Evolución de frentes

Evolución de frentes

- Segmentar con cierta información a priori:
  - Curvas cerradas, de espesor 1, continuas, "más o menos regulares"
- Hacer evolucionar un frente de modo que minimice la funcional de Mumford-Shah u otra "energía de segmentación":

$$E(u,K) = \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} (u - g)^2 dx + long(K)$$

Evolución de frentes

- Consideremos un frente (curva en 2D, superficie en 3D, hipersuperficie), que separa 2 regiones y que se mueve según una velocidad dada: $\Gamma_t(t) = \vec{F}$
- La idea es seguir el frente cuando evoluciona en el tiempo e introducir en F "lo que buscamos"

Evolución de frentes

- En el caso de una curva plana. Podemos descomponer F en sus dos componentes:

$$C_t(s,t) = F_T \vec{T} + F_N \vec{N}$$
$$C(s,0) = C_0$$

- La componente tangencial no cambia la geometría de la curva. Nos interesa la componente normal. Siempre podemos parametrizar la curva para que la componente tangencial sea nula.

Evolución de frentes

- Trabajamos entonces con una velocidad:

$$\Gamma_t(s,t)=F(L,G,I)\vec{N}$$

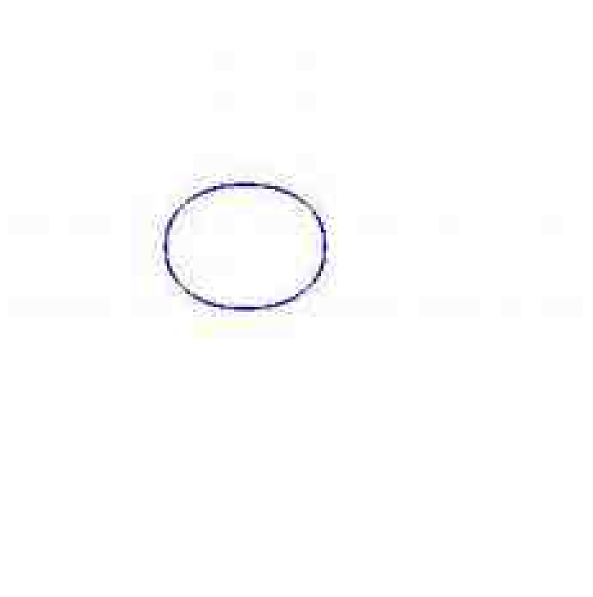
- Donde:
  - L:propiedades locales del frente (Ej: k)
  - G:propiedades globales del frente (Ej: forma)
  - I: propiedades independientes del frente. Por ejemplo asociadas a la imagen!

Ejemplo

- La evolución de una curva según la curvatura local en la dirección normal la regulariza, va a un círculo, a un punto y desaparece.

$$C_t(s,t)=k\vec{N}$$

ejemplo



Formulación Lagrangeana

- Una curva plana según curvatura:

$$\vec{x}(s,t)=(x(s,t),y(s,t))=F(k)$$

- El vector normal en un punto y su curvatura se pueden expresar como:

$$\vec{N}=\frac{(y_s,-x_s)}{\sqrt{x_s^2+y_s^2}} \qquad k=\frac{y_{ss}x_s-x_{ss}y_s}{\sqrt{(x_s^2+y_s^2)^3}}$$

Formulación lagrangeana

- Sustituyendo obtenemos la expresión del movimiento de cada punto de la curva:

$$x_t = F\left(\frac{y_{ss}x_s - x_{ss}y_s}{\sqrt{\left(x_s^2 + y_s^2\right)^3}}\right)\frac{y_s}{\sqrt{\left(x_s^2 + y_s^2\right)}}$$

$$y_t = F\left(\frac{y_{ss}x_s - x_{ss}y_s}{\sqrt{\left(x_s^2 + y_s^2\right)^3}}\right)\frac{-x_s}{\sqrt{\left(x_s^2 + y_s^2\right)}}$$

Solución de viscosidad

- Aun para funciones muy sencillas como F=1, la evolución puede desarrollar singularidades en un tiempo finito.
- En los puntos singulares no podemos estimar la normal y no se puede seguir...

