pesos, y el precio final de la prenda es de \$663. «

Ejemplo 177. **Calculando el porcentaje de descuento.** El precio de un teléfono celular es de \$8500, pero si se paga al contado el precio es de \$6970. ¿Qué porcentaje de descuento se aplicó al precio original para obtener el importe por pago al contado?

*Aunque el símbolo % se ve frecuentemente escrito sin separación de la cifra que lo precede, la norma establecida por la Oficina Internacional de Pesos y Medidas determina que se debe dejar un espacio de separación entre el número y él. Esta información se extrajo de `http://aplica.rae.es/orweb/cgi-bin/v.cgi?i=QnkkivzhcyyaDhgI`.

Solución: El total de descuento es $8500 - 6970 = 1530$ pesos. La consigna es determinar qué porcentaje del precio original representa esta cantidad. Es decir, buscamos x tal que

$$x \cdot \frac{8500}{100} = 1530.$$

Resolviendo la ecuación se obtiene $x = 1530 \cdot \frac{100}{8500} = 18$, lo que significa que el descuento aplicado fue del 18 %. «

Ejemplo 178. Calculando el precio antes del descuento. Al aplicarle un descuento del 20 % a una bicicleta, el precio obtenido es de \$6300. ¿Cuál era el precio de la bicicleta antes de aplicarle el descuento?

Solución: Sabemos que si al precio original le restamos el descuento, se obtiene 6300 (pesos). Si denotamos con x al precio de la bicicleta antes del descuento, entonces esto se escribe como:

$$x - 20 \cdot \frac{x}{100} = 6300.$$

Resolvamos esta ecuación:

$$x - 0.2x = 6300 \Leftrightarrow 0.8x = 6300 \Leftrightarrow x = 7875.$$

Entonces, el precio de la bicicleta antes del descuento es de \$7875. Una opción alternativa de razonar el problema es que si el descuento es del 20 %, entonces lo que pagamos es el 80 % del importe, es decir, $0.8x = 6300$. «

Ejercicios 5.2

1. Graficar en un mismo sistema de ejes las tres rectas dadas en cada inciso:

(a) $y = 2x + 3;\ \ y = 2x - 1;\ \ y = 2x.$
(b) $y = x + 2;\ \ y = 3x + 2;\ \ y = \frac{1}{2}x + 2.$
(c) $y = 4x;\ \ y = -2x;\ \ y = -\frac{1}{2}x.$
(d) $y = -x + 1;\ \ y = -x + 2;\ \ y = -x - 2.$
(e) $y = -3x + \frac{1}{2};\ \ y = -3x - 2;\ \ y = \frac{1}{3}x.$
(f) $y = 2;\ \ y = -\frac{1}{2};\ \ x = 2.$

2. Determinar en cada caso si los puntos dados pertenecen o no a la recta correspondiente al gráfico de la función.

(a) $y = -\frac{1}{2}x + 1;\quad P = (2, 0);\ \ Q = (4, 3).$
(b) $y = 5x - 1;\quad P = (1, 3);\ \ Q = (0, -2).$
(c) $y = \frac{1}{3}x + 4;\quad P = (3, 5);\ \ Q = (0, 4).$

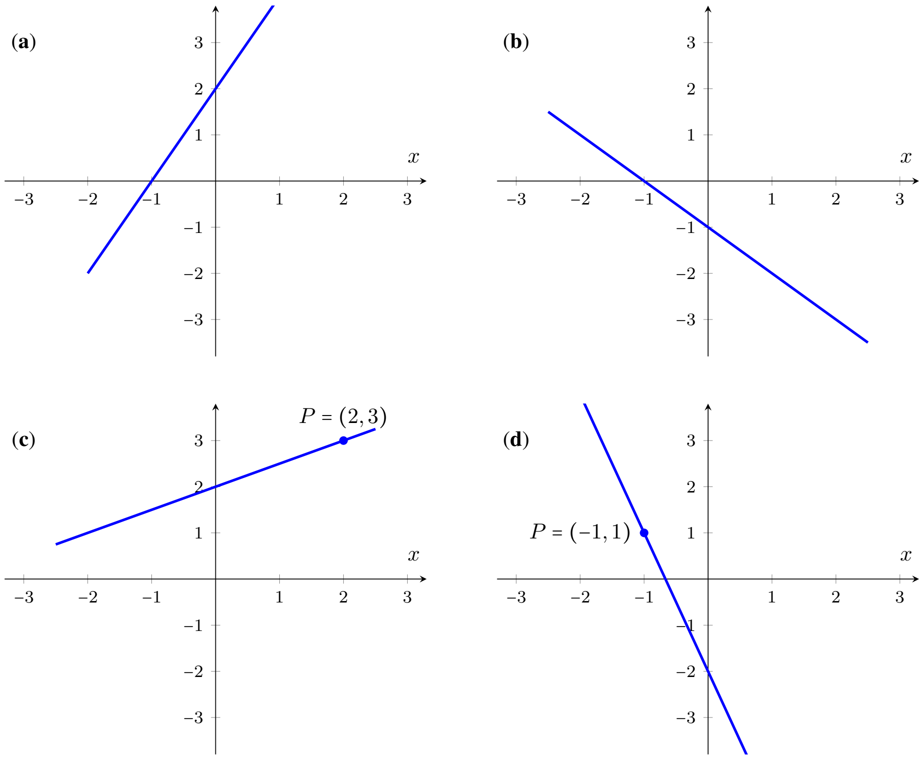
3. Hallar la ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas:

(a) Tiene pendiente -3 y ordenada al origen 4.
(b) Su pendiente es 5 y su raíz es $x = -1$.
(c) Tiene pendiente -2 y pasa por el punto $(1, 5)$.
(d) Su ordenada al origen es -3 y pasa por el punto $(2, -4)$.

4. Hallar en cada caso la ecuación de la recta que tiene la pendiente indicada y pasa por el punto dado:

(a) $m = 2;\ \ P = (-3, 1)$.
(b) $m = -\frac{1}{3};\ \ P = (4, 2)$.
(c) $m = 5;\ \ P = (3, -3)$.

5. Hallar la ecuación de las rectas dadas en los siguientes gráficos:



6. Mediante la fórmula dada en la página 187, determinar la pendiente de la recta que une al par de puntos dados en cada inciso. Utilizarla para hallar la ecuación de la recta que pasa por ellos.

(a) $P = (-2, -4);\ \ Q = (1, 5)$.
(b) $P = (1, 2);\ \ Q = (0, 4)$.
(c) $P = (2, 4);\ \ Q = (-4, 1)$.
(d) $P = (-1, 3);\ \ Q = (3, -1)$.
(e) $P = (2, 0);\ \ Q = (4, 3)$.

(**f**) $P = (3, -5)$; $Q = (-1, 1)$.

7. Comprobar los resultados obtenidos en cada inciso del ejercicio anterior, ingresando los puntos y trazando la recta que los une. Luego, con el comando Pendiente o su ícono gráfico hallar la pendiente de la recta trazada.

8. Hallar la pendiente y ordenada al origen de las siguientes rectas:

(**a**) $3y + 2x = -4$

(**b**) $-2y + 6x = 8$

(**c**) $\frac{1}{2}y - 3x = \frac{5}{4}$

(**d**) $6y - 2x - 18 = 0$

(**e**) $-y + 3x + \pi = 0$

(**f**) $-y + 4x + 5 = 0$

9. Demostrar que las rectas con ecuaciones $-2y + 8x = 6$ y $3y - 12x - 15 = 0$ son paralelas.

10. Hallar la ecuación de la recta que satisface las condiciones en cada inciso:

(**a**) Su ordenada al origen es -2 y es paralela a $y = -4x + 1$.

