1. Casos favorables sobre casos posibles

Ejercicio 1

En cierta ciudad las matrículas de los autos se forman con 2 vocales diferentes seguidas de 5 dígitos todos diferentes. Calcular la probabilidad de elegir al azar una matrícula que empiece en A y termine en 89.

Ejercicio 2

De un mazo de póker (52 cartas) eliges dos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean reinas?

Ejercicio 3

Se divide al azar un mazo de 52 cartas en cuatro manos con 13 cartas cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que cada mano tenga un rey?

Ejercicio 4

El *full house* en el póker es una mano en la que tres cartas comparten un mismo valor y dos cartas comparten otro valor. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un full house?

Ejercicio 5

De un grupo formado por 3 ingenieros, 5 economistas y 4 arquitectos deben seleccionarse 4 para formar una comisión. Si se eligen los integrantes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya por lo menos dos arquitectos?

Ejercicio 6

Hay seis parejas (sentimentales) en una clase de tango. Se emparejan al azar hombres con mujeres para comenzar la clase. ¿Cuál es la probabilidad de que las parejas de baile sean las mismas que las sentimentales?

Ejercicio 7

Un restaurante contrata 5 lavaplatos. En un semana se rompen 5 platos, de los cuales 4 los rompe el mismo individuo. Sus colegas, lo tratan de "torpe" pero él asegura que fue solo mala suerte y que le pudo haber ocurrido a cualquiera de ellos.

Calcular la probabilidad de que el mismo lavaplatos rompa al menos 4 de los 5 platos rotos. Se asume que todos están en las mismas condiciones y tienen la misma carga de trabajo y que romper un plato es un evento realmente aleatorio. Interpretar el resultado.

Ejercicio 8

En la lotería alemana se eligen 6 números al azar del 1 al 49. El 21 de junio de 1995 ocurrió una coincidencia inesperada. Ese día salieron sorteados los número $\{25, 27, 30, 42, 48\}$. Exactamente los mismos números que habían sido sorteados el 20 de diciembre de 1986. Fue la primera vez en 3.016 sorteos que una misma secuencia de números fue sorteada dos veces. Es una coincidencia extraordinaria, dado que en la lotería alemana hay cerca de 14 millones de combinaciones posibles... ¿O quizás no es tan extraordinaria?

Calcular la probabilidad de que la misma combinación se repita dos o más veces en 3.016 sorteos.

Ejercicio 9

Los números $1, 2, \ldots, n$ están colocados en orden aleatorio. Encontrar la probabilidad de que los dígitos (a) 1 y 2, (b) 1, 2 y 3 estén en el orden mencionado. Responder (a) y (b) suponiendo además que son consecutivos.

Ejercicio 10

Tenemos 8 equipos etiquetados $E_1, \ldots, E_8$. Se ordenan colocando sus nombres en un sombrero y sacando los nombres de uno en uno.

¿Cuál es la probabilidad de que todos los equipos con números impares estén en lugares con números impares y todos los equipos con números pares estén en lugares con números pares?

2. Probabilidades geométricas

Ejercicio 1

X es un número real aleatorio entre 0 y 3. ¿Cuál es la probabilidad de que X esté más cerca de 0 que de 1?

Ejercicio 2

Se elige al azar de manera uniforme un número entre 0,15 y 0,25. Luego se redondea a dos lugares decimales y finalmente a un decimal. Calcular la probabilidad de que el valor final sea 0.2.

Aclaración: para redondear un número real se elige el entero más cercano. Si el número está igualmente lejos de los dos números enteros más cercanos, se elige el más lejos de cero. Por ejemplo, 2,5 está igualmente lejos de 2 y 3, así que se redondea 2,5 a 3. Lo mismo para otras cifras decimales.

Ejercicio 3

Se lanza un dardo al azar sobre un blanco circular. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga más cerca del centro que del borde?

Ejercicio 4

Ana, Beto y Carlos eligen al azar cada uno un número real entre 0 y 1. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los cuadrados de sus números sea menor o igual a 1?

Ejercicio 5

Ana, Beto y Carlos eligen al azar cada uno un número real entre 0 y 1. ¿Cuál es la probabilidad de que el cuadrado de uno de los números sea mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos?

Ejercicio 6

Se lanza una moneda de diámetro d sobre un suelo de baldosas. Las baldosas del piso son cuadradas de lado $a > d$. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda caiga completamente dentro de uno de los cuadrados (es decir, que no cruce ninguno de los lados de un cuadrado)?

Ejercicio 7

Se eligen dos puntos al azar en el intervalo $[-1,1]$. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de ellos esté más cerca del origen que del otro punto?

Ejercicio 8

Un bloque realiza un movimiento armónico simple de período T y velocidad máxima v. La velocidad del bloque se mide en un momento aleatorio. ¿Cuál es la probabilidad de que la velocidad medida sea mayor que $v/2$?

Ejercicio 9

Una barra de longitud L se rompe en dos puntos elegidos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las tres piezas tenga una longitud mayor que un número dado a?

Ejercicio 10

Una persona hace dos marcas, al azar e independientemente, en un palo, después de lo cual el palo se divide en n pedazos. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos marcas se encuentren en la misma pieza?

Comparar dos casos: cuando las piezas son iguales y cuando la división es aleatoria.

3. Los axiomas de Kolmogorov

Ejercicio 1

Sea $\mathbf{P}$ una probabilidad, A y B sucesos. Demostrar que:

1. Si $A \subset B$ entonces $\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$. Deducir que $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$.
2. $\mathbf{P}(A \cup B) \geq \text{máx}\{\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B)\}$ y $\mathbf{P}(A \cap B) \leq \text{mín}\{\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B)\}$.

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{P}$ una probabilidad, A y B sucesos tales que $\mathbf{P}(A) = 1/3$ y $\mathbf{P}(B) = 1/2$. Determinar el valor de $\mathbf{P}(A^c \cap B)$ en los siguientes casos:

1. A y B incompatibles.
2. $A \subset B$.
3. $\mathbf{P}(A \cap B) = 1/8$.

Ejercicio 3

Sean A y B dos eventos. Supongamos que la probabilidad de que ni A ni B ocurran es $2/3$. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra uno o ambos?

Ejercicio 4

Sean C y D dos eventos con $\mathbf{P}(C) = 0{,}25$, $\mathbf{P}(D) = 0{,}45$, y $\mathbf{P}(C \cap D) = 0{,}1$. ¿Cuánto vale $\mathbf{P}(C^c \cap D)$?

Ejercicio 5

Sean $\mathbf{P}$ una probabilidad, A y B sucesos tales que $\mathbf{P}(A) = 3/8$, $\mathbf{P}(B) = 1/2$, $\mathbf{P}(A \cap B) = 1/4$. Calcular:

1. $\mathbf{P}(A^c)$ y $\mathbf{P}(B^c)$.
2. $\mathbf{P}(A \cup B)$.
3. $\mathbf{P}(A^c \cap B^c)$.
4. $\mathbf{P}(A^c \cap B)$ y $\mathbf{P}(A \cap B^c)$.