Soluciones de viscosidad

- Solución débil integrando a ambos lados:

$$u_t = u_x \rightarrow \frac{d}{dt}\int u\,dx = u(b) - u(a)$$

- Ahora sólo se necesita diferenciabilidad en t pero hay un conjunto de funciones que son solución.
- Algún criterio para seleccionar una.

Ejemplo

- Evolución constante según la normal desarrolla singularidades $c_t = \vec{N}$
- Adición de un término de curvatura garantiza continuidad: $c_t^{\varepsilon} = \left(1 + \varepsilon k\right) \vec{N}$
- Puede probarse que el limite del movimiento según curvatura es la solución de entropía del caso de velocidad constante

$$\lim_{\varepsilon \to 0} c^{\varepsilon}(t) = c(t)$$

Formulación lagrangeana

- Numérica compleja:
  - Seguimos puntos uniformemente distribuidos. En t, ya están no uniformes. Obliga a interpolar.
  - Estimación de k y N no siempre sencillo, que empeoran con lo anterior.
  - Split and merge (cómo?)
  - Es necesario encontrar la solución débil adecuada..

Formulación euleriana

- Aumentar la dimensión del problema.
- Dada una hipersuperficie (d-1) dimensional cerrada: $\Gamma(t=0)$
- Tomamos una función distancia signada de dimensión d: $\varphi(\vec{x},t=0)=d_{signada}$
- Donde $d_{signada}$ es la distancia con signo de x a la hipersuperficie $\Gamma(t=0)$ positivo fuera y negativo dentro.

Formulación euleriana

- La hipersuperficie es la curva de nivel cero de la función:
$$\Gamma(t=0)=\{\vec{x} \mid \varphi(\vec{x},t=0)=0\}$$
- Producir una evolución de φ tal que su nivel cero evolucione según $\Gamma_t(t)=F\vec{N}$
- Se obtiene: $\varphi_t=F|\nabla\varphi|$
- En todo t su nivel cero se mueve según $\vec{N}$ con velocidad F.

Propiedades de la representación implícita

- La evolución mantiene a φ como función pero su nivel cero puede cambiar de topología.
- Numérica consistente y estable que selecciona automáticamente la solución de entropía.
- Estimación de las propiedades geométricas a partir de la expresión implícita.

Propiedades...

- El esquema es general y se puede extender a cualquier dimensión...
- Los trabajos de Osher y Sethian han dado un enorme impulso a los métodos de tratamiento de imágenes con edp.

Geodesic Active Contours

- Sea C(s) una curva plana parametrizada e I un imagen dada. La idea es evolucionar C sobre I de tal manera que se pegue a los bordes.
- De snakes, minimizar una energía

$$E(C)=\alpha\int_0^1 |C'(s)|^2 ds+\beta\int_0^1 g(|\nabla I(C(s))|)^2 ds$$

GAC

- Se demuestra que la solución es una geodésica en un espacio de Riemann inducido por I. Lo que permite transformar el problema en:

$$\min \int_0^1 g\left(\left|\nabla I\left(C\left(s\right)\right)\right|\right)\left|C'\left(s\right)\right| ds$$

- Sobre el espacio de Riemann con una métrica propia.

GAC

- Longitud euclidea de la curva C:

$$L=\int_0^1 |C'(s)|ds=\int dl$$

- En el espacio de Riemann:

$$L_R=\int_0^1 g(|\nabla I(C(s))|)|C'(s)|ds=\int_0^{L(C)} g(|\nabla I(C(s))|)dl$$

- Una medida ponderada por las características de la imagen!