(**b**) Pasa por el punto $(1, 8)$ y es paralela a $y = 3x + 3$.

(**c**) Es paralela a $y = -\frac{2}{3}x + 1$ y su raíz $x = 6$.

(**d**) Es perpendicular a $y = -\frac{5}{4}x$ y pasa por el origen.

(**e**) Pasa por el punto $(1, 1)$ y es perpendicular a $y = \frac{1}{3}x + 8$.

(**f**) Su raíz es $x = -2$ y es perpendicular a $y = -2x + 7$.

11. Hallar la ecuación de la recta con ordenada al origen -3, que sea perpendicular a la que pasa por los puntos $P = (2, 6)$ y $Q = (-2, 3)$.

12. Hallar la ecuación de la recta paralela a la que une los puntos $(1, -4)$ y $(-1, 6)$, que pase por el punto $(1, -2)$.

13. Actividad en GeoGebra:

Ingresar tres puntos cualesquiera (no alineados).

Trazar una recta por dos de ellos.

Trazar la recta paralela a ella que pase por el punto restante.

Trazar la recta perpendicular a ellas, por el mismo punto.

Mover la primera recta trazada, para observar cómo el resto se mueve en forma dinámica manteniendo las propiedades del gráfico.

14. En un cierto empleo se paga un monto fijo mensual de \$2300, más \$120 por cada hora de trabajo.

(**a**) Hallar la función que indique el sueldo mensual de un empleado en función de las horas de trabajo.

(**b**) Determinar lo que cobrará un empleado en el mes que trabajó 20 horas.

(**c**) Determinar la cantidad de horas que debe trabajar un empleado al mes para cobrar \$23900.

(**d**) ¿Cuál es el mínimo de horas mensuales que deberá trabajar para que el sueldo supere los \$25000?

15. Supongamos que un taxi cobra una tarifa inicial fija de \$25 (bajada de bandera), más un costo de \$0.3 por cada 10 metros recorridos.

(**a**) Hallar la función que indique el costo del viaje en función de los metros recorridos.

(**b**) Determinar el costo de un viaje de 2 kilómetros de recorrido.

(**c**) Determinar la cantidad de kilómetros que podemos recorrer si disponemos de \$70.

16. Una empresa que fabrica paraguas tiene costos fijos de \$2000, costos de producción de \$20 por unidad y un precio de venta unitario de \$50. Determinar las funciones de costos, ingresos y ganancias de la empresa. Graficar la función ganancia, y determinar la cantidad de paraguas que debe vender para obtener una ganancia de \$10000.

17. Un club dispone de un salón para fiestas, que se alquila mediante dos opciones:

- Opción por invitado: se debe pagar \$120 por cada persona que asista a la fiesta (incluyendo al organizador).
- Opción para socios: se permite que el organizador de la fiesta se asocie al club por un valor de \$380 pesos, y cada persona que asista paga \$90 (incluyendo al organizador).

Hallar la función que indique el precio del salón en cada uno de los casos en función de la cantidad de invitados. Indicar qué opción conviene si la cantidad de personas que asisten es 18. ¿Y si asisten 11?

18. Determinar a cuántos grados Fahrenheit corresponden 25 °C, y cuántos grados Celsius equivalen a 68 °F (ver Ejemplo 168).

19. Un automóvil parte desde el reposo y aumenta uniformemente su velocidad durante 30 segundos. Sabiendo que la velocidad pasa de 2 m/s a 6 m/s en 5 segundos, se pide:

(**a**) La fórmula de la velocidad en función del tiempo para cada instante hasta los 30 segundos.

(**b**) La velocidad que alcanza a los 30 segundos, expresada en km/h.

(**c**) El momento en el que alcanza los 60 km/h.

20. Un móvil con una velocidad de 40 m/s frena, de manera que disminuye la misma uniformemente a razón de 5 m/s^2. Calcular el tiempo transcurrido hasta que se detiene por completo.

21. Se deja caer una pelota desde una altura de 56 metros. Determinar:

(**a**) El tiempo que tarda en caer.

(**b**) La velocidad con la que llega al suelo.

22. Desde una altura de 35 metros se arroja hacia abajo una llave con una velocidad inicial de -30 m/s^2. Calcular:

(**a**) El tiempo que tarda en caer.

(**b**) La velocidad con la que llega al suelo.

23. Desde el techo de un edificio se deja caer una piedra, la cual llega al suelo 4 segundos después. Calcular:

(**a**) La altura del edificio.

(**b**) La velocidad de la piedra al llegar al suelo.

24. ¿Con qué velocidad inicial debe lanzarse verticalmente un objeto hacia abajo desde una altura de 48 metros, para que llegue al suelo 2 segundos después?

25. Un objeto que es lanzado hacia arriba desde el nivel del suelo vuelve a caer a los 7 segundos. ¿Con qué velocidad inicial se lanzó? ¿Con qué velocidad inicial debería haber sido lanzado para que vuelva al suelo a los 6 segundos?

26. Se lanza una moneda hacia arriba verticalmente desde una altura de 1.20 metros, con una velocidad inicial de 30 m/s.

(**a**) Determinar cuánto demora la moneda en caer al suelo, y la velocidad con la que llega.

(**b**) Hallar el instante en que la velocidad de la moneda es cero.

(**c**) Sabiendo que la altura máxima de la moneda corresponde al instante en que su velocidad es cero, determinar la altura máxima alcanzada.

27. Un obrero tira ladrillos verticalmente desde el suelo a un andamio situado a 4 metros de altura, con una velocidad inicial de v_0 m/s.

(a) Determinar las funciones de velocidad y altura del ladrillo en cada instante, suponiendo la altura inicial $y_0 = 0$.

(b) Sabiendo que la altura máxima del ladrillo corresponde al instante en que su velocidad es cero, determinar v_0 para que el ladrillo llegue a la altura del andamio e indicar cuánto tiempo demora en llegar.

28. En un plano hecho a escala se indica que 2.6 cm corresponden a 300 metros.

(a) Dos monumentos se encuentran en extremos opuestos de una avenida que tiene 1.8 km de largo. ¿Qué distancia hay en el plano entre los monumentos?

(b) En el plano, ¿cuántos centímentros representan 100 metros?

(c) Si dos lugares se encuentran a 12.3 cm en el plano, ¿a qué distancia se encuentran en la ciudad?

29. En una panadería se utilizan 56 kg de harina para producir 70 kg de pan. Hallar la cantidad de harina necesaria para producir 98 kg de pan.

30. Un examen posee 20 preguntas, y para aprobar se necesita responder correctamente el 70 % de ellas. ¿Cuántas preguntas correctas se necesitan para aprobar?

31. Para obtener la regularidad en una asignatura se requiere un 80 % de asistencia a las clases.

(a) Si la cantidad total es de 48 clases, ¿a cuántas clases se necesita asistir como mínimo para ser regular?

(b) Si un alumno asistió a 36 clases, ¿cuál es su porcentaje de asistencia?

(c) Si sabemos que el porcentaje de asistencia de un alumno es del 62.5 %, ¿a cuántas clases faltó?

