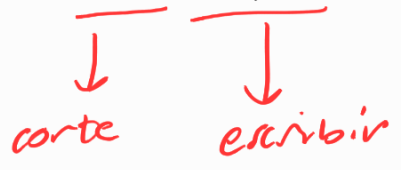
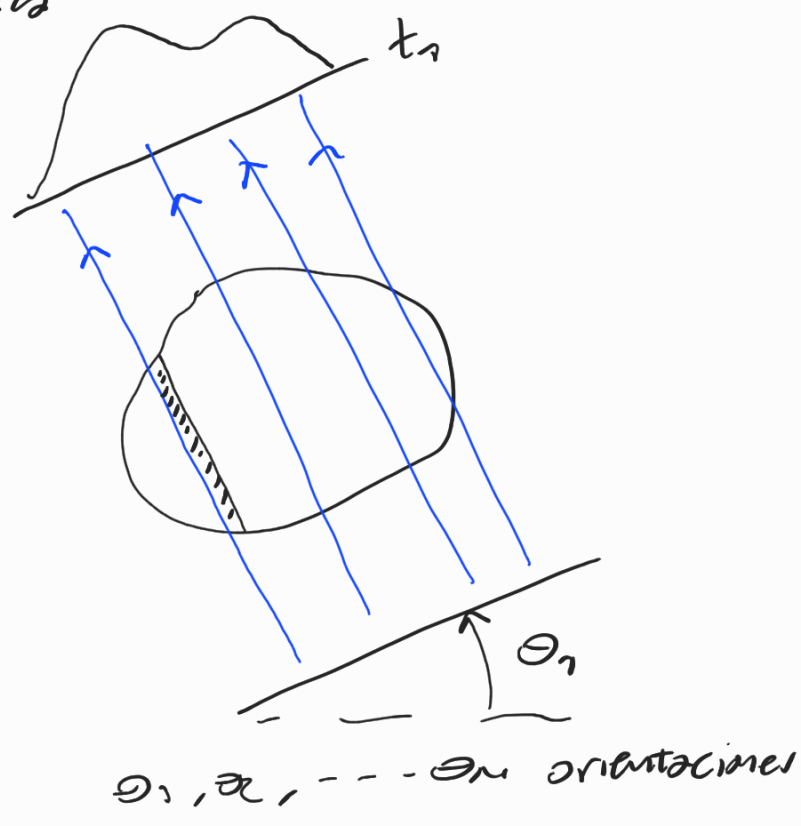
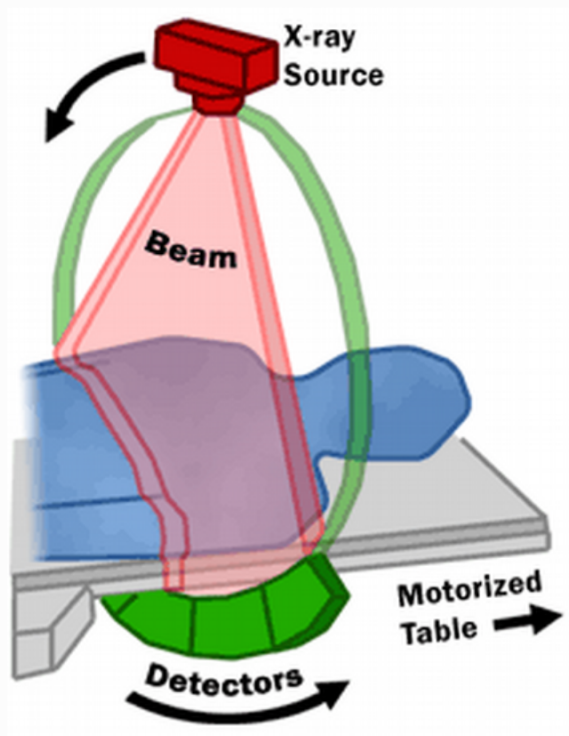