GAC

- Se calcula el descenso por gradiente y se obtiene la ecuación de evolución de C con cierta condición inicial

$$C_t(t) = g(I)k\vec{N} - (\nabla g.\vec{N})\vec{N}$$

- Donde k es la curvatura euclidana de C

$$k\vec{N} = C_{ss}$$

- Y $\vec{N}$ es la normal entrante unitaria de C.

GAC

- Se define una curva inicial
- Se hace avanzar la ecuación de evolcuión, en el estado estacionario: $C_t(t)=0$ se obtiene una curva que minimiza la medida de longitud definida L_R
- Formulación euleriana

$$\varphi_t = g(I)k|\nabla I| + \nabla g(I).\nabla\varphi$$

GAC

- La evolución según curvatura del primer término suaviza la curva.
- El factor g(I) frena la evolución en presencia de bordes.
- El segundo término atrae la curva hacia los bordes cuando está cerca de ellos.

GAC general

- Se introduce un término de evolución constante según la normal que minimiza el área dentro de la curva.

$$\varphi_t = g(c + k)|\nabla \varphi| + \nabla \varphi . \nabla g$$

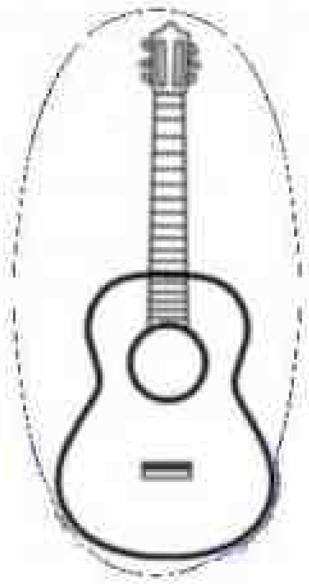
- Equivale en las curva de nivel a:

$$C_t = g(I)(c + k)\vec{N} - (\nabla g . \vec{N})\vec{N}$$

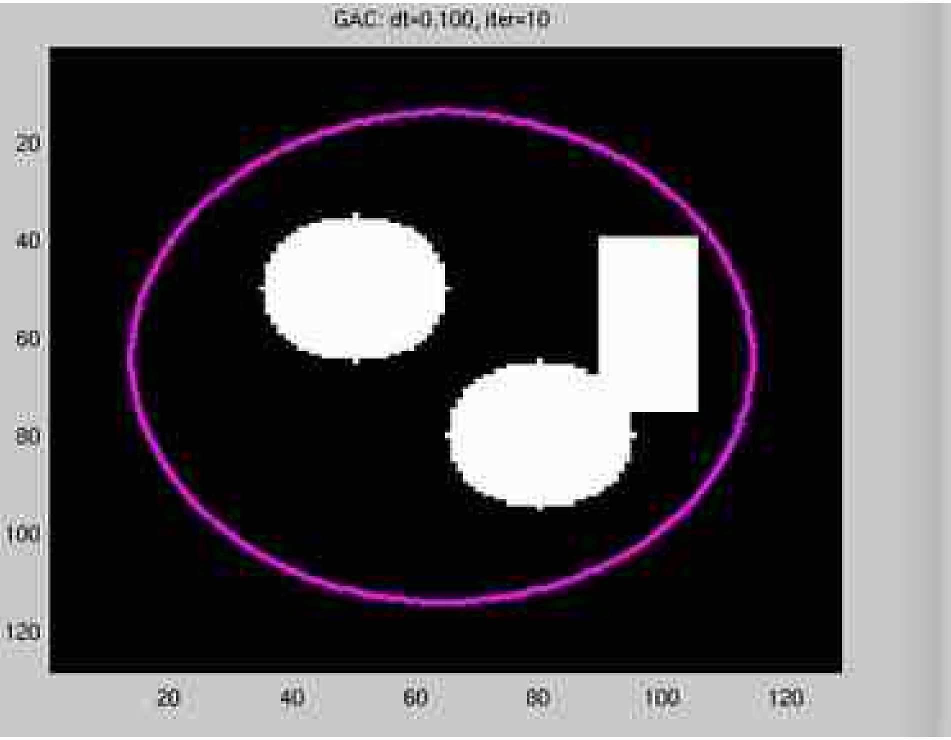
GAC

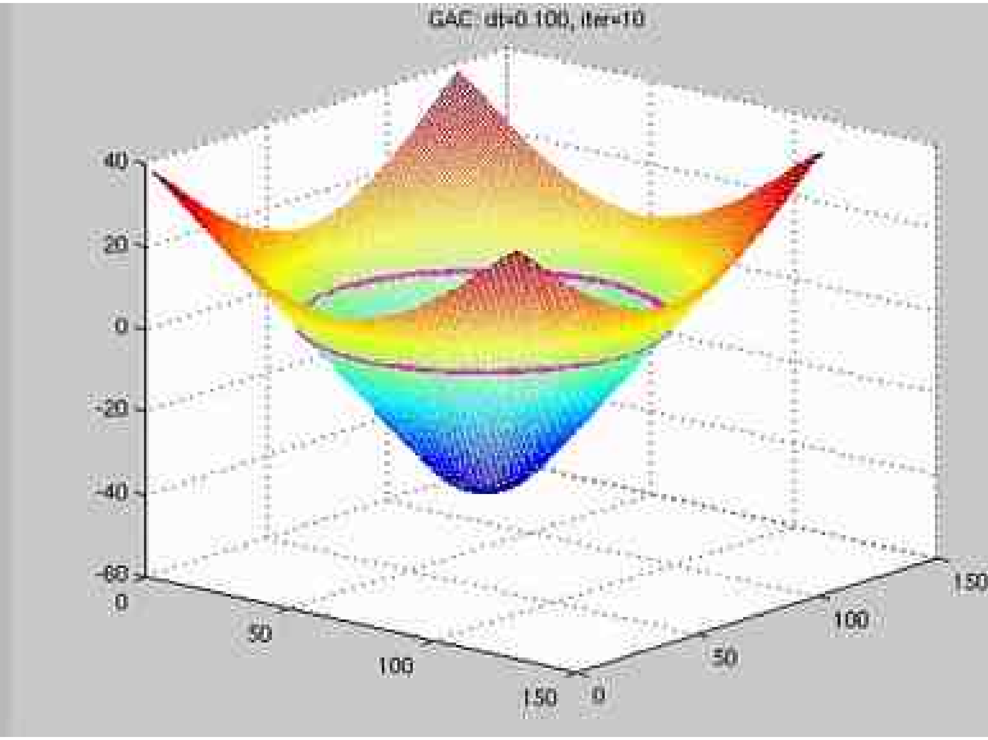
- Genérico en dimensión de datos
- El sentido puede ser hacia adentro o hacia afuera.
- Se puede estimar una c en función de los huecos que queremos “tapar”.