Ejercicio 6

Sean A y B dos eventos con $\mathbf{P}(A) = 0{,}2$ y $\mathbf{P}(B) = 0{,}4$. Calcular la probabilidad de que al menos A o B ocurra, bajo cada una de las siguientes condiciones:

1. $\mathbf{P}(A \cap B) = 0{,}15$
2. A y B son incompatibles
3. A está incluído en B
4. $\mathbf{P}(B \cap A^c) = 0{,}35$
5. $A \subset B^c$
6. $B^c \subset A^c$

Ejercicio 7

Si un dado está cargado de modo tal que $\mathbf{P}(\{i\}) = \alpha i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, 6$.

1. Determinar el valor de α
2. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 5?
3. ¿Cuál es la probabilidad de sacar par?

Ejercicio 8

Una moneda tiene probabilidad p de salir cara. Se la lanza hasta obtener cara o llegar a 10 lanzamientos. Para $k = 1, 2, \ldots, 10$, calcular la probabilidad de lanzar la moneda k veces.

Ejercicio 9

Se elige un número natural X con probabilidades $\mathbf{P}(X = i) = \frac{C}{i(i+1)}$ para cada $i \geq 1$.

1. Hallar la constante C.
2. Calcular la probabilidad de que X sea par.

Ejercicio 10

Tres jugadores a, b y c juegan por turnos a un juego de acuerdo a las reglas siguientes. Al comienzo, a y b juegan mientras c espera. El perdedor es remplazado por c, que juega contra el ganador en el segundo ensayo, mientras que el que perdió espera. El juego continua en esta forma hasta que un jugador gana dos veces seguidas, y se convierte por ello en el ganador del juego. Descartamos la posibilidad de empates. Atribuyamos la probabilidad $1/2^k$ a un juego que demora k ensayos.

1. Demuestre que la probabilidad de que a gane es $5/14$, la probabilidad de que b gane es la misma, mientras que c tiene probabilidad $2/7$ de ganar.
2. Demuestre que la probabilidad de que no se llegue a ninguna decisión en el k-ésimo turno, o antes, es $1/2^{k-1}$.

4. Probabilidad condicional

Ejercicio 1

Sean $\mathbf{P}$ una probabilidad, A y B sucesos tales que $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{3}$ y $\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Calcular:

1. $\mathbf{P}(A|B)$
2. $\mathbf{P}(B|A)$
3. $\mathbf{P}(A^c|B)$
4. $\mathbf{P}(B^c|A)$
5. $\mathbf{P}(A^c|B^c)$
6. $\mathbf{P}(B^c|A^c)$

Ejercicio 2

Sean $\mathbf{P}$ una probabilidad, A y B sucesos tales que $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{4}$ y $\mathbf{P}(A \cup B) = \frac{1}{3}$.

Calcular $\mathbf{P}(B)$ en los siguientes casos:

1. Si A y B son independientes
2. Si A y B son incompatibles
3. Si A es un subconjunto de B

Ejercicio 3

Se tiran dos dados. Considere los eventos

- $A =$ "la suma es igual a 3"
- $B =$ "la suma es igual a 7"
- $C =$ "al menos uno de los dados muestra un 1"

Calcular $\mathbf{P}(A|C)$ y $\mathbf{P}(B|C)$. ¿Son A y C independientes? ¿Qué hay de B y C?

Ejercicio 4

Tiras un dado de veinte caras. Determina si los siguientes pares de eventos son independientes.

1. "Sale un número par" y "Sale un número menor o igual a 10".
2. "Sale un número par" y "Sale un número primo".

Ejercicio 5

Si $\mathbf{P}(A) = 0{,}4$, $\mathbf{P}(B) = 0{,}3$ y $\mathbf{P}((A \cup B)^c) = 0{,}42$. ¿Son A y B independientes?

Ejercicio 6

El siguiente par de preguntas apareció en una columna de Martin Gardner en Scientific American en 1959.

1. El Sr. Jones tiene dos hijos. El mayor es una niña. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niñas?
2. El Sr. Smith tiene dos hijos. Al menos uno de ellos es un niño. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños?

Ejercicio 7

Se considera una caja que contiene 6 bolillas rojas, 4 blancas y 5 azules.

1. Se extraen tres bolillas en forma sucesiva y sin reposición. Calcular la probabilidad de que la primera sea roja, la segunda blanca y la tercera azul. ¿Los resultados son independientes?
2. Repetir la parte anterior, suponiendo que las extracciones se realizan con reposición.

Ejercicio 8

Una persona recibe el diario en su casa a una hora al azar entre las 7 am y las 8 am. Sin embargo, la persona parte al trabajo a una hora también al azar entre la 7 am y las 8 am.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona reciba el diario antes de irse a trabajar?
2. La persona comienza a leer el diario inmediatamente que lo recibe y demora 10 minutos en leerlo completamente. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona lea el diario completamente antes de ir a trabajar, dado que lo ha recibido?

Ejercicio 9

Ana y Beto acuerdan en encontrarse a las 12 del medio día para almorzar. Ana llega a una hora al azar en $[0,60]$ medida en minutos a partir de las 12:00. Beto llega a una hora al azar en $[0,30]$. Asumir que la hora de llegada de Ana y Beto son independientes.

1. Calcular la probabilidad de que Beto llegue antes que Ana.
2. Se asume además que Beto, en caso de llegar antes que Ana, la espera como máximo hasta las 12:45. Dado que Beto llega antes que Ana, ¿cuál es la probabilidad de que se encuentren?

Ejercicio 10

Se ha cometido un asesinato. El asesino es con seguridad una de las dos personas X e Y. Ambas personas están prófugas de la justicia, y luego de una investigación inicial, ambos fugitivos son igualmente probables de ser el asesino. Al avanzar la investigación se revela que el asesino del crimen tiene sangre tipo A. Diez por ciento de la población tiene sangre tipo A. Investigación suplementaria revela que la persona X tiene sangre tipo A, pero no ofrece información alguna sobre el tipo de sangre de la persona Y. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona X sea el asesino?

5. El teorema de Bayes

Ejercicio 1

Se consideran dos cajas con bolas. La caja 1 contiene 3 bolas rojas y 2 azules, la caja 2 contiene 2 bolas rojas y 8 azules. Se lanza una moneda, si se obtiene cara se saca una bola de la caja 1, y si se obtiene cruz se saca una bola de la caja 2.

1. Hallar la probabilidad que la bola extraída sea roja.
2. Si se sabe que la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad que provenga de la caja 1?

Ejercicio 2

Tienes una urna que contiene 7 bolas rojas y 3 azules. Sacas tres bolas al azar. En cada extracción, si la bola es roja, la dejas a un lado y si la bola es azul, la pones de nuevo en la urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera extracción sea azul?