Reconstrucción a partir de proyecciones

Imaginaria Tomográfica



Motivación (entre varios): imaginaria médica → CT Tomografía Computada



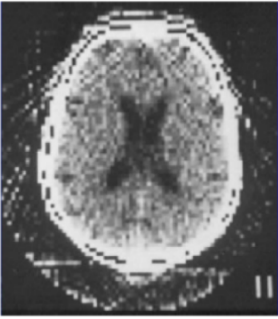
perfil de intensidad que en cada punto corresponde a la intensidad a lo largo

de la línea de $f(x, y)$

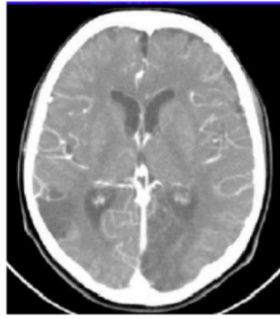
coeficiente de atenuación del medio (μ)

$$(I_d = I_0 e^{-\int_0^d \mu(s) ds})$$

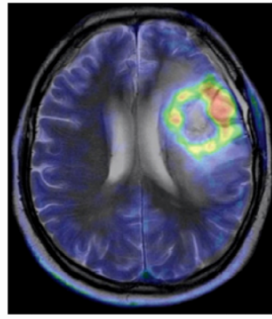
1974



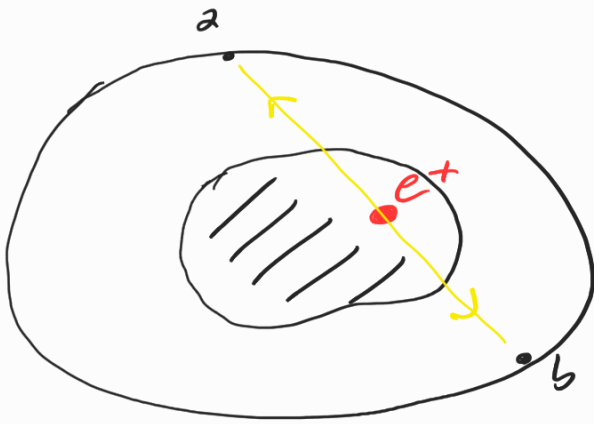
1994



2014



• otros ejemplos médicos: PET (Tomografía de Emisión de Positrones)



• La fotografía también es una proyección!
(veremos al final la conexión con LF)

Integrales de línea y proyecciones

$f(x,y)$: función 2D que representa el objeto

(θ, t) : parámetros de la línea

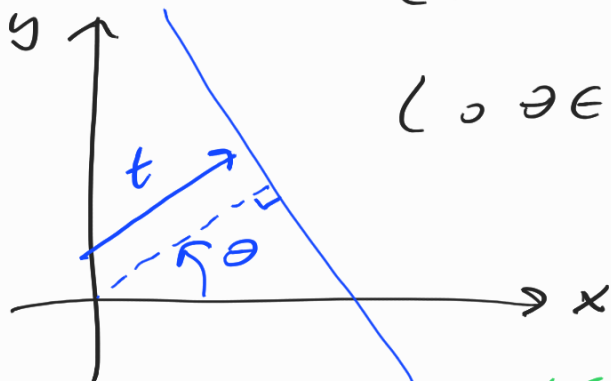
parametrización

normal de

la recta

$$(\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$$

$$(0 \leq \theta \in [0, \pi))$$



$$\rightarrow \text{obs. } (t(\theta + \pi) = -t(\theta))$$

$$t = x \cos \theta + y \sin \theta$$

• proyección sobre la recta:

$$P_{\theta}(t) = \int_{(\theta, t)} f(x, y) ds$$

• Consideremos ahora la delta de Dirac generalizada:

$$\delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t)$$

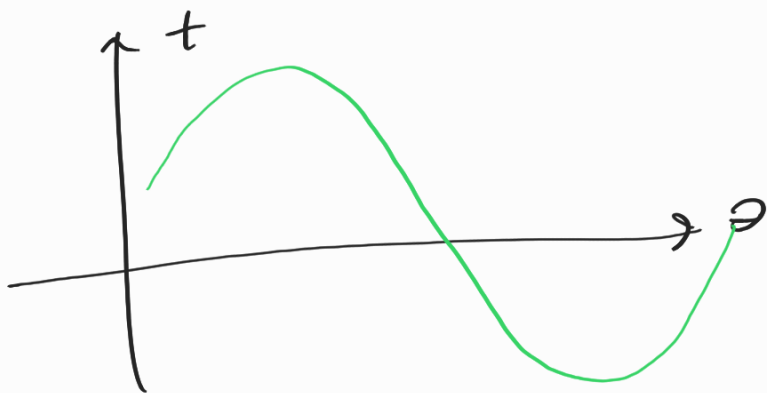
(ec. recta)

$$\Rightarrow P_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int dx dy f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t)$$

