SyC - Hoja 6 - Ej. 1

1) Dado el sistema de la figura, determinar los valores de **$k > k_h$** de modo que:

Caso 1) La relación de amortiguación de los polos dominantes sea $\xi = 0{,}5$.

Caso 2) La constante de aceleración $\mathbf{Ka = 50}$ seg^{-2}

Para que valores de **k**, ambos polos tienen parte real menor que -10?

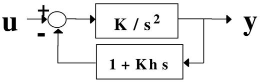
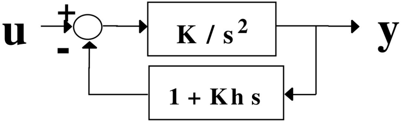


Figura 6.1

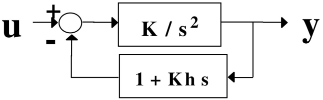
Función de transferencia de lazo cerrado



$$H^{\mathrm{lc}}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{k}{s^2}}{1 + \frac{k}{s^2}\left(1 + k_h s\right)} = \frac{k}{s^2 + k k_h s + k}$$

Caso 1: Relación de amortiguación de los polos dominantes igual a $\zeta = 0{,}5$

Requerimiento sobre la respuesta transitoria



$$H^{\mathrm{lc}}(s) = \frac{k}{s^2 + kk_h s + k}$$

$$H^{\mathrm{lc}}(s) = \frac{k}{s^2 + kk_h s + k} = \frac{G\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\begin{cases} G\omega_n^2 = k \\ 2\zeta\omega_n = kk_h \\ \omega_n^2 = k \end{cases} \qquad \begin{cases} G = 1 \\ \zeta = \frac{kk_h}{2\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k}k_h}{2} \\ \omega_n = \sqrt{k} \end{cases}$$

Para tener $\zeta = 0{,}5$, se debe cumplir:

$$\boxed{\sqrt{k}k_h = 1}$$

Caso 2: Constante de aceleración igual a $K_a = 50\,\mathrm{s}^{-2}$

Obsérvese que no es lo mismo el "error" (entrada menos salida):

$$e(t) := u(t) - y(t)$$

que la señal de comparación:

$$d(t) := u(t) - y(t) - k_h \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$$

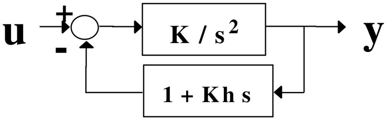
a la que denominaremos "diferencia de retorno".

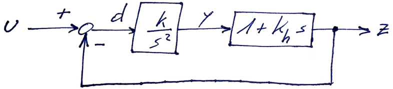
Vamos a analizar el comportamiento asintótico, $t \to \infty$ en ambos casos, es decir para $d(t)$ y para $e(t)$.

Caso 2.a: comportamiento asintótico de la señal de diferencia de retorno.

Caso 2.b: comportamiento asintótico de la señal de error.

Caso 2.a: Comportamiento asintótico de la señal de *diferencia de retorno*





La *diferencia de retorno* es:

$$d(t) := u(t) - (y(t) + k_h \dot{y}(t)) \,.$$

Sea $H(s) := \frac{k}{s^2}(1 + k_h s)$. En este caso,

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 H(s) = k$$

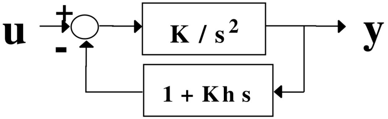
Para tener $K_a = 50\,\mathrm{s}^{-2}$, se debe cumplir: $\boxed{k = 50\,\mathrm{s}^{-2}}$.

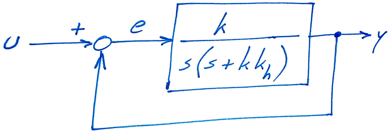
En estas condiciones, para $u(t) = \frac{t^2}{2}$, la *diferencia de retorno*, $d(t) = u(t) - (y(t) + k_h \dot{y}(t))$, tiende a $\frac{1}{K_a}$ para $t \to \infty$.

Caso 2.b: Comportamiento asintótico de la señal de *error*

Para poder aplicar lo visto en el teórico al *error*, $e := u(t) - y(t)$, debemos encontrar una $H(s)$ "ficticia" tal que $H^{\mathrm{lc}}(s) = \frac{H(s)}{1+H(s)}$. Es decir, sea ahora:

$$H(s) := \frac{H^{\mathrm{lc}}(s)}{1 - H^{\mathrm{lc}}(s)} = \frac{k}{s\,(s + kk_h)}$$





En este caso,

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 H(s) = 0, \quad K_v = \lim_{s\to 0} sH(s) = \frac{1}{k_h}.$$

El sistema (de entrada u y salida y) *puede* seguir con error asintótico $\frac{1}{k_h}$ una entrada en forma de rampa con pendiente unitaria, pero *no puede* seguir con error asintótico finito una entrada en forma de rampa cuadrática.

¿Para qué valores de k, ambos polos tienen parte real menor que -10?

Polos de $H^{\mathrm{lc}}(s)$: $-\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n$, donde $\zeta = \frac{\sqrt{k}k_h}{2}$ y $\omega_n = \sqrt{k}$.

- Si $0 < \zeta \leq 1$, es decir si

$$0 < \frac{\sqrt{k}k_h}{2} \leq 1, \tag{1}$$

los polos son: $-\zeta\omega_n \pm \jmath\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n$.
Debe cumplirse $\zeta\omega_n > 10$, es decir:

$$k > \frac{20}{k_h}. \tag{2}$$

De (1) y (2):

$$\boxed{\frac{20}{k_h} < k \leq \frac{4}{k_h^2}}. \tag{3}$$

Debe verificarse $k_h \leq \frac{1}{5}$, para que exista k tal que (3).

¿Para qué valores de k, ambos polos tienen parte real menor que -10?

Polos de $H^{\mathrm{lc}}(s)$: $-\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2-1}\omega_n$, donde $\zeta = \frac{\sqrt{k}k_h}{2}$ y $\omega_n = \sqrt{k}$.

- Si $\zeta > 1$, es decir si

$$\frac{\sqrt{k}k_h}{2} > 1, \tag{4}$$

los polos son: $-\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2-1}\omega_n$.
Debe cumplirse $\omega_n\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}\right) < -10$, es decir:

$$\omega_n\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\right) > 10. \tag{5}$$

De (4) y (5):

$$\boxed{\begin{cases} \sqrt{k}\left(\frac{\sqrt{k}k_h}{2} - \sqrt{\frac{kk_h^2}{4} - 1}\right) > 10 \\ \frac{\sqrt{k}k_h}{2} > 1 \end{cases}}. \tag{6}$$