(Si obtienes una bola azul, cuenta como una extracción, aunque la vuelvas a poner en la urna).

Ejercicio 3

De una caja que contiene 3 bolas rojas y 2 azules se extrae una bola al azar y se la coloca en una segunda caja que contiene 4 bolas azules y 2 rojas. A continuación, se extrae una bola al azar de la segunda caja.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que se extraiga la misma bola que se extrajo de la primera caja?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la segunda caja sea roja?
3. Si la bola extraída de la segunda caja es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea la misma bola que se extrajo de la primera caja?

Ejercicio 4

Algunos juegos, como el tenis o el ping pong, alcanzan un estado llamado *deuce*. Esto significa que el puntaje está empatado y un jugador gana el juego cuando obtiene dos puntos por delante del otro jugador. Suponga que la probabilidad de que gane un punto es p y esto es cierto independientemente para todos los puntos. Si el juego está en deuce, ¿cuál es la probabilidad de que gane el juego?

Ejercicio 5

Un investigador quiere determinar las eficacias relativas de dos fármacos. Los resultados (diferenciando entre hombres y mujeres) fueron los siguientes:

	Hombres		*Mujeres*	
	Fármaco I	Fármaco II	Fármaco I	Fármaco II
Éxito	19	1000	200	10
Fracaso	1	1000	1800	190

1. Calcular la probabilidad de que el Fármaco I tenga éxito sabiendo que el paciente es hombre. ¿Y sabiendo que el paciente es mujer?
2. Repetir los cálculos de la parte anterior para el Fármaco II.
3. Calcular la probabilidad de éxito de cada fármaco e indicar cuál de los dos considera más exitoso.

Ejercicio 6

Suponga que está tomando una prueba de múltiple opción con c opciones para cada pregunta. Al responder una pregunta en esta prueba, la probabilidad de que sepa la respuesta es p. Si no sabe la respuesta, elije una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que supieras la respuesta a una pregunta, dado que la respondiste correctamente?

Ejercicio 7

En una ciudad con cien taxis, 1 es azul y 99 son verdes. Un testigo observa a un taxi chocar y abandonar el lugar por la noche, y recuerda que el taxi era azul, por lo que la policía arresta al taxista azul que estaba de servicio esa noche. El conductor proclama su inocencia y lo contrata para que lo defienda en el tribunal. Usted contrata a un científico para que mida la capacidad del testigo de distinguir taxis azules y verdes en condiciones similares a las de la noche del accidente. Los datos sugieren que el testigo ve los autos azules como azules el 99 % del tiempo y los autos verdes como azules el 2 % del tiempo.

¿Qué le diría al jurado para que tenga dudas razonables sobre la culpabilidad de su cliente? Tenga en cuenta que la mayoría de los miembros del jurado no han tomado este curso, por lo que una tabla ilustrativa puede ser más fácil de entender que las fórmulas sofisticadas.

Ejercicio 8

Un examen de múltiple opción tiene 4 opciones para cada pregunta. Un estudiante ha estudiado lo suficiente como para que

- la probabilidad de que conozca la respuesta a una pregunta sea 0.5,
- la probabilidad de que pueda eliminar una opción sea 0.25,
- de lo contrario, las 4 opciones parecen igualmente probables.

Si sabe la respuesta obtendrá la pregunta correcta. Si no es así, tiene que adivinar entre las 3 o 4 opciones.

Si el estudiante responde una pregunta correctamente, ¿cuál es la probabilidad de que supiera la respuesta?

Ejercicio 9

Se estima que en Uruguay hay 40.000 personas celíacas. Se asume que la población del Uruguay es de 3.400.000 habitantes.

Un primer indicio de la enfermedad celíaca es la presencia de un número elevado de anticuerpos IgA endomysial en una muestra de sangre.

Se sabe que la probabilidad de que el examen sea:

- positivo dado que la persona es celíaca es de 0.92.
- negativo dado que la persona no es celíaca es de 0.985.

Calcular la probabilidad de que:

1. la persona sea celíaca dado que el examen es positivo.
2. la persona sea celíaca dado que el examen es negativo.

Ejercicio 10

Existe una prueba de detección del cáncer de próstata que analiza el nivel de PSA (antígeno prostático específico) en la sangre. Asumiremos los siguientes números:

- Tasa de cáncer de próstata en hombres mayores de 50 años = 0.0005
- Tasa de verdaderos positivos del test = 0.9

- Tasa de falsos positivos del test = 0.01

Sean T el evento de que un hombre tiene una prueba positiva y D el evento de que un hombre tiene cáncer de próstata. Calcular $\mathbf{P}(D|T)$ y $\mathbf{P}(D|T^c)$.

6. El teorema de Bernoulli

Ejercicio 1

Una moneda se tira seis veces. Dos posibles resultados son

$$(i)\ CXXCXC \quad (ii)\ CCCCCC$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

1. La secuencia (i) es más probable.
2. La secuencia (ii) es más probable.
3. Ambas secuencias son igual de probables.

Ejercicio 2

Se lanza una moneda justa n veces, y se calcula R_n el número total de veces que sale cara. Verdadero o falso: si n es suficientemente grande, con probabilidad muy alta la diferencia $|R_n - n/2|$ es pequeña.

Ejercicio 3

Sea Ω el espacio muestral de un cierto experimento aleatorio. Supongamos que el experimento se repite n veces. Si A es un suceso en Ω, la *frecuencia relativa* de ocurrencias de A es

$$\mathrm{F}_n(A) = \frac{1}{n}\#\{i : A \text{ ocurre en la } i\text{-ésima repetición}\} = \frac{\text{Número de ocurrencias de } A}{\text{Total de repeticiones}}.$$

Definimos la *probabilidad frecuentista* de un suceso A como $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{F}_n(A)$.

1. Probar que $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$ para cualquier suceso A.
2. Probar que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ y $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
3. Probar que si A y B son incompatibles, entonces $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
4. Probar que si $A \subset B$, entonces $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
5. Probar que $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