• Transformada de Radon de $f(x, y)$

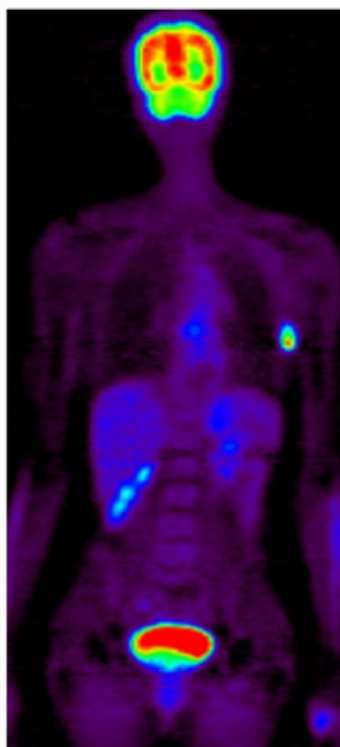
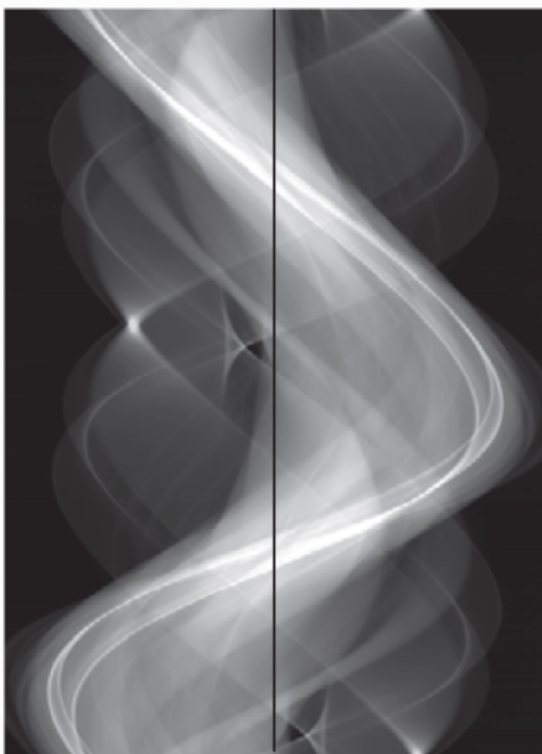
Def: si $f(x, y) = \delta(x - x_0, y - y_0)$ (fuente puntual)

$$\Rightarrow t = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta$$



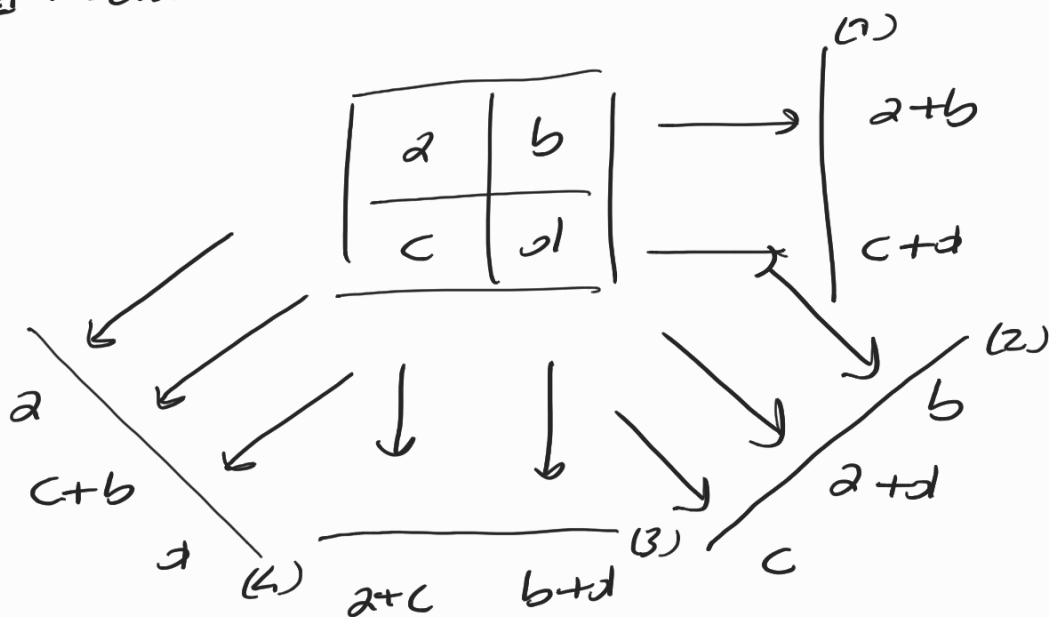
para cada (x_0, y_0) tengo una transformada que es una sinusoidal