32. Juan cobra \$36000 al mes y paga \$6480 de impuestos. ¿Qué porcentaje de impuestos paga?

33. En una tienda de ropa hay 20 % de descuento por cambio de temporada. Si por un abrigo el descuento fue de \$150, ¿cuál era el precio original del abrigo y cuál es el precio final?

34. Con un descuento del 18 %, una silla costó \$574. ¿Cuál era el precio antes del descuento?

35. La factura del teléfono antes de añadirle el 21 % del IVA es de $345. ¿Cuál es el precio final de la factura?

36. El precio final de la factura de gas, incluyendo el 21 % del IVA es de $640. ¿Qué monto corresponde al IVA?

37. En una población de 27000 habitantes, el 82 % tiene más de 18 años. Determinar la cantidad de habitantes que esto representa.

38. El sueldo de un empleado corresponde al 14 % de las ventas que realice en el mes. ¿Cuánto tendrá que vender en un mes para que su sueldo sea de $28000?

5.3. Sistemas de ecuaciones lineales: interpretación gráfica

En la Sección 4.4 estudiamos métodos para hallar analíticamente las soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, el cual es uno de la forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y & = & c_1, \\ a_2x + b_2y & = & c_2, \end{cases}$$

donde a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 son números reales, y las incógnitas son x e y. Aprendimos a resolver este tipo de sistemas por sustitución y por igualación, y prometimos justificar en este capítulo la afirmación sobre la cantidad de soluciones del mismo. Habíamos afirmado que solamente puede ocurrir una y solo una de las siguientes opciones:

- Tiene una solución única (sistema compatible determinado).
- Tiene infinitas soluciones (sistema compatible indeterminado).
- No tiene solución (sistema incompatible).

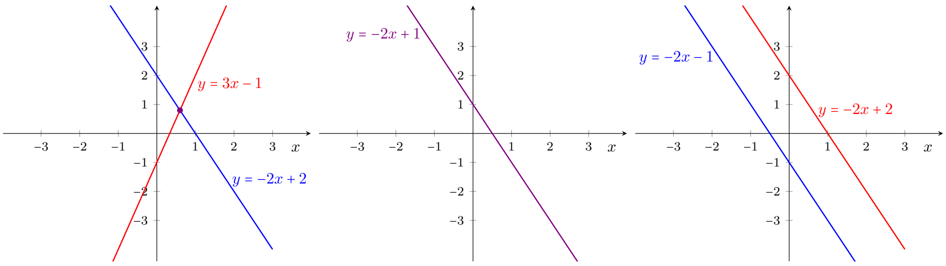
Recordemos que una solución al sistema son valores para x e y que satisfacen ambas igualdades a la vez. Reescribiendo las ecuaciones del sistema obtenemos

$$\begin{cases} y & = & \frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}, \\ y & = & \frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2}, \end{cases}$$

siempre que b_1 y b_2 sean distintos de cero. Si $b_1 = 0$ primera ecuación se reescribe como $x = \frac{c_1}{a_1}$, lo que corresponde a una recta vertical, y análogamente se procede si $b_2 = 0$. Entonces se puede observar que cada ecuación de un sistema de dos ecuaciones lineales, corresponde a la de una recta. Un punto (x, y) será solución del sistema si satisface ambas ecuaciones a la vez, lo que significa que debe pertenecer a ambas rectas. Gráficamente hay solo 3 posibilidades para dos rectas:

- Que se corten en un único punto: solución única.
- Que sean la misma recta (son coincidentes): infinitas soluciones.
- Que no se corten (son paralelas): sin solución.

Ilustramos a continuación estas posibilidades.



Ya que resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas equivale a encontrar la intersección de las dos rectas involucradas, podemos utilizar la herramienta  para hallar dicho punto en caso de que exista. El comando correspondiente a esta herramienta es Interseca, como ya se indicó en la página 166.

Ejemplo 179. Determinar, sin resolver, la cantidad de soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} y &= 4x - 3, \\ y &= \frac{7}{5}x + 8. \end{cases}$$

Solución: Puesto que las dos rectas involucradas no tienen la misma pendiente, estas no serán paralelas. Además es claro que no son la misma recta, por lo que la única opción es que se intersequen en un único punto. En otras palabras, el sistema tiene una sola solución única, por lo que es compatible determinado. «

Ejemplo 180. La compañía A de telefonía celular ofrece un abono mensual que consiste en \$370 de base, más \$1 por cada minuto de llamada*. Por otro lado, la compañía B ofrece un plan de \$50 de base, más \$5 por cada minuto de llamada utilizado. Hallar el costo mensual de cada empresa en función de los minutos de llamada utilizados y determinar para qué cantidad de minutos ambos planes tiene el mismo precio, y cuál es dicho importe. A partir de la gráfica, determinar además qué compañía ofrece un plan más conveniente según el uso.

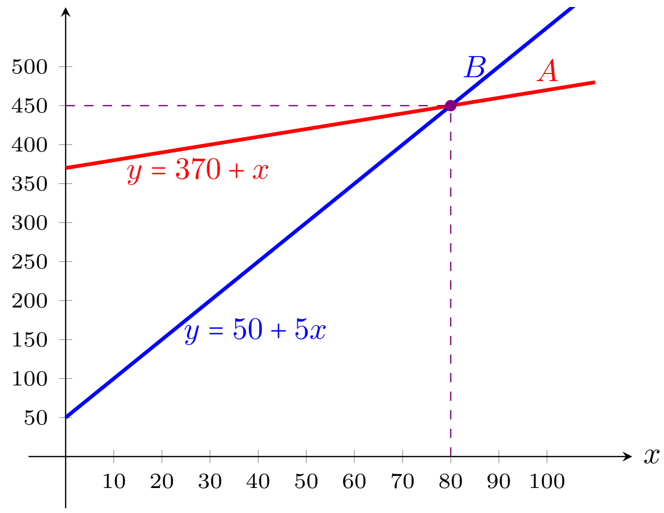
Solución: Sea x la cantidad de minutos de llamada utilizados en el mes. El costo mensual de la compañía A está dado por $f(x) = 370 + x$, mientras que el de

*Recordemos que estamos considerando el tiempo como "continuo", lo que nos permite suponer que el costo de la llamada se fracciona por cada instante utilizado, sin importar lo pequeño que sea.

la compañía B es $g(x) = 50 + 5x$. Para hallar la cantidad de minutos para los cuales los importes de ambas compañías coinciden, debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} y = 370 + x, \\ y = 50 + 5x. \end{cases}$$

Esto equivale a hallar la intersección de las rectas graficadas a continuación:



Resolviendo por igualación obtenemos

$$370 + x = 50 + 5x \;\Leftrightarrow\; 320 = 4x \;\Leftrightarrow\; x = 80.$$

Reemplazando en cualquiera de las ecuaciones se obtiene $y = 450$. Esto significa que si se utilizan 80 minutos mensuales, entonces el precio de ambos planes es de \$450. Como se puede observar en el gráfico, si un usuario consume menos de 80 minutos mensuales, le conviene el plan que ofrece la compañía B, pero si los supera entonces le conviene contratar a la compañía A. «

Ejemplo 181. Brenda y Franco viven sobre una calle recta, a una distancia de 780 metros, y deciden salir caminando al mismo tiempo desde sus respectivas casas hacia la del otro. Ambos caminan a velocidad constante durante su recorrido, pero uno más rápido que el otro: Brenda avanza 28 metros por minuto, mientras que Franco recorre 148 metros en 4 minutos. Determinar cuánto demoran en encontrarse y la distancia recorrida por cada uno hasta ese momento. Además, calcular el tiempo que demora Franco en llegar a la casa de Brenda, suponiendo que mantiene la misma velocidad.