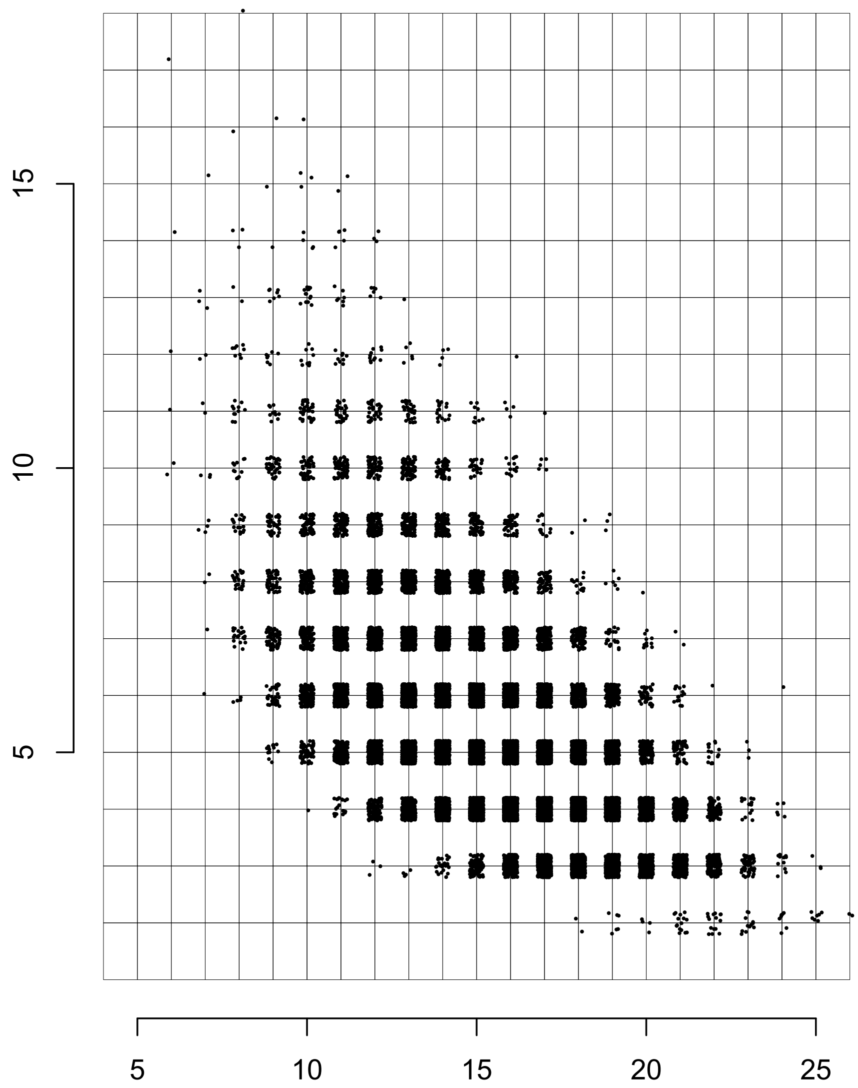
Ejercicio 4

Un jugador de basketball tiene 50 % de efectividad en el tiro simple. Asumiendo que los resultados de todos los tiros simples que realiza son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que, en una secuencia de 20 tiros, el jugador acierte seis canastas consecutivas? Responder primero de forma intuitiva si esta probabilidad es grande o chica. Luego calcularla y compararla con la respuesta anterior.

Ejercicio 5

Escribe una secuencia aleatoria que represente 30 lanzamientos de una moneda justa (no la lances, imagina los resultados). Deberás registrar dos números: la cantidad de rachas y la racha más larga de tu secuencia. Una racha es una secuencia de todas caras o todas cruces.

La siguiente figura muestra 30.000 lanzamientos simulados por computadora de una moneda justa. Cada punto representa un lanzamiento. El eje horizontal indica la cantidad de rachas, y el eje vertical la racha mas larga.



¿En dónde se encuentra tu secuencia en la gráfica? ¿Es una secuencia representativa? Si no lo es, ¿qué tiene de particular?

Ejercicio 6

Se lanza una moneda 30 veces, obteniéndose la secuencia

$$CXCXCXCXCXCXCXCXCXCXCXCXCXCXCX.$$

Se afirma que como la frecuencia relativa de caras es 0.5, la moneda es justa. Usar la figura del ejercicio anterior para criticar esta afirmación.

Ejercicio 7

Probar que en n ensayos de Bernoulli vale la desigualdad

$$\mathbf{P}(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{2\varepsilon^2 n},$$

en donde p es la probabilidad de éxito y F_n la frecuencia relativa de éxitos.

Ejercicio 8

Para determinar la probabilidad p de obtener cara en el lanzamiento de una moneda, se la lanza 1000 veces. De éstos, 613 lanzamientos resultaron cara.

Dar un rango de valores para p en el cual confíes al 95 %.

Ejercicio 9

¿Le creerías a alguien que dice haber obtenido 5.579 caras en 10.000 lanzamientos de una moneda justa?

Ejercicio 10

Se desea estimar la probabilidad p de obtener cara para una moneda determinada. Se requiere además una precisión de 0,1 en el valor de p, y una confianza de 95 % en dicha estimación. ¿Cuántos lanzamientos recomendarías hacer?

7. Variables aleatorias discretas I

Ejercicio 1

Sean $X \sim \text{Ber}(1/2)$ e $Y \sim \text{Ber}(1/3)$ independientes. Hallar la f.p.p. de la suma $X+Y$.

Ejercicio 2

Sea X una variable discreta con f.p.p. dada por:

x	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	$1/15$	$2/15$	$3/15$	$4/15$	$5/15$

1. Sea $Y = X^2$. Hallar la f.p.p. de Y.
2. Hallar el valor de la f.d.a. de X en $-1/2, 3/4, 7/8, 1, 1{,}5, 5$.
3. Hallar el valor de la f.d.a. de Y en $-1/2, 3/4, 7/8, 1, 1{,}5, 5$.

Ejercicio 3

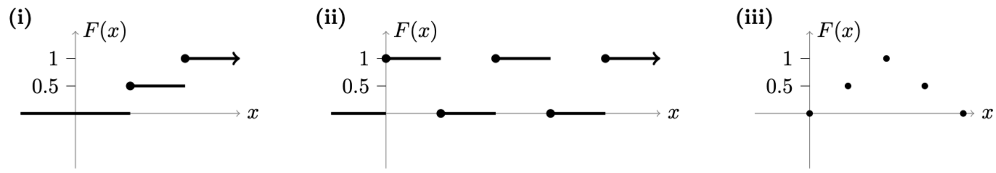
Suponga que la f.d.a. de X está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/5 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 2/5 & \text{si } 2 \le x < 4 \\ 1 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

Determinar la f.p.p. de X.

Ejercicio 4

Para cada uno de los siguientes, diga si puede ser el gráfico de una f.d.a.:



Ejercicio 5

La *Ley de Benford* predice la frecuencia de la primer cifra significativa de una cierta medición. Por ejemplo, la primer cifra significativa de 1846 es 1, y la de 0,633 es 6. La fórmula teórica predicha por la ley es

$$\text{Frecuencia relativa del dígito } d = \log_{10}\left(1+\frac{1}{d}\right), \text{ para } d = 1,2,\ldots,9.$$

Sea X una variable con distribución de Benford.

1. Hallar el recorrido de X y su f.d.a..
2. Hallar la probabilidad de que X sea par.
3. Hallar $P(X \in [3,7])$.

Ejercicio 6

El *bridge* es un juego de cartas que se juega con un mazo de 52 cartas divididas en cuatro palos de 13 cartas cada uno. Estos son corazones (rojo), diamantes (rojo), tréboles (negro) y piques (negro). Se juega de a cuatro y se reparten todas las cartas del mazo. Nos concentraremos en las cartas que recibe uno de los jugadores. Llamemos X al número de tréboles e Y al número de cartas negras que recibe el jugador en una determinada mano.