\Rightarrow La transformada de Radon es un sinograma de $f(x, y)$



¿Cómo invertimos nuestra información dada en proyecciones?

☐ Hacia la inversión de las proyecciones // back projection



• ¿Cómo recuperamos el objeto a partir de las proyecciones?

Comienza por distribuir sobre la línea de integración,

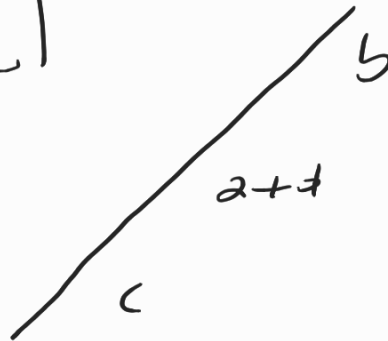
El valor de la proyección:
 par (1) de back proj.

$a+b$	$a+b$
$c+d$	$c+d$

$a+b$
$c+d$

par (2)!

$a+b+a+d$	$a+b+b$
$c+d+c$	$c+d+a+d$



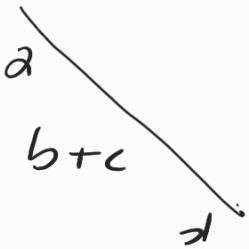
par (3)!

$a+b+a+d$	$a+b+b$
$+a+c$	$+b+d$
$c+d+c$	$c+d+a+d$
$+a+c$	$+b+d$

$a+c$ $b+d$

Parte (4) de back-projection!

$a + b + a + d$	$a + b + b$
$+ a + c + a$	$+ b + d$ $+ b + c$
$c + d + c$	$c + d + a + d$
$+ a + c$ $+ b + c$	$+ b + d + d$



• Luego: resto la suma de la proyección: $a + b + c + d$

a	$+a$	$+b$
$+a$		$+b$ $+b$
	$+c$	$+d$
$+c$ $+c$		$+d + d$

• Finalmente: divide entre: $n-1$ ($4-1=3$)

seando n el n^2 de proyecciones

a	b
c	d



• Ahora vea el caso en el continuo:

$$b(x, y) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_{\theta}(t) dt$$

(Junto todas las 121 proyecciones (condiciones)

y represento con

ello la función que quieras)

$$b(x, y) = f(x, y) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \otimes$$

me aparece un blurring

por la multiplicidad muy

alta del origen en la integración

¿Podré esquivarme los problemas anteriores en el espacio de frecuencias?

Teorema de Fourier del Corte de Proyección

(Fourier Slice Theorem o Central Slice Theorem)

$$\text{Sea } F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux + vy)} dx dy$$

(transf. de Fourier (2D) de f)

$$P_{\theta}(t) = \int_{\text{recta}(\theta, t)} f(x, y) ds \quad : \text{ proyección}$$

Consideremos la transformada de la proyección (TF 1D):

$$S_{\theta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\theta}(t) e^{-j2\pi\omega t} dt$$

• Caso simple: $\theta=0$ (se restringe la transformada a $\nu=0$):