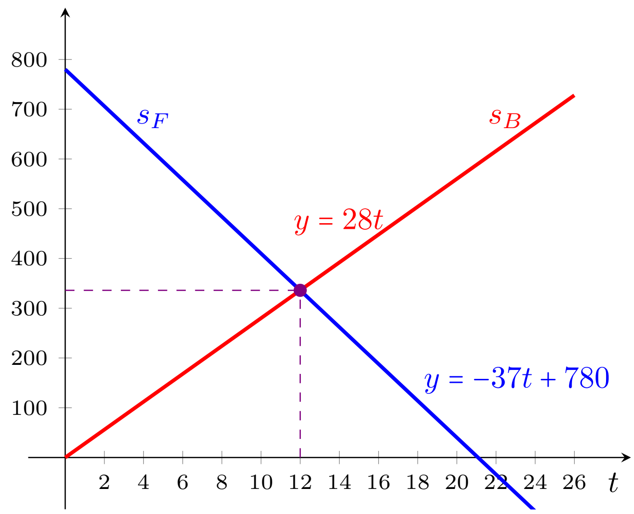
Solución: La velocidad de Brenda es de 28 metros por minuto. La velocidad de Franco la podemos calcular con la fórmula de la pendiente con los puntos $(0, 0)$ y $(4, 148)$, o bien por regla de tres simple, para concluir que es de 37 metros por minuto. Sabemos que en un MRU la posición en función del tiempo está dada por

$$s(t) = vt + s_0,$$

siendo s_0 la posición inicial y v la velocidad. Supongamos que nuestro punto de referencia es la casa de Brenda, es decir, ubicamos allí el origen de coordenadas. Entonces, las posiciones de Brenda y Franco están dadas respectivamente por:

$$s_B(t) = 28t, \qquad s_F(t) = -37t + 780,$$

donde t indica los minutos desde el momento de la salida. Observar el signo menos en la velocidad de Franco, que indica que caminan en direcciones opuestas (cuando Franco camina, se acerca a la casa de Brenda). Gráficamente, la distancia de cada uno a la casa de Brenda luego de t minutos de haber salido se representa en la figura siguiente:



El punto de intersección de las dos rectas corresponde a la solución del sistema

$$\begin{cases} y = 28t, \\ y = -37t + 780, \end{cases}$$

la cual es $t = 12$ e $y = 336$. Es decir, se encontrarán a los 12 minutos de haber salido, Brenda habrá recorrido 336 metros, con lo cual Franco habrá recorrido $780 - 336 = 444$ metros. Finalmente, el tiempo que demora Franco en llegar hasta la casa de Brenda corresponde a hallar t tal que $s_F(t) = 0$ (recordemos que ubicamos el origen en la casa de Brenda). Entonces resolvemos

$$0 = -37t + 780 \Leftrightarrow t = \frac{780}{37} \approx 21,$$

lo que nos dice que demorará 21 minutos aproximadamente, lo que coincide con lo obtenido en el gráfico. «

Ejercicios 5.3

1. Hallar gráfica y analíticamente la intersección de las rectas de ecuaciones $y = -3x + 1$ e $y = 2x - 4$.

2. Determinar, sin resolver el sistema, si las rectas $y = 4x + 2$ e $y = 4x + \sqrt{2}$ se intersecan en algún punto. Justificar.

3. Resolver gráfica y analíticamente los siguientes sistemas:

$$\text{(a)}\left\{\begin{array}{rcl} y & = & -3x + 6 \\ y & = & 2x + 1 \end{array}\right. \qquad \text{(b)}\left\{\begin{array}{rcl} 2y - 8x & = & 4 \\ -3x - y + 2 & = & 0 \end{array}\right.$$

4. Dentro de 9 años, la edad de Matías superará en 4 años a la mitad de la edad de su hermana Clara. Determinar la edad que tienen hoy ambos, sabiendo que cuando Matías nació, Clara tenía 3 años.

5. Se dispone de la siguiente información* (por kilogramo) sobre los alimentos mencionados:

- Banana: 1000 calorías y 10 gramos de proteínas.
- Helado de crema: 2000 calorías y 40 gramos de proteínas.

Al llegar a su nutricionista, un paciente afirmó que desde la consulta anterior hasta ese día, con lo que consumió de bananas y helado de crema ingirió 4400 calorías y 60 gramos de proteínas. Hallar gráfica y analíticamente la cantidad de bananas y de helado de crema que consumió.

6. En un club el valor mensual de la cuota societaria es de \$480, pero no incluye el acceso a la pileta de natación. Este acceso tiene un costo diario de \$120, con un descuento del 40 % para socios.

(**a**) Hallar la función que determine el costo mensual en función de la cantidad de días de acceso a la pileta para cada caso (socios y no socios), y graficar ambas rectas en un mismo sistema.

(**b**) Determinar la cantidad de días de acceso a la pileta que implican el mismo costo mensual para socios y no socios.

(**c**) Si una persona desea ingresar a la pileta 6 días al mes, ¿le conviene o no asociarse? ¿Y si quiere ingresar 14 días?

7. Sheila es estudiante de medicina, y debe comprarse un estetoscopio y un martillo para evaluar reflejos. El martillo cuesta la mitad de lo que cuesta el estetoscopio, y el precio por ambos artículos es de \$675. Determinar gráfica y analíticamente el precio de cada uno.

*Datos aportados por la Lic. en Nutrición Melina Flesia (M. P. 560), redondeados para facilitar los cálculos.

8. Un comerciante invierte su dinero en dos productos: uno da un 6 % de ganancia, y el otro da 10 %. Sin embargo, decide usar el doble de dinero para el producto que rinde menos, porque es más fácil de vender. Si la ganancia resultó de $3300, ¿cuánto invirtió en cada producto?

9. Se dipone de dos soluciones de salmuera (más de un litro de cada una), una contiene 5 % de sal y otra contiene 20 % de sal. ¿Cuántos mililitros de cada solución se deben mezclar para obtener 1 litro de una solución que contenga 18 % de sal?

10. Se necesita formar una pintura violeta que contenga 40 % de rojo y 60 % de azul. Para hacerlo se dispone de dos tarros de pintura de un litro cada uno que se componen de la siguiente forma: el primero contiene 25 % de rojo y 75 % de azul, y el segundo está formado por 55 % de rojo y 45 % de azul. Indicar la cantidad de cada tarro necesaria que hay que tomar para formar uno (es decir, de un litro de pintura) del color deseado.

11. En un teatro, un cierto día se vendieron un total de 658 entradas, entre un espectáculo infantil y una comedia para adultos. Sabiendo que la cantidad de asistentes al primero es igual a $\frac{4}{3}$ de la cantidad de asistentes al segundo, determinar el número de entradas vendidas para cada uno.

12. Un excursionista realizó en dos tramos una caminata de 40 kilómetros en una montaña. Lo recorrido durante el primer tramo excede en 4 al doble de los kilómetros caminados durante el segundo. Determinar la cantidad de kilómetros recorridos en cada tramo.