1. ¿Son X e Y independientes?
2. Un diario local de alguna región del mundo reporta un determinado día que un miembro del club local de bridge tuvo una mano con 13 cartas negras. ¿Es creíble?
3. ¿Y una mano con 13 tréboles?

Ejercicio 7

Sean a y b dos números al azar en el intervalo $[0,1]$. Hallar la f.p.p. de X igual a la parte entera del cociente a/b.

Ejercicio 8

Sean $0 < p < 1$ y X una variable con distribución geométrica de parámetro p. Probar la siguiente propiedad de pérdida de memoria: $\mathbf{P}(X > j+k|X > j) = \mathbf{P}(X > k)$.

Ejercicio 9

Una pareja decide tener hijos hasta tener una nena. La probabilidad de tener una nena es 1/2 y es independiente del género del hijo anterior. Sea X el número de hijos de la pareja (nenas y nenes).

1. Hallar la f.p.p. de X.
2. Sabiendo que la pareja ya tuvo dos hijos varones, la probabilidad de que el próximo hijo sea nena ¿es mayor, menor o igual a la probabilidad de tener una nena en el primer intento? Comente en este caso la validez de la expresión “La tercera es la vencida".

Luego de recapacitar, la pareja decide tener hijos hasta tener una nena o hasta tener 5 hijos.

3. Hallar la nueva f.p.p. de X.
4. ¿Cuál es la probabilidad de que la pareja tenga más de tres hijos?
5. Sea N el número de hijas de la pareja. Hallar f.p.p. de N.

Ejercicio 10

En una ciudad de 1.5 millones de habitantes, el número de personas que concurrieron a la última obra del ballet nacional fue de 23.000. El director del ballet decide salir a la calle y preguntar a los transeúntes si fueron a ver dicha obra. Solo se queda tranquilo cuándo encuentra a una persona que lo haya hecho.

1. Dado que el director ya entrevistó a 10 personas, ¿cuál es la probabilidad de que tenga que entrevistar a una sola persona más?
2. El director calcula que le lleva 1 minuto obtener una respuesta de una persona. Le indica a su secretaria que estará de vuelta en menos de una hora. ¿Le parece creíble la afirmación?
3. Si decide preguntar hasta encontrar a 3 personas que hayan concurrido a la obra, ¿cuál es la probabilidad de que haya entrevistado al menos a 200 personas?
4. Dado que no tiene suficiente tiempo, decide preguntar hasta encontrar a una persona o hasta haber consultado a 10. Sea Y el número de personas consultadas que sí concurrió al ballet. Hallar f.p.p. de Y.

8. Variables aleatorias discretas II

Ejercicio 1

Sean X e Y con recorrido $\{1,2,3,4\}$.

La siguiente fórmula da la f.p.p. conjunta: $\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{i+j}{80}$

Calcular: 1. $\mathbf{P}(X = Y)$ 2. $\mathbf{P}(XY = 6)$ 3. $\mathbf{P}(1 \leq X \leq 2, 2 < Y \leq 4)$

Ejercicio 2

Hay 8 cartas en un sombrero: $\{1\heartsuit, 1\spadesuit, 1\diamondsuit, 1\clubsuit, 2\heartsuit, 2\spadesuit, 2\diamondsuit, 2\clubsuit\}$.

Sacas una carta al azar. Si su valor es 1, sacas una carta más; si su valor es dos, sacas dos cartas más. Sea X la suma de los valores en las 2 o 3 cartas extraídas. Calcular $\mathrm{E}(X)$.

Ejercicio 3

La distribución conjunta y las marginales de X e Y se muestran parcialmente en la siguiente tabla:

X Y	1	2	3	total
1	$1/6$	0		$1/3$
2		$1/4$		$1/3$
3			$1/4$	
Total	$1/6$	$1/3$		1

Completar la tabla. ¿Son X eY independientes?

Ejercicio 4

Sean X e Y dos variables Bernoulli independientes con $p = 1/2$. Defina S y T por:

$$S = X + Y \text{ y } T = X - Y.$$

1. Hallar la f.p.p. conjunta y las marginales de S y T.
2. ¿Son S y T independientes?
3. Calcular $\mathrm{E}(ST)$ de al menos dos formas distintas.

Ejercicio 5

Sean X, Y y Z tres variables independientes con distribución geométrica de parámetro p.

1. Determinar $\mathbf{P}(X = Y)$.
2. Sea $U = \text{mín}\{X,Y\}$ y $V = X - Y$. Demostrar que U y V son independientes.
3. Demostrar que

$$\mathbf{P}(X = k | X + Y = n) = \frac{1}{n-1} \text{ para todo } k = 1, \ldots, n.$$

Ejercicio 6

Dada una moneda sesgada cuya probabilidad de cara es p, se puede simular un moneda equilibrada de la siguiente manera. Se lanza dos veces la moneda sesgada y se interpreta como éxito el resultado CX (cara y luego cruz) y como fracaso el resultado XC (cruz y luego cara). Si ninguno de estos eventos ocurre se repiten los lanzamientos hasta llegar a una decisión (éxito o fracaso).

1. Probar que la probabilidad de éxito es $1/2$.
2. Calcular el valor esperado del número de lanzamientos requeridos para llegar a una conclusión.

Ejercicio 7

Un bolillero contiene N bolillas que pueden ser rojas, blancas o azules. Hay r bolillas rojas y b blancas (y por lo tanto $a = N - (r + b)$ azules), con $r \geqslant 1,\ b \geqslant 1$. Tomamos una muestra de n bolillas elegidas al azar con reposición. Se definen:

- X = número de bolillas rojas en la muestra,
- Y = número de bolillas blancas en la muestra,
- Z = número de bolillas azules en al muestra.

1. Determinar las f.p.p. de X, de Y y de Z.
2. Calcular $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{E}(Y)$.
3. Hallar la f.p.p. de $X+Y$. Calcular $\mathrm{E}(X+Y)$.
4. ¿Son X e Y independientes? ¿Y Z y $X+Y$?

Ejercicio 8

Supongamos que 100 personas ponen su sombrero en una caja y luego proceden a elegir un sombrero al azar. ¿Cuál es el número esperado de personas que eligen su propio sombrero?

Sugerencia: exprese el número de personas que obtienen su propio sombrero como una suma de variables aleatorias cuyo valor esperado es fácil de calcular.

Ejercicio 9

Supongamos que participo en un juego de apuestas en el que gano o pierdo lo apostado. Supongamos además que la probabilidad de ganar es $p = 1/2$.

Empleo la siguiente estrategia para intentar ganar algo de dinero.

Apuesto \$1; si pierdo, doblo mi apuesta a \$2, si pierdo doblo mi apuesta nuevamente. Sigo así hasta que gane. Eventualmente, estoy seguro de ganar una apuesta y un neto de \$1.

Si esto realmente funcionara, los casinos estarían fuera del negocio. Nuestro objetivo en este problema es comprender la falla en la estrategia.