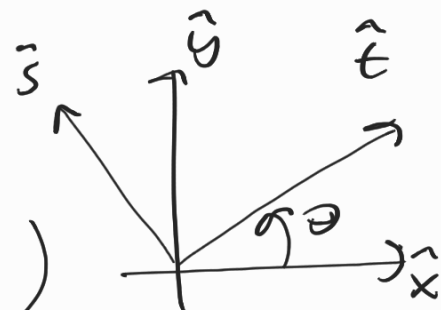
$$\begin{aligned} \boxed{F(u, \rho)} &= \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi u x} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dy f(x, y) \right)}_{P_{\theta=0}(x)} e^{-j2\pi u x} = \boxed{S_{\theta=0}(x)} \end{aligned}$$

\Rightarrow (I) $f(x, y)$, proyectar y hacer la TF (1D) de la proyección
 (II) TF (2D) $f(x, y)$, tomar un corte a lo largo de una recta que pasa por el origen

(I) y (II) son equivalentes

Obt: para un ángulo θ arbitrario

$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



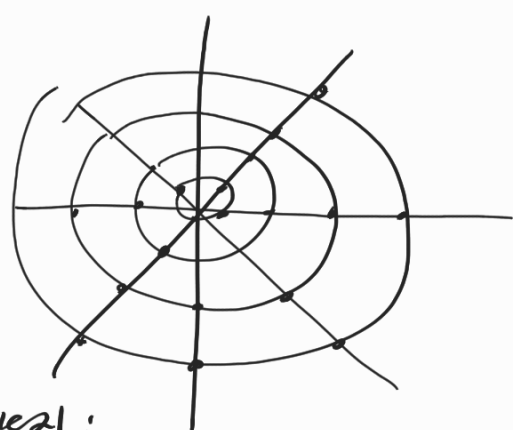
$$P_{\theta}(t) = \int ds f(t, s)$$

$$S_{\theta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\theta}(t) e^{-j2\pi\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} ds f(t, s) \right) e^{-j2\pi\omega t} dt$$

$$e^{-j2\pi\omega t} dt \stackrel{\times \cos + j \sin}{=} \dots \quad F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) = F(\omega, \theta) \checkmark$$

⇒ Tomando las proyecciones para $\theta_1, \dots, \theta_N$ podemos tener

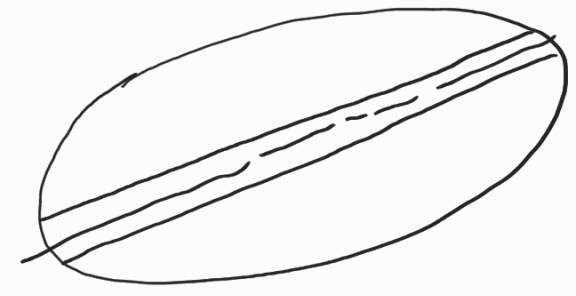
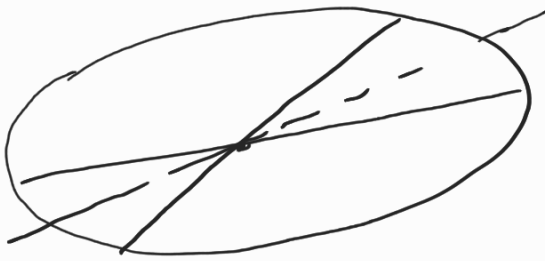
$F(\omega, \theta)$, ω y θ (inv TF) $\rightarrow f(x, y)$ pero