13. Un detective fue contratado para descifrar un antiguo código secreto compuesto por 8 dígitos, en el cual los primeros 4 corresponden al año de nacimiento de Leonardo, y los últimos 4 al año de nacimiento de su hija Isabel. Pudo averiguar que Isabel nació el día que Leonardo cumplía 23 años de edad, y que en el año 1850 la edad de Isabel excedía en 10 años a la mitad de la edad de Leonardo. ¿Cuál es el código?

14. Replantear las ecuaciones del Ejemplo 181 colocando el origen de coordenadas en la casa de Franco. Luego, resolverlo utilizando GeoGebra.

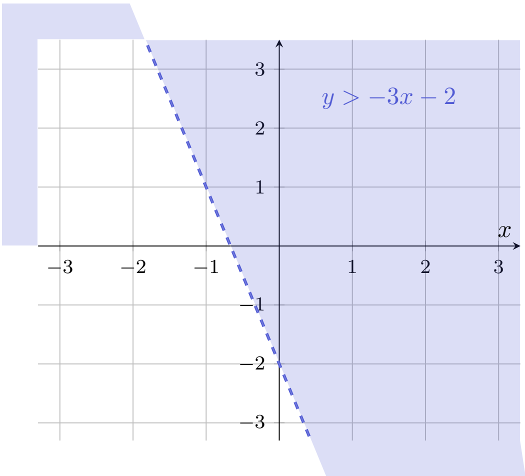
15. Utilizar GeoGebra para resolver los siguientes sistemas:

$$\textbf{(a)}\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 4y = 7 \end{cases} \qquad \textbf{(b)}\begin{cases} 8x - 2y = 5 \\ -12x + 3y = 7 \end{cases}$$

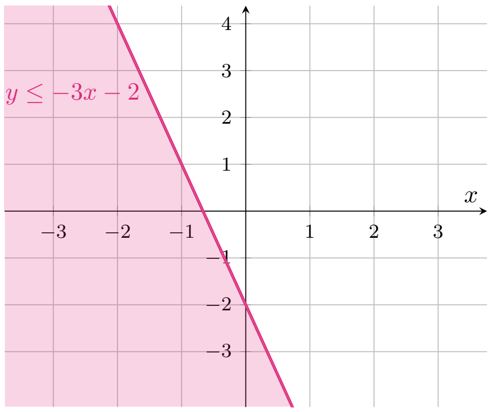
$$\textbf{(c)}\begin{cases} x - y = 1 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases} \qquad \textbf{(d)}\begin{cases} -2x + y = 1 \\ 6x - 3y = -3 \end{cases}$$

5.4. Sistemas de inecuaciones lineales

Sabemos que una expresión de la forma $y = -3x - 2$ se representa gráficamente en el plano como una recta. En otras palabras, los puntos que satisfacen la *igualdad* son los que están *sobre* dicha recta. Luego, la desigualdad $y > -3x - 2$ la satisfacen todos los puntos que quedan estrictamente *por encima* de dicha recta:



Notar que a la recta en el dibujo anterior la graficamos con línea de puntos porque el signo mayor es estricto. En cambio, si queremos graficar la región de puntos que satisface la desigualdad $y \leq -3x - 2$, debemos considerar la región que está *por debajo* de la recta, y también *incluyéndola*, pues la desigualdad no es estricta:



Estas desigualdades son ejemplos de lo que se conoce como **inecuación lineal con dos incógnitas**, la cual es una desigualdad que posee alguna de las siguientes formas:

$$y < ax + b, \qquad y > ax + b, \qquad y \leq ax + b, \qquad y \geq ax + b,$$

siendo a y b números reales. La primera indica la región de puntos del plano que están debajo de la recta $y = ax+b$, y la segunda representa a los que se encuentran arriba de dicha recta. En estos dos casos el resultado es un **semiplano abierto**, pues no contiene los puntos de la recta frontera. De manera similar, los puntos que satisfacen la tercera inecuación son los que pertenecen a la recta y los que están debajo de ella, mientras que la solución de la última son los puntos que pertenecen a la recta y los que están por encima de ella. En estos casos la región resultante recibe el nombre de **semiplano cerrado**, porque contiene los puntos de la recta frontera. Resumimos esto en la siguiente tabla:

	$y < ax + b$	$y > ax + b$	$y \leq ax + b$	$y \geq ax + b$
Región respecto de la recta $y = ax + b$	debajo	encima	debajo e incluida	encima e incluida
Semiplano	abierto	abierto	cerrado	cerrado

En GeoGebra estas regiones se grafican fácilmente, escribiendo en el campo de entradas la inecuación lineal correspondiente.

En esta sección nos ocuparemos de hallar **gráficamente** las soluciones de un sistema de dos o más inecuaciones lineales con dos incógnitas. Por ejemplo:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y & \leq & c_1, \\ a_2x + b_2y & \leq & c_2, \end{cases}$$

donde a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 son números reales, y las incógnitas son x e y. Las desigualdades en el sistema pueden ser estrictas.

Al igual que antes, la llave indica que todas las inecuaciones deben cumplirse a la vez. Luego, un punto (x, y) será **solución del sistema** si satisface todas las desigualdades que lo componen. Para ello, deberá pertenecer simultáneamente a todas las áreas sombreadas, es decir, a la intersección de todas ellas (que puede resultar vacía).

Resolveremos los sistemas de inecuaciones solamente de manera gráfica. Para ello, el primer paso consiste en llevar todas las funciones afines involucradas a su forma usual, para identificar su pendiente y ordenada al origen y trazar la recta correspondiente, y luego sombrear las regiones correspondientes (luego veremos cómo se procede cuando las rectas son verticales y no provienen de una función afín). Ilustramos el procedimiento resolviendo los sistemas dados a continuación.

Ejemplo 182. **Resolviendo sistemas de inecuaciones lineales.** Resolver gráficamente los siguientes sistemas de inecuaciones

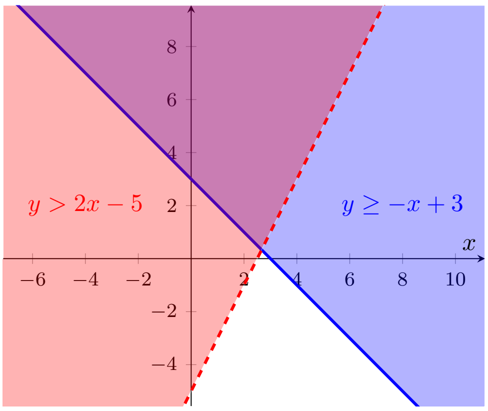
$$S_1 : \begin{cases} x + y & \geq & 3 \\ 2x - y & < & 5, \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} 5x + 2y & > & 6 \\ y - 2x & < & 4, \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x + y & \geq & 3 \\ 2x - y & \leq & 5 \\ -x + 2y & \leq & 3, \end{cases} \qquad S_4 : \begin{cases} y & \leq & x + 1 \\ y & \leq & -x + 2 \\ y & > & 5. \end{cases}$$