1. Sea X la cantidad de dinero apostado en el último juego (el que yo gané). X toma los valores 1, 2, 4, 8,. . . . Determinar la f.p.p. de X.
2. Calcular $\mathrm{E}(X)$.
3. Usar la respuesta de la parte 2 para explicar por qué la estrategia es mala.

Ejercicio 10

Sea X una variable aleatoria que toma valores $-2, -1, 0, 1, 2$; cada uno con probabilidad $1/5$. Sea $Y = X^2$.

1. Llenar la siguiente tabla que muestra la f.p.p. conjunta de X e Y.

X \ Y	-2	-1	0	1	2	total
0						
1						
4						
Total						

2. Calcular $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{E}(Y)$.
3. Probar que X e Y no son independientes.
4. Probar que $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.

9. Variables aleatorias discretas III

Ejercicio 1

Directamente de las definiciones de valor esperado y varianza, calcule $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$ cuando X tiene la f.p.p. dada por la siguiente tabla:

x	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	$1/15$	$2/15$	$3/15$	$4/15$	$5/15$

Ejercicio 2

La variable aleatoria X toma valores -1, 0, 1 con probabilidades 1/8, 2/8, 5/8 respectivamente.

1. Calcular $\mathrm{E}(X)$.
2. Hallar la f.p.p. de $Y = X^2$ y utilizarla para calcular $\mathrm{E}(Y)$.
3. Calcular $\mathrm{E}\left(X^2\right)$ usando la fórmula de la esperanza de una función de una variable.
4. Calcular $\mathrm{Var}(X)$.

Ejercicio 3

Supongamos que X es una variable aleatoria con $\mathrm{E}(X) = 5$ y $\mathrm{Var}(X) = 2$. ¿Cuánto vale $\mathrm{E}\left(X^2\right)$?

Ejercicio 4

Supongamos que X es una variable aleatoria que toma valores 0, 2 y 3 con probabilidades 0.3, 0.1, 0.6 respectivamente. Sea $Y = 3(X-1)^2$.

1. ¿Cuál es la esperanza de X?
2. ¿Cuál es la varianza de X?
3. ¿Cuál es la esperanza de Y?
4. Sea $F_Y(y)$ la f.d.a de Y. ¿Cuánto vale $F_Y(7)$?

Ejercicio 5

Supongamos que se lanzan n dados equilibrados. Calcular la esperanza y la varianza de cada una de las siguientes variables:

1. La suma de los puntajes.
2. El promedio de los puntajes. ¿Qué pasa en este caso cuando n es muy grande?

Ejercicio 6

Una sucesión de ensayos de Bernoulli continúa tanto como sea necesario para obtener éxito por primera vez. Sea X el número requerido de ensayos. Calcular:

1. $\mathbf{E}(e^{-X})$.
2. $\mathbf{E}(1/X)$.

Ejercicio 7

Sean X e Y dos variables aleatorias discretas.

1. Probar que $\mathbf{var}(X+Y)+\mathbf{var}(X-Y)=2\mathbf{var}(X)+2\mathbf{var}(Y)$.
2. Probar que si $\mathbf{var}(X)=\mathbf{var}(Y)$, entonces $\mathbf{cov}(X+Y,X-Y)=0$.

Ejercicio 8

Sea X el resultado de elegir un número al azar en el intervalo $[-a,a]$ y sea $Y=e^X$. Probar que $\mathbf{cov}(X,Y)=0$. ¿Son X e Y independientes?

Ejercicio 9

Sean X e Y dos variables Bernoulli. Probar que si $\mathbf{cov}(X,Y)=0$, entonces X e Y son independientes.

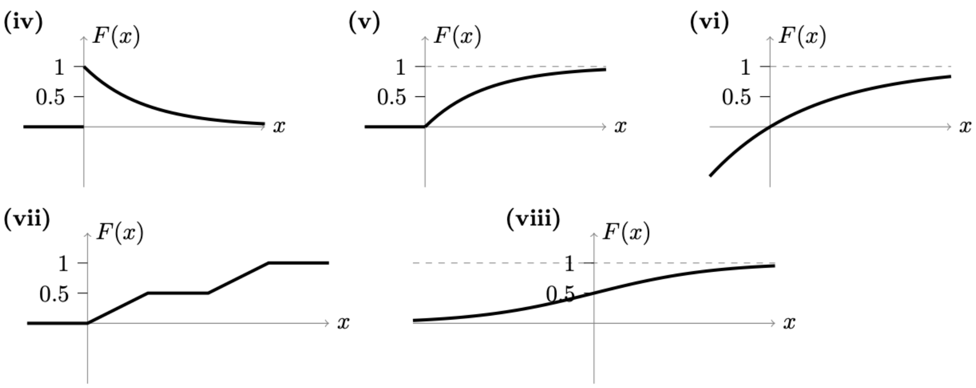
Ejercicio 10

Calcular las esperanzas, las varianzas y la covarianza del número de unos y seis en n lanzamientos de un dado equilibrado.

10. Variables aleatorias continuas I

Ejercicio 1

Para cada uno de los siguientes, diga si puede ser el gráfico de una f.d.a.:



Ejercicio 2 Esperanza y varianza de continuas

Hallar la constante c, la f.d.a., $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$ en cada uno de los siguientes casos:

1. Si X tiene densidad dada por $f(x)=c/x^4$ para $x>1$ y cero en otro caso.

2. Si X tiene densidad dada por $f(x) = cx(1-x)$ para $0 < x < 1$ y cero en otro caso.
3. Si X tiene densidad dada por $f(x) = cx^2(1-x)^2$ para $0 < x < 1$ y cero en otro caso.

Ejercicio 3

Una variable aleatoria continua X tiene densidad $f(x) = x + ax^2$ en $[0,1]$.

1. Hallar a.
2. Hallar la f.d.a. de X.
3. Calcular $\mathbf{P}(1/2 < X < 1)$.
4. Calcular $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

Ejercicio 4

Supongamos que X tiene recorrido $[0,1]$ y f.d.a. dada por $F(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq 1$.

1. Calcular $\mathbf{P}(1/2 < X < 3/4)$.
2. Hallar la densidad de X.

Ejercicio 5

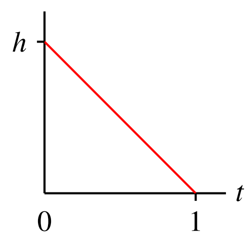
Sea X con recorrido $[0,1]$ y f.d.a. dada por $F(x) = 2x^2 - x^4$ para $0 \leq x \leq 1$.

1. Calcular $\mathbf{P}(1/4 \leq X \leq 3/4)$.
2. Hallar la densidad de X.

Ejercicio 6

El tiempo de atención (en horas) de un mostrador A en una tienda es una variable aleatoria T_A cuya densidad está graficada a la derecha. En otro mostrador B el tiempo de atención (en horas) T_B tiene distribución uniforme en $[0,1]$.