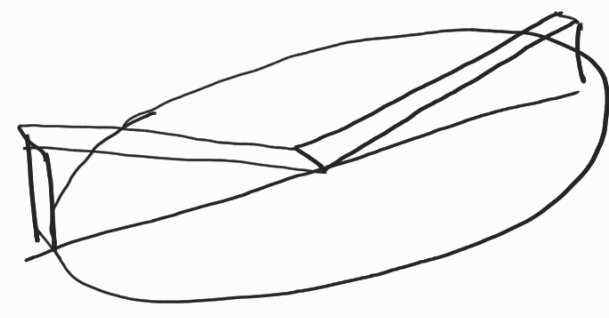
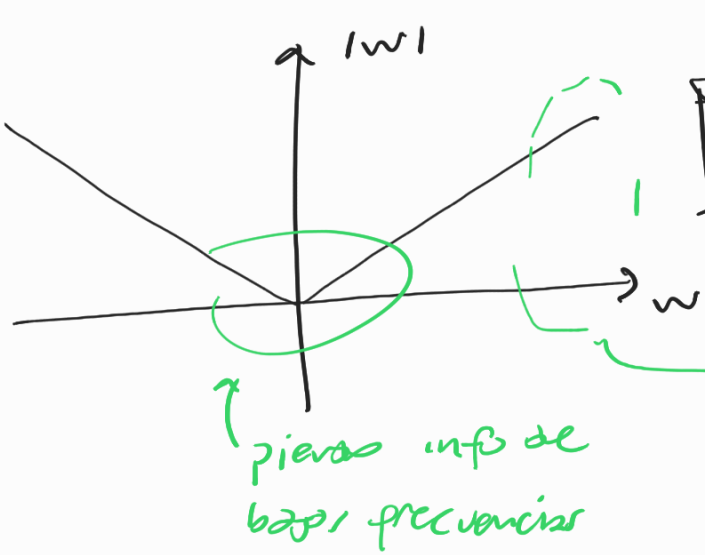
ideal:

no funciona tampoco así
nomás

¿Por qué?
medido:



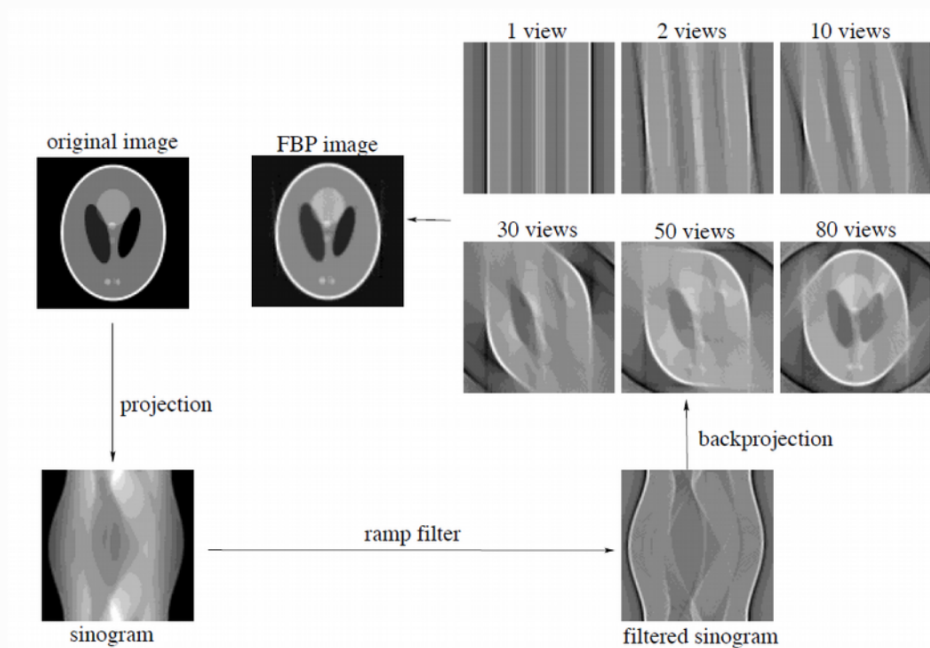
pero podemos acercarnos al caso ideal, filtrando las mediciones!



aumento presencia de altas frec.
(pistas para- alto),
mayor contraste

¿Cómo reconstruyo entonces? BACK-projection con filtros

- $P_{\theta}(t)$ (datos)
- $S_{\theta}(w)$
- mult. $|w|$ (normalizado adecuadamente)
- suma $\int_{\theta} TF$ inversa de cada proyección filtrada



Formalización de BACK projection con filtros:

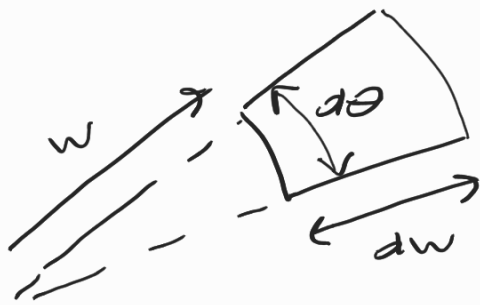
$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{ F(u, v) \} \quad (F(u, v) = \mathcal{F} \{ f \})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du dv F(u, v) e^{+j 2\pi (ux + vy)}$$