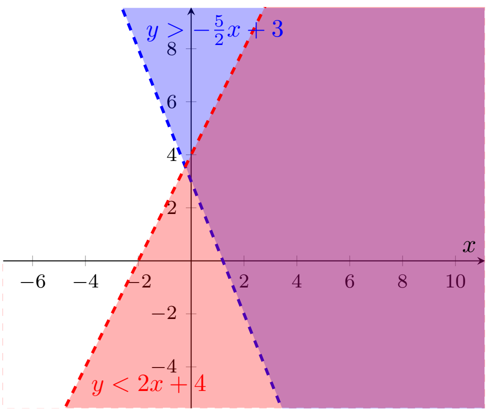
Solución: Para resolver el primer sistema, lo reescribimos como

$$S_1 : \begin{cases} y & \geq & -x + 3 \\ y & > & 2x - 5. \end{cases}$$

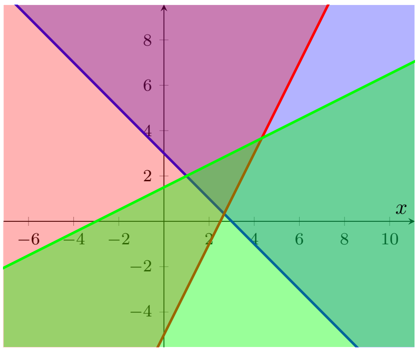
Una vez hecho esto, graficamos la recta $y = -x + 3$ y sombreamos el semiplano que se encuentra por encima de ella. Esta recta se traza con línea entera pues la desigualdad no es estricta, por lo que el semiplano es cerrado (es decir, contiene a la recta). Obtenemos así el área indicada en el gráfico siguiente en color azul. Luego repetimos el procedimiento con la recta $y = 2x - 5$, la cual trazamos en línea de puntos pues la desiguadad ahora en estricta, dando como resultado el semiplano abierto coloreado en rojo. La intersección de estas dos áreas es la solución del sistema S_1 (el "cono" color violeta que continúa hacia arriba).

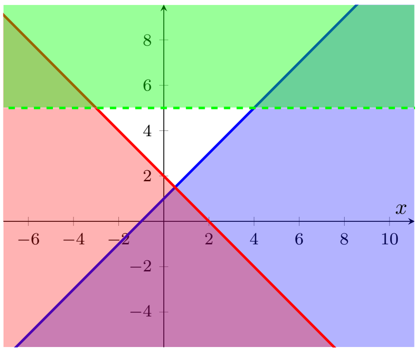


De la misma manera procedemos con S_2, obteniendo el siguiente gráfico en el que nuevamente la solución es el área sombreada en color violeta:



Para los sistemas S_3 y S_4 agregamos el color verde para el área correspondiente a la solución de la tercera inecuación en cada uno. Obtenemos como resultado los siguientes gráficos, respectivamente:





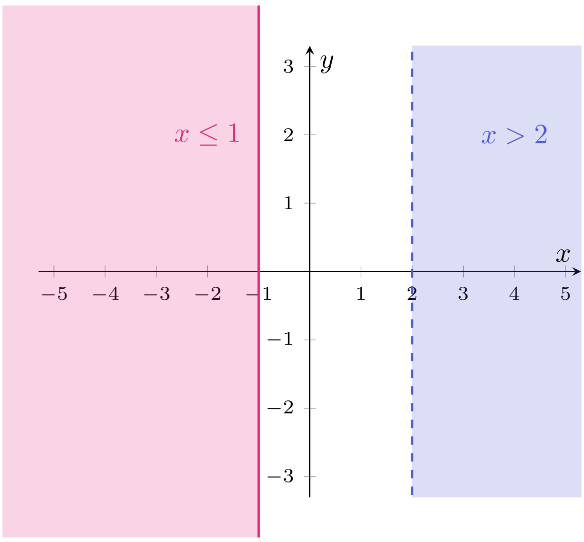
$y \geq -x+3, \; y \geq 2x-5, \; y \leq \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ $\qquad$ $y \leq x+1, \; y \leq -x+2, \; y > 5$

La solución para el sistema S_3 es el triángulo que se ubica en el primer cuadrante, formado por la intersección de las tres áreas sombreadas. Sin embargo, la solución para S_4 es el conjunto vacío, por lo que decimos que el sistema es incompatible. «

En algunos sistemas pueden aparecer además desigualdades del tipo

$$x < c, \qquad x > c, \qquad x \leq c, \qquad x \geq c,$$

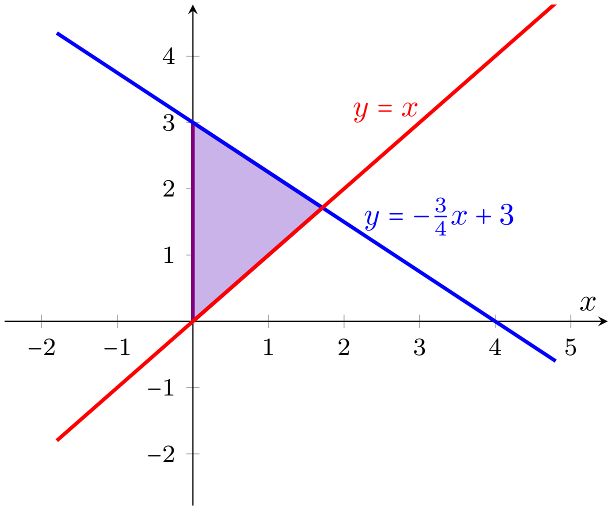
las cuales corresponden a las regiones que quedan a la izquierda o derecha de c. Como antes, estos semiplanos serán abiertos o cerrados, según si la desigualdad es estricta o no. Ilustramos esto a continuación:



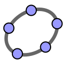
Ejemplo 183. Resolver gráficamente el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 4y & \leq & 12 \\ y - x & \geq & 0 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0. \end{cases}$$

Solución: Para la primera inecuación graficamos la recta $y = -\frac{3}{4}x + 3$, y sombreamos el semiplano cerrado que se encuentra debajo de ella. Para la segunda, trazamos la recta $y = x$ y sombreamos el semiplano cerrado superior. De la intersección de estas dos áreas, solamente debemos quedarnos con la parte que pertenezca al primer cuadrante, que es lo que indican las dos últimas inecuaciones $x \geq 0$ e $y \geq 0$. El resultado es el siguiente:



«


En GeoGebra los sistemas de inecuaciones se resuelven gráficamente ingresando cada una de las inecuaciones que lo componen, en un mismo gráfico.

Aplicación: problemas de optimización.

Una de las aplicaciones más importantes de los sistemas de inecuaciones lineales se encuentra en la **programación lineal**, que es una rama de la matemática cuyo objetivo es maximizar o minimizar (lo que significa hallar el máximo o mínimo valor posible, según el caso, y se resume diciendo “optimizar”) una cantidad de la forma $ax + by + c$, denominada **función objetivo**, de manera que sus variables x e y cumplan una serie de **restricciones**. Estas restricciones se expresan mediante un sistema de inecuaciones lineales, y la solución de este sistema se denomina **región factible** para el sistema dado. Esta región está constituida, entonces, por los posibles valores que pueden tomar las variables, de manera que se cumplan todas las restricciones. Cualquier punto en ella es una **solución factible**.

Como vimos en los ejemplos, para problemas con dos incógnitas x e y, la región factible puede ser acotada, no acotada o vacía. Si no es vacía, dentro de esas posibles soluciones debemos buscar la que optimice la función objetivo. Por ejemplo, si nuestra función objetivo es la ganancia de una empresa, buscaremos maximizarla, pero si se trata de los gastos de la empresa, debemos minimizarla. Eso es lo que se conoce como "optimizar" la función objetivo. A la solución que optimiza la función objetivo se la conoce como **solución óptima** para el problema, y en caso de existir puede no ser única (se dice que hay soluciones alternativas). El **valor óptimo** es el valor que toma la función objetivo en la solución óptima. Consideraremos aquí solamente problemas con valor óptimo finito y con solución óptima única.