1. Hallar y graficar las funciones $S_A(t) = \mathbf{P}(T_A \geq t)$ y $S_B(t) = \mathbf{P}(T_B \geq t)$ definidas para $0 \leq t \leq 1$. ¿Si fueras un cliente, qué mostrador eligirías?
2. Hallar la esperanza de T_A y de T_B.



Ejercicio 7

Sea X una variable con desidad $f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}$ con $x \in \mathbb{R}$.

1. Bosquejar el gráfico de $f(x)$.
2. Calcular $\mathbf{P}(-1 < X < 2)$.
3. Calcular $\mathbf{P}(|X| > 1)$.
4. ¿Tiene X esperanza?

Ejercicio 8

El consumo máximo de agua potable de una ciudad en un día cualquiera es una variable aleatoria X (en miles de m^3) con densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ kxe^{-\frac{x}{3}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Determine el valor de k para que f sea una densidad (de ahora en adelante se trabaja con ese valor).

2. Hallar el consumo máximo promedio de agua potable por día.
3. Si la capacidad máxima de suministro de agua es de 27.000 m^3, hallar la probabilidad de que en un día determinado no se pueda satisfacer la demanda de agua potable (y por lo tanto haya corte de suministro).
4. Hallar la probabilidad de que en dos días cualesquiera de la próxima semana haya corte de suministro.
5. Hallar la probabilidad de que por lo menos en un día de la próxima semana haya corte de suministro.

Ejercicio 9

Un punto se elige al azar en un círculo de radio uno. Sea X la coordenada x del punto.

1. Hallar la densidad y la esperanza de X.
2. Hallar la densidad y la esperanza de $Y = |X|$.

Ejercicio 10

Sea θ la latitud, entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, de un punto elegido al azar en una esfera de radio uno.

1. Hallar la densidad de θ.
2. Hallar la densidad de Y la coordenada vertical del punto.

11. Variables aleatorias continuas II

Ejercicio 1

Sea X una variable aleatoria que mide el tiempo de vida (en años) de un cierto aparato electrónico. El fabricante desea garantizar que la duración de estos aparatos supera los x_0 años con una probabilidad de 0,90. Si se sabe que $X \sim \exp(0{,}01)$, determinar el menor x_0 que cumple la condición.

Ejercicio 2

Un sistema contiene cierto tipo de componente cuyo tiempo de vida en años está dado por la variable aleatoria $T \sim \exp\left(\frac{1}{8}\right)$. Si 5 de estos componentes se instalan en diferentes sistemas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 continúen funcionando después de 8 años?

Ejercicio 3

Se asume que el número de ómnibus N_t que pasan en un intervalo $[0,t]$ es aleatorio y se distribuye según una distribución Poisson de parámetro λt, con $\lambda > 0$. Sea X el tiempo de espera de un pasajero que llega en un instante cualquiera (que podemos pensar como tiempo 0).

1. Calcular $P(X > t)$ para $t > 0$.
2. Deducir que X tiene distribución exponencial de parámetro λ.
3. ¿Cuál es el tiempo medio de espera de un pasajero?

4. Asumiendo que $\lambda = \frac{1}{15}$, hallar la probabilidad de que el pasajero tenga que esperar menos de 5 minutos.

Ejercicio 4

1. Suponga que X_1 y X_2 son variables aleatorias exponenciales independientes con esperanza $1/\lambda$. Sea $T = \text{mín}\{X_1, X_2\}$. Hallar la f.d.a. de T. (Pista: ¿cuánto vale $\mathbf{P}(T \geq t)$?)
2. Estamos probando 3 marcas diferentes de bombillas B1, B2 y B3 cuyas vidas son variables aleatorias exponenciales con media 1/2, 1/3 y 1/5 años, respectivamente. Suponiendo que todas las bombillas son independientes, ¿cuál es el tiempo esperado antes de que una de las bombillas falle? (Pista: ver el ejercicio anterior.)

Ejercicio 5

Sea $X \sim \exp(\lambda)$.

1. ¿Cuál es la distribución de cX para $c > 0$ una constante?
2. Hallar la f.d.a. de $Z = ae^X$ y su densidad. Esta distribución se llama Pareto de parámetros a y λ.
3. Si $Y = X^2$, calcular su densidad y f.d.a.

Ejercicio 6

Hallar la densidad de X^2 en donde X tiene distribución uniforme

a) en $(0,1)$; b) en $(-1,1)$; c) en $[-1,2]$.

Ejercicio 7

Sea $X \sim \mathscr{C}(0,1)$. Hallar la densidad de $Y = \frac{1}{X}$.

Ejercicio 8

Supongamos que X e Y tienen densidad conjunta $p(x,y) = c(x^2 + xy)$ en $[0,1] \times [0,1]$.

1. Hallar c.
2. Hallar las f.d.a. marginales F_X y F_Y.
3. Hallar las densidades marginales p_X y p_Y.
4. Calcular $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.
5. Calcular la covarianza de X e Y.

Ejercicio 9

Sean X e Y dos variables aleatorias continuas con densidad conjunta

$$p(x,y) = cx^2y(1+y) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 3 \text{ y } 0 \leq y \leq 3,$$

y $p(x,y) = 0$ de lo contrario.

1. Hallar el valor de c.
2. Calcular la probabilidad $\mathbf{P}(1 \leq X \leq 2, 0 \leq Y \leq 1)$.

3. Hallar la f.d.a. marginal $F_X(x)$ para x entre 0 y 3.
4. Hallar la densidad marginal $p_X(x)$ directamente de $p(x,y)$ y verificar que sea la derivada de $F_X(x)$.
5. ¿Son X e Y independientes?

Ejercicio 10

Supongamos que X e Y son variables aleatorias continuas con densidad conjunta $p(x,y) = x+y$ en el cuadrado unitario $[0,1] \times [0,1]$.

1. Calcule las densidades marginales de X e Y.
2. ¿Son X e Y independientes?
3. Calcular $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{E}\left(X^2+Y^2\right)$, $\mathrm{cov}(X,Y)$.

12. Ley de los grandes números

Ejercicio 1

Una moneda justa se lanza 100 veces. El número esperado de caras es 50, y la desviación estándar es $(100 \cdot 1/2 \cdot 1/2)^{1/2} = 5$.

¿Qué dice la desigualdad de Chebyshev acerca de la probabilidad de que la cantidad de caras que aparecen se desvíe del número esperado 50 en tres o más desviaciones estándar (es decir, en al menos 15)?

Ejercicio 2

El puntaje de un estudiante en un examen de cálculo es una variable aleatoria con valores en $[0,100]$, media 70 y varianza 25.

1. Dar una cota inferior para la probabilidad de que el puntaje del estudiante caiga entre 65 y 75.
2. Si 100 estudiantes toman el examen, dar una cota inferior para la probabilidad de que el promedio de la clase caiga entre 65 y 75.