Cambio de variables: $(u, v) \rightarrow (w, \theta)$

$$(u = w \cos \theta, v = w \sin \theta)$$

$$du dv \rightarrow w dw d\theta$$



$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(w, \theta) e^{j2\pi w (x \cos \theta + y \sin \theta)} dw d\theta$$

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(w, \theta) e^{j2\pi w t} dw d\theta$$

• $t(\theta + \pi) = -t(\theta)$

• $F(w, \theta + \pi) = F(-w, \theta)$

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{F(w, \theta)}_{S_{\theta}(w)} |w| e^{j2\pi w t} dw d\theta$$

$$D_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\theta}(w) |w| e^{j2\pi w t} dw$$

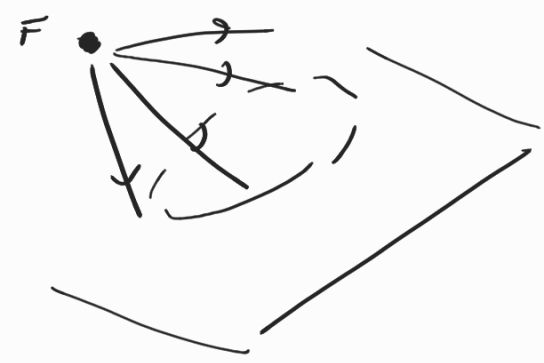
proyección filtrada

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} D_{\theta}(t) d\theta$$

La función que queremos reconstruir está bien representada por una integral angular de proy. filtrada

201:
 . Afecta el ruido? el de alta frecuencia sí

3D? { Stacking de los resultados 2D
 en CT, fuente puntual y detector en un plano



Relación con Light-Field : Fanar Slice Photography

Una fotografía es un corte 2D del L-F 4D en el dominio de frecuencias (Weg de una TF line)

$$F(\alpha, F)(x, y) = \frac{\gamma}{(\alpha F)^2} \iint du dv$$

$$LF \left[u \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha} \right) + \frac{x}{\alpha}, v \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha} \right) + \frac{y}{\alpha}, u, v \right]$$

long. de Nb apertura

$P_\alpha(LF)(x, y)$: operador de fotografía : transformación de cizalla en 4D, requiere de un proyector en 2D

• Fourier slice generalization

f : función n -dimensional $f = f(x_1, \dots, x_n)$

Si cambiamos la base de f (base en cambio B), proyectamos a M dimensiones ($M < N$) y tomamos la transf. de Fourier, es equivalente a!

Transf. de Fourier de f , cambiar de base con la un. de B y tomar un corte a M dim.:

$$\boxed{F^M = \tilde{L}_M^N \circ B \equiv S_M^N = \frac{B^{-T}}{|B^{-T}|} \circ F^N}$$

donde:

- \tilde{L}_M^N : operador de proyección:

$$\tilde{L}_M^N[f](x_1, \dots, x_M) = \int f(x_1, \dots, x_n) dx_{M+1} \dots dx_n$$

- $S_M^N[f]$: slicing

$$S_M^N[f] = f(x_1, \dots, x_M, 0, \dots, 0)$$

- $B[f](\vec{x}) = f(B^{-1}\vec{x})$: cambio de base

En este formalismo, el teo. de Fourier del arte de proyección

se escribe:

$$\begin{array}{ccc}
 f(x,y) & \xrightarrow{\mathcal{F}^2(\text{2D TF})} & F(u,v) \\
 \downarrow \mathcal{I}_n \circ \mathcal{R}_0 & & \downarrow \mathcal{S}_n \circ \mathcal{R}_0 \\
 \mathcal{P}_0(t) & \xrightarrow{\mathcal{F}^1(\text{1D TF})} & S_0(\omega)
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 (R^{-1} = R^T \\
 (R^{-1})^T = R)
 \end{array}$$

Para la fotografía a partir de L-F tenemos este diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 L_F & \xrightarrow{\mathcal{F}^4(\text{4D TF})} & \mathcal{L}_F \\
 \downarrow \mathcal{P}_\alpha & & \downarrow \\
 E(\alpha F) & \xrightarrow{\mathcal{F}^2(\text{2D TF})} & \mathcal{L}(\alpha F)
 \end{array}$$