La propiedad fundamental que posee la solución óptima para este tipo de problemas, es que se encontrará en uno de los vértices del polígono que delimita la región factible. Por lo tanto, una vez graficada esta región (que queda determinada por las restricciones del problema), solamente hay que evaluar la función objetivo en sus vértices y elegir el valor que más nos conviene.

La cantidad $ax + by + c$ se denota por $f(x, y)$, para indicar que son x e y los que pueden variar (dentro de los valores posibles o factibles), produciendo diferentes resultados para dicha cantidad*. Por este motivo recibe el nombre de *función* objetivo.

Resumiendo, los pasos para optimizar una función objetivo de la forma $f(x, y) = ax + by + c$, sujeta a ciertas restricciones para las variables x e y, son los siguientes:

1 Plantear el sistema de inecuaciones lineales dado por las restricciones.

2 Resolverlo gráficamente (región factible).

3 Determinar los vértices de la región factible. Los mismos pueden calcularse hallando las intersecciones entre las rectas que definen las restricciones.

4 Evaluar la función objetivo f en dichos vértices, y elegir el punto que dé como resultado el valor más conveniente.

Ejemplo 184. **Maximizando la ganancia.** Una empresa produce dos tipos de artículos: lápices y biromes, y tiene una capacidad de producción diaria de 6000 ar-tículos en total. Las condiciones de funcionamiento de las máquinas obligan a que la cantidad de lápices producidos al día debe ser al menos la quinta parte de la cantidad de biromes, y como máximo, el triple de la misma. La ganancia de la empresa es de $2 por cada lápiz y $3 por cada birome vendida. Suponiendo que se vende todo lo que se produce al día, determinar la cantidad de lápices y biromes que conviene producir diariamente para obtener una ganancia máxima, y determinar el importe de la misma.

*Una regla que asigna a cada par de números reales (x, y) un y sólo un número real z se conoce como **función de dos variables**.

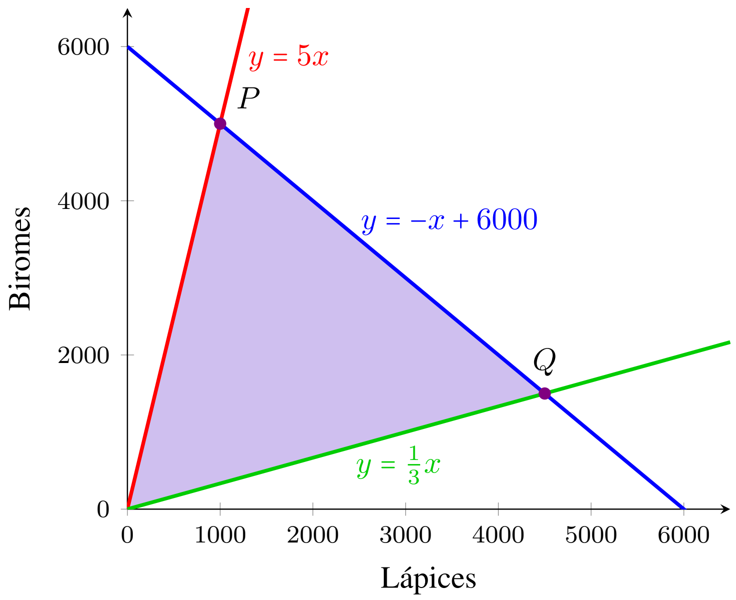
Solución: Denotemos con x a la cantidad de lápices fabricados por día, y con y a la cantidad de biromes. Entonces la función que debemos maximizar (ganancia), está dada en pesos por

$$\text{Función objetivo:} \quad f(x,y) = 2x + 3y.$$

Las restricciones sobre la producción son las siguientes: la producción total (es decir, la cantidad de lápices más la de biromes) no puede exceder los 6000 artículos ($x + y \leq 6000$); la cantidad de lápices debe ser al menos la quinta parte de la cantidad de biromes ($x \geq \frac{1}{5}y$), y puede ser a lo sumo el triple de la misma ($x \leq 3y$). Esto produce el siguiente sistema:

$$\text{Restricciones} \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & \leq & 6000 \\ x & \geq & \frac{1}{5}y \\ x & \leq & 3y \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0, \end{array} \right.$$

donde las dos últimas desigualdades se agregan ya que la cantidad a fabricar no puede ser negativa. La región factible para el problema es la solución de este sistema, la cual se da en el siguiente gráfico:



Entonces cualquier punto en la región sombreada satisface las restricciones (por supuesto que, por el contexto del problema, buscamos puntos con coordenadas enteras). Sabemos que la solución óptima se dará en alguno de los vértices de la región factible: el origen (el cual descartamos porque no produce ganancia alguna), $P = (1000, 5000)$, o $Q = (4500, 1500)$. Los puntos P y Q pueden obtenerse analíticamente igualando las ecuaciones de las rectas correspondientes (es decir, resolviendo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas como en la Sección 4.4). Veamos qué ganancia se obtiene al fabricar estas cantidades:

$$f(1000, 5000) = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 5000 = 17000,$$

$$f(4500, 1500) = 2 \cdot 4500 + 3 \cdot 1500 = 13500.$$

Por lo tanto, la ganancia máxima se alcanzará al producir 1000 lápices y 5000 biromes, con lo cual el beneficio es de \$17000. «

Ejemplo 185. Minimizando los costos. Tenemos la siguiente información (por kilogramo) sobre dos alimentos diferentes A y B:

Alimento A: 1000 calorías, 25 gramos de proteínas, \$80 de costo.
Alimento B: 2000 calorías, 100 gramos de proteínas, \$230 de costo.

Hallar el costo mínimo de una dieta formada solamente por estos dos alimentos, que aporte al menos 3000 calorías y 100 gramos de proteínas.

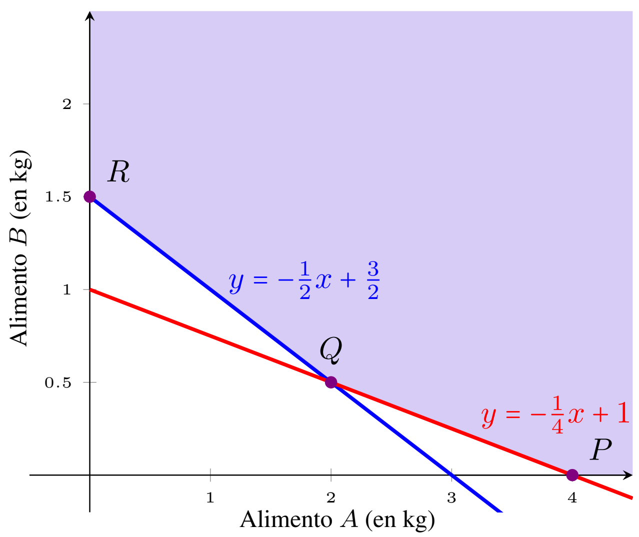
Solución: Denotemos con x a la cantidad de alimento A, y con y a la cantidad de alimento B, ambos en kilogramos. Debemos minimizar el costo, el cual está dado en pesos por

$$\text{Función objetivo:} \quad f(x, y) = 80x + 230y,$$

donde las variables deben satisfacer las siguientes condiciones:

$$\text{Restricciones} \begin{cases} 1000x + 2000y & \geq & 3000 \\ 25x + 100y & \geq & 100 \\ x, y & \geq & 0. \end{cases}$$