Ejercicio 3

Las acciones de una compañía tienen un precio Y_n en el n-ésimo día hábil del año. El cambio de precio $X_n = Y_{n+1} - Y_n$ es una variable aleatoria con media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 1/4$. Si $Y_1 = 30$, dar una cota inferior para las siguientes probabilidades (bajo el supuesto de que los X_n son i.i.d.):

1. $\mathbf{P}(25 \leq Y_2 \leq 35)$.
2. $\mathbf{P}(25 \leq Y_{11} \leq 35)$.
3. $\mathbf{P}(25 \leq Y_{101} \leq 35)$.

Ejercicio 4

Suponga que X es una variable aleatoria distribuida exponencialmente con media $\mathrm{E}(X) = 1$. Para $x = 0{,}5$, 1 y 2, compare $\mathbf{P}(X \geq x)$ con la cota de la desigualdad de Markov.

Ejercicio 5

Sea X una variable aleatoria con esperanza $\mu = 10$ y varianza $\sigma^2 = 100/3$. Usando la desigualdad de Chebyshev, encuentre una cota superior para las siguientes probabilidades

1. $\mathbf{P}(|X-10| \geq 2)$.
2. $\mathbf{P}(|X-10| \geq 5)$.
3. $\mathbf{P}(|X-10| \geq 9)$.
4. $\mathbf{P}(|X-10| \geq 20)$.

Ejercicio 6

Sea X una variable uniforme en el intervalo $[0,20]$.

1. Calcular la esperanza y la varianza de X.
2. Calcular $\mathbf{P}(|X-10| \geq 2), \mathbf{P}(|X-10| \geq 5), \mathbf{P}(|X-10| \geq 9), \mathbf{P}(|X-10| \geq 20)$ exactamente. ¿Cómo se comparan tus respuestas con las del ejercicio anterior? ¿Qué tan buena es la desigualdad de Chebyshev en este caso?

Ejercicio 7

Sea X una variable aleatoria con $\mathrm{E}(X) = 0$ y $\mathrm{Var}(X) = 1$. ¿Qué valor entero k nos asegurará que $\mathbf{P}(|X| \geq k) \leq 0{,}01$?

Ejercicio 8

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables Poisson independientes con media 1.

Primero use la Desigualdad de Markov para obtener una cota superior a

$$\mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_{10} > 15).$$

A continuación, calcule la probabilidad exacta de que $X_1 + \cdots + X_{10} > 15$. Use que el hecho de que la suma de las variables aleatorias Poisson independientes de parámetros λ_1, λ_2 es Poisson de parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$.

Ejercicio 9

Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables i.i.d. con esperanza μ. Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que $g\left(\overline{X}_n\right) \xrightarrow{P} g(\mu)$ cuando n tiende a infinito.

Ejercicio 10

Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables i.i.d. con varianza σ^2. Probar que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$ cuando n tiende a infinito.

13. Teorema central del límite

Ejercicio 1

¿Cuál es la probabilidad de que una variable aleatoria normal estándar caiga

a) entre 0 y 0.001? b) entre 1 y 1.001?

Ejercicio 2

Sea X con distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ tal que $\mathbf{P}(X \leq 0) = 1/3$ y $\mathbf{P}(X \leq 1) = 2/3$.

a) ¿Cuánto valen μ y σ? b) ¿Y si $\mathbf{P}(X \leq 1) = 3/4$?

Ejercicio 3

Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1. Calcular las siguientes probabilidades:

$$P(X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]), \quad P(X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]) \quad \text{y} \quad P(X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]).$$

2. Hallar primer cuartil, mediana y tercer cuartil de X.

Ejercicio 4

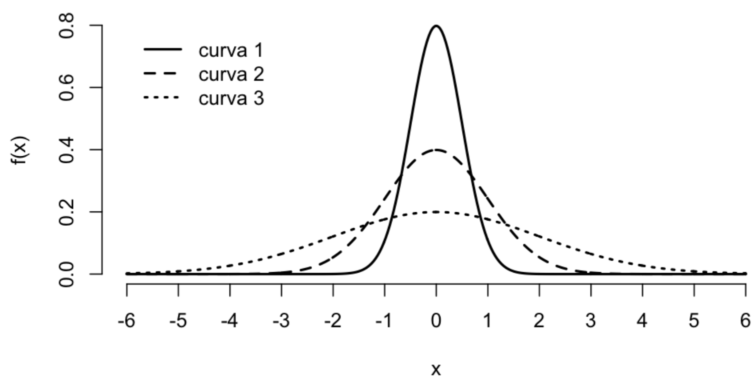
La duración de la gestación humana está bien aproximada por una distribución normal con una media de $\mu = 280$ días y una desviación estándar de $\sigma = 8{,}5$ días.

Supongamos que el examen final está programado para el 18 de julio y su profesora embarazada espera para el 25 de julio.

1. Calcular la probabilidad de que ella dé a luz el día del examen o antes.
2. Calcular la probabilidad de que ella dé a luz en julio en algún momento después del examen.
3. La profesora decide adelantar la fecha del examen para que haya un 95 % de probabilidades de que dé a luz después. ¿Qué fecha debe elegir?

Ejercicio 5

La siguiente figura muestra la densidad de tres variables aleatorias normales centradas. Indicar aproximadamente cuánto vale el desvío estándar σ en cada caso.



Ejercicio 6

Sea Z con distribución normal estándar. Hallar la densidad de

a) $|Z|$; b) Z^2; c) $1/Z$; d) $1/Z^2$.

Ejercicio 7

Sea $X \sim \text{Bin}(100, 1/3)$. Un cálculo "exacto" en computadora da $\mathbf{P}(X \leq 30) = 0{,}2765539$. Usa el TCL para dar una aproximación de $\mathbf{P}(X \leq 30)$.

Ejercicio 8

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_{81}$ variables i.i.d., cada una con valor esperado $\mu = \mathrm{E}(X_i) = 5$, y varianza $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_i) = 4$. Aproximar $\mathbf{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_{81} > 369)$ usando el TCL.

Ejercicio 9

Imagina que en Uruguay una ley elimina las monedas inferiores a \$5. Una panadería procesa $n = 100$ pedidos de productos horneados cada día, y redondeará el precio de cada pedido al múltiplo de 5 más cercano (por ejemplo, \$32.47 redondea a \$30, mientras que \$13.58 redondea a \$15).

Sea p la probabilidad de que el error de redondeo total en el transcurso de un día supere $t = 50$ pesos (en valor absoluto).

Estimar p usando el teorema central del límite.

Ejercicio 10

En una elección a presidente, el 50 % de la población apoya a Ana, el 20 % apoya a Beto y el resto se divide entre Clara, Diego y Erica. Una encuesta pregunta a 400 personas al azar a quién apoyan.

1. Usando el TCL estimar la probabilidad de que al menos el 52.5 % de los encuestados prefieran a Ana.
2. Usando el TCL estimar la probabilidad de que menos del 25 % de los encuestados prefieran a Clara, Diego o Erica.