GAC

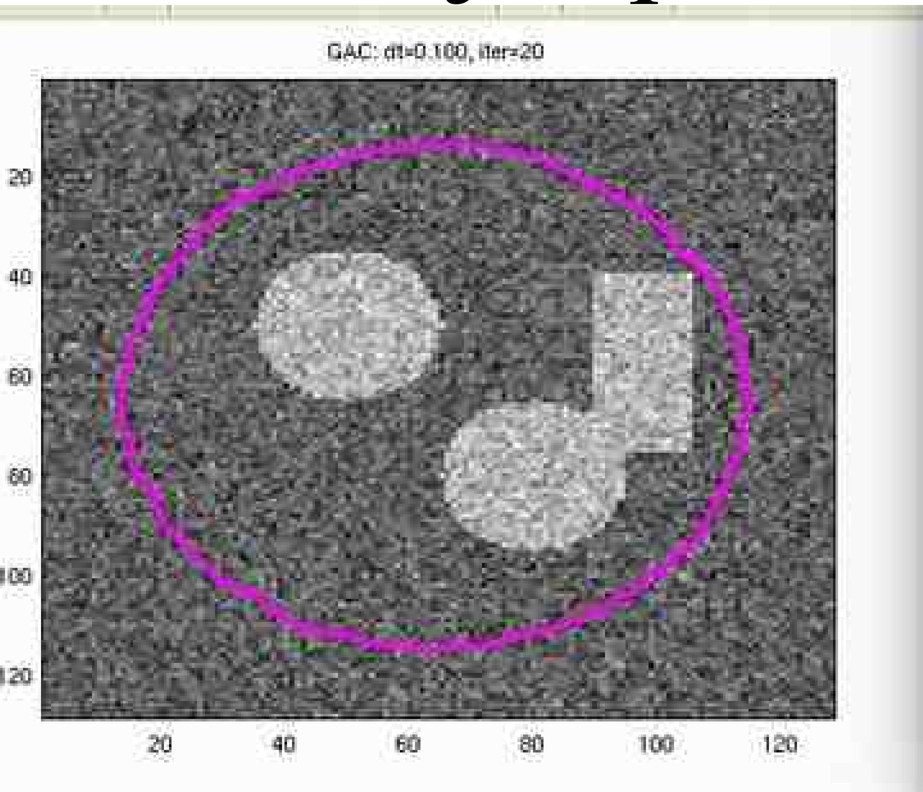


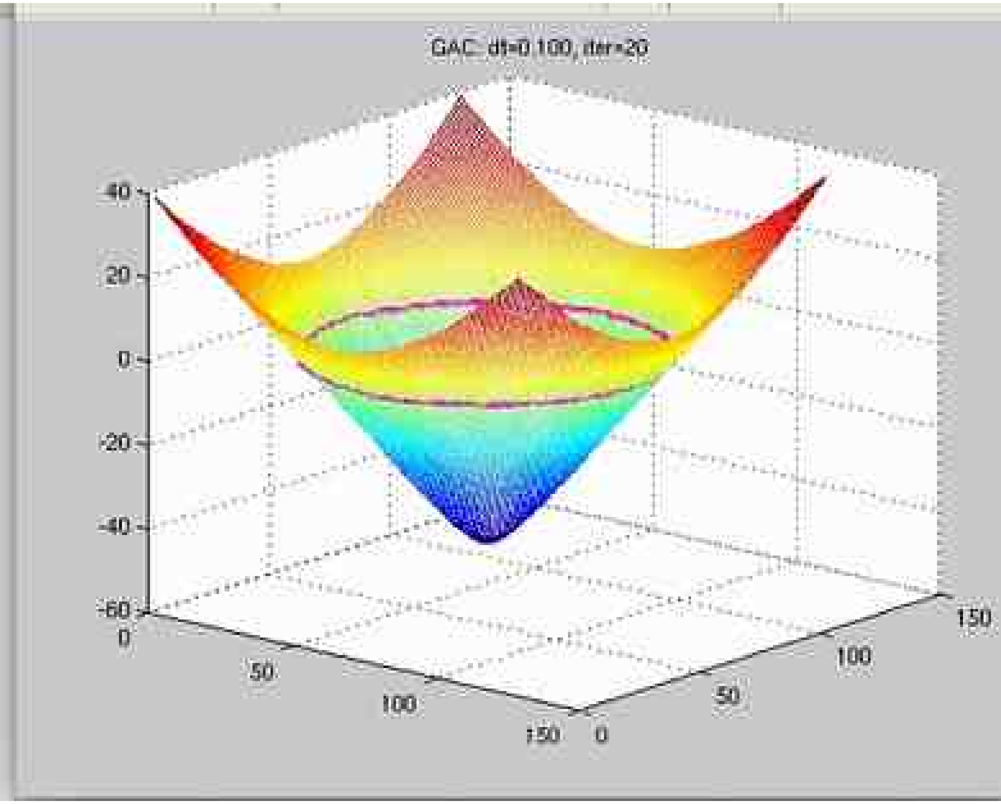
Ejemplo GAC sin ruido





Ejemplo GAC con ruido





GAR

- Juan Cardelino