La región factible para estas restricciones es la siguiente:



Ahora solamente resta evaluar la función objetivo en los valores dados por los puntos P, Q y R, para luego elegir el más conveniente:

$$\begin{aligned} P &= (4,0) \text{ implica un costo de } 80\cdot 4 + 230\cdot 0 = 320 \text{ pesos,}\\ Q &= (2,0.5) \text{ implica un costo de } 80\cdot 2 + 230\cdot 0.5 = 275 \text{ pesos,}\\ R &= (0,1.5) \text{ implica un costo de } 80\cdot 0 + 230\cdot 1.5 = 345 \text{ pesos.} \end{aligned}$$

Entonces el costo mínimo se obtiene con 2 kilogramos del alimento A y medio kilogramo del alimento B, siendo el mismo de \$275. «

Ejercicios 5.4

1. Determinar los cuadrantes que componen el semiplano solución de $x \geq 0$. ¿El eje y pertenece a dicho semiplano?

2. Determinar los cuadrantes que componen el semiplano solución de $y < 0$. ¿El eje x pertenece a dicho semiplano?

3. Determinar el cuadrante solución de los siguientes sistemas:

$$\textbf{(a)}\begin{cases} x & > 0\\ y & < 0 \end{cases} \quad \textbf{(b)}\begin{cases} x & < 0\\ y & < 0 \end{cases} \quad \textbf{(c)}\begin{cases} x & < 0\\ y & > 0 \end{cases} \quad \textbf{(d)}\begin{cases} x & > 0\\ y & > 0 \end{cases}$$

4. Representar gráficamente las soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones lineales:

$$S_1 : \begin{cases} 3x + y & \leq & 4\\ -2x + y & > & 0 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} 3x + y & > & 4\\ -2x + y & \leq & 0 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} 4x + 2y & \geq & 4\\ 4x + 2y & < & -6 \end{cases} \qquad S_4 : \begin{cases} 4x + 2y & \geq & 4\\ 4x + 2y & \geq & -6 \end{cases}$$

$$S_5 : \begin{cases} y & > & -x - 3\\ y & \leq & \frac{1}{2}x + 2\\ y & > & x - 4 \end{cases} \qquad S_6 : \begin{cases} y & \leq & -3x + 6\\ y & \leq & 2x\\ y & > & -3 \end{cases}$$

$$S_7 : \begin{cases} y & \leq & -3x + 6\\ y & \leq & 2x\\ y & > & -3\\ x & \geq & 1 \end{cases} \qquad S_8 : \begin{cases} y & \leq & -3x + 6\\ y & \leq & 2x\\ y & > & -3\\ x & < & -4 \end{cases}$$

5. Verificar lo obtenido en el ejercicio anterior mediante GeoGebra.

6. En una fábrica se producen dos tipos distintos de cerveza artesanal: rubia y negra. Para ellos se utilizan dos materias primas: malta y levadura. Se cuenta con la siguiente información:

- Materia prima disponible: 30 unidades de malta, 45 de levadura.
- Materia prima necesaria para producir un litro de cerveza:
  - Rubia: 1 unidad de malta, 2 de levadura.
  - Negra: 2 unidades de malta, 1 de levadura.
- Precio de venta por litro: \$65 la rubia, \$50 la negra.

Plantear el sistema con las restricciones del problema y graficar la región factible. Luego determinar la cantidad a fabricar de cada tipo de cerveza de modo que el ingreso sea máximo, e indicar el valor del mismo.

7. Verónica fabrica collares y pulseras, para los cuales utiliza la siguiente materia prima: perlas, piedras y cadena. Ella recopiló los siguientes datos:

- Materia prima disponible: 150 perlas, 48 piedras, 6 metros de cadena.
- Materia prima necesaria para armar cada artículo:
  - Collar: 15 perlas, 4 piedras, 60 cm de cadena.
  - Pulsera: 10 perlas, 4 piedras, 20 cm de cadena.
- Ganancia por unidad: \$70 por collar, \$52 por pulsera.

Plantear el sistema con las restricciones del problema y graficar la región factible. Luego determinar la cantidad de cada artículo que debe fabricar para que el beneficio sea máximo, e indicar el valor del mismo.

8. Para fabricar un fertilizante se utilizan tres nutrientes primarios: nitrógeno (símbolo químico N), fósforo (P) y potasio (K). Una persona dispone de dos fertilizantes, sobre los cuales tiene la siguiente información:

- Unidades de nutrientes por cada litro de fertilizante:
  - Fertilizante 1: 2 de N, 2 de P, 1 de K.
  - Fertilizante 2: 1 de N, 2 de P, 3 de K.
- Costo de cada litro de fertilizante: \$30 el primero, \$20 el segundo.

Se desea obtener una mezcla de estos dos fertilizantes, que posea al menos 7 unidades de N, 12 de P y 10 de K.

(a) Hallar la mejor forma de mezclar los fertilizantes existentes de manera de minimizar el costo.

(b) ¿Cuántos litros posee la mezcla obtenida? ¿Cuántas unidades de cada nutriente posee?

(**c**) ¿Cuál es el costo de **cada litro** de esta mezcla? ¿Cuántas unidades de cada nutriente posee cada litro de la mezcla?

(**d**) ¿Qué porcentaje de cada fertilizante posee la mezcla?

9. Daiana fabrica tazas y mates de cerámica estampados, para lo cual utiliza calcomanías vitrificables negras y de color. Para cada taza emplea dos negras y una de color, y obtiene una ganancia de \$30, mientras que por cada mate emplea dos negras y dos de color, y la ganancia es de \$50. Si dispone de 500 calcomanías negras y 300 de color, ¿cuántas tazas y mates debe producir para maximizar la ganancia? ¿Cuál es el importe de la misma?

10. Supongamos que en el problema anterior, Daiana desea entregar una cuchara con cada taza y una bombilla con cada mate, lo cual no afecta el importe de la ganancia. Sin embargo, Daiana dispone solamente de 130 cucharas y 120 bombillas, y no está dispuesta a vender los productos sin su accesorio correspondiente.

(**a**) Plantear el sistema con las restricciones del problema y graficar la región factible.

(**b**) Indicar la cantidad de tazas y mates que debe producir para que la ganancia sea máxima, y cuál es su importe.

(**c**) Determinar si al fabricar la cantidad óptima quedan calcomanías sin utilizar. En tal caso, indicar el tipo y cantidad sobrante.

5.5. Función cuadrática

Nos ocuparemos ahora de analizar las funciones polinómicas de grado 2, es decir, las funciones de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

siendo a, b y c números reales, con $a \neq 0$. Una función de este tipo es llamada **función cuadrática**. Por ser una función polinómica, su dominio es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Ejemplo 186. Las siguientes son funciones cuadráticas:

$$y = 3x^2 - 5x + 4, \qquad y = -\tfrac{1}{4}x^2 + 5x,$$

$$y = x^2 - 6, \qquad y = -4x^2, \qquad y = \pi x + 5 - 4x^2.$$ «

El primer paso será analizar el aspecto de la gráfica correspondiente a una función cuadrática, para lo cual recurriremos a una tabla de valores. El objetivo será detectar su “forma”, y el efecto producido en ella por cada uno de los parámetros a, b y c.