$\rightarrow \mathcal{P}_\alpha[\mathcal{L}_F] = \frac{1}{(\alpha F)^2} \tilde{\mathcal{L}}_2^4 \circ B_\alpha[\mathcal{L}_F]$

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

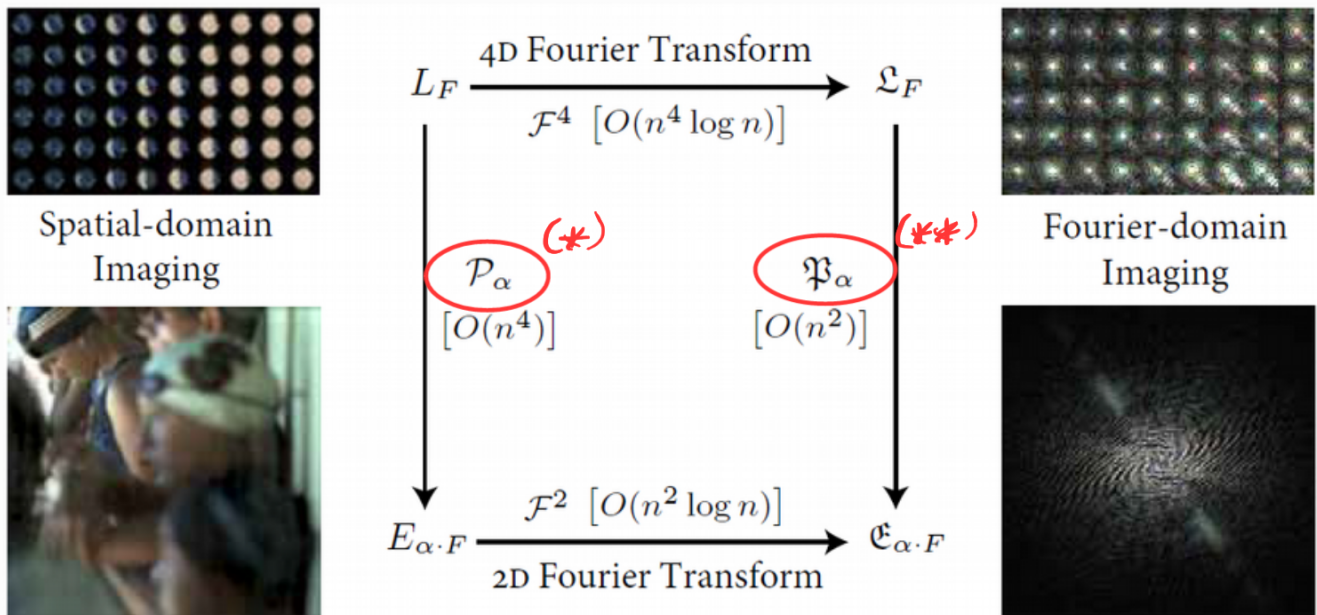
$$B_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 & 1-1/\alpha & 0 \\ 0 & 1/\alpha & 0 & 1-1/\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_\alpha = \frac{\gamma}{(\alpha F)^2} \mathcal{F}^{-2} \circ \left(S_2^4 \circ \frac{B_\alpha^{-T}}{|B_\alpha^{-T}|} \circ \mathcal{F}^4 \right)$$

$$|B_\alpha^{-T}| = |B_\alpha^{-1}| = \gamma / \alpha^2 !$$

$$\mathcal{P}_\alpha = \frac{\gamma}{F^2} \mathcal{F}^{-2} \circ S_2^4 \circ B_\alpha^{-T} \circ \mathcal{F}^4$$

Una fotografía \mathcal{P}_α se obtiene del espectro de Fourier 4D del LF así: ~~crear~~ un slice 2D ($S_2^4 \circ B_\alpha^{-T}$), inv. TF \mathcal{F}^{-2} y un scaling (γ / F^2)



(*) \mathcal{P}_α : operador de fotografía

(**) B_α : operador de fotografía en Fourier

$$B_\alpha \equiv \frac{\gamma}{F^2} S_2^4 \circ B_\alpha^{-T}$$