

# Respuesta al impulso del sistema Point-spread function - PSF . PSF en intensidad.

## Sistema lineal

la imagen de un objeto distribuido se puede describir en función de la contribución de las imágenes de fuentes puntuales localizadas a lo largo de él (se puede caracterizar por su respuesta a impulsos unitarios)

## Sistema lineal invariante (o espacio invariante)

Mover la fuente puntual afecta sólo la localización de su imagen pero no afecta la forma funcional (mover la fuente es trasladar la respuesta en otro punto)

\* Consideramos por ahora iluminación incoherente (luz blanca) (los puntos del objeto emiten sin relación de fase)

Entonces, la imagen del objeto (contenida en un plano ortogonal al eje óptico del sistema ideal) se puede modelar como una colección de fuentes puntuales (deltas de Dirac) en ubicaciones específicas, c/u con un peso dado por la intensidad del objeto en esa ubicación en particular:

$$i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \delta(x_i - x_o, y_i - y_o) f(x_o, y_o) dx_o dy_o \quad (1)$$

distribución de intensidad asociada con la imagen del objeto

distribución de intensidad asociada con el objeto (incoherente)

Sistema ideal  $i(x_i, y_i) = f(x_o, y_o)$   
(se preservan todos los detalles)

Obs: por simplicidad en la notación es usual asumir que la magnificación del sistema es uno y que las coordenadas están definidas de modo de remover los efectos de inversión de la imagen con respecto al objeto.

El resultado previo es válido para un sist. ideal donde una fuente puntual en el plano objeto, es matemáticamente representada por una delta en el plano imager (la respuesta del sistema a un impulso es otro impulso)

En el caso de sistemas reales el lugar de la delta debemos considerar la función de dispersión del punto (Point-spread function -PSF) del sistema también conocida como respuesta al impulso:  $h(x_i, y_i)$

Para simplificar asumimos que

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) dx dy = 1$$

y podemos reescribir (1) como:

$$i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{+\infty} h(x_i - x_0, y_i - y_0) f(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \quad (2)$$

es la convolución de la intensidad del objeto con la respuesta al impulso del sistema

$$i(x, y) = f(x, y) * h(x, y) \quad (3)$$

↗ sistema real (se pierden algunos detalles)      ↖ convolución 2D

Obs: si conocemos la PSF, dado el objeto, podemos calcular cómo se verá su imagen a través del sistema óptico ('problema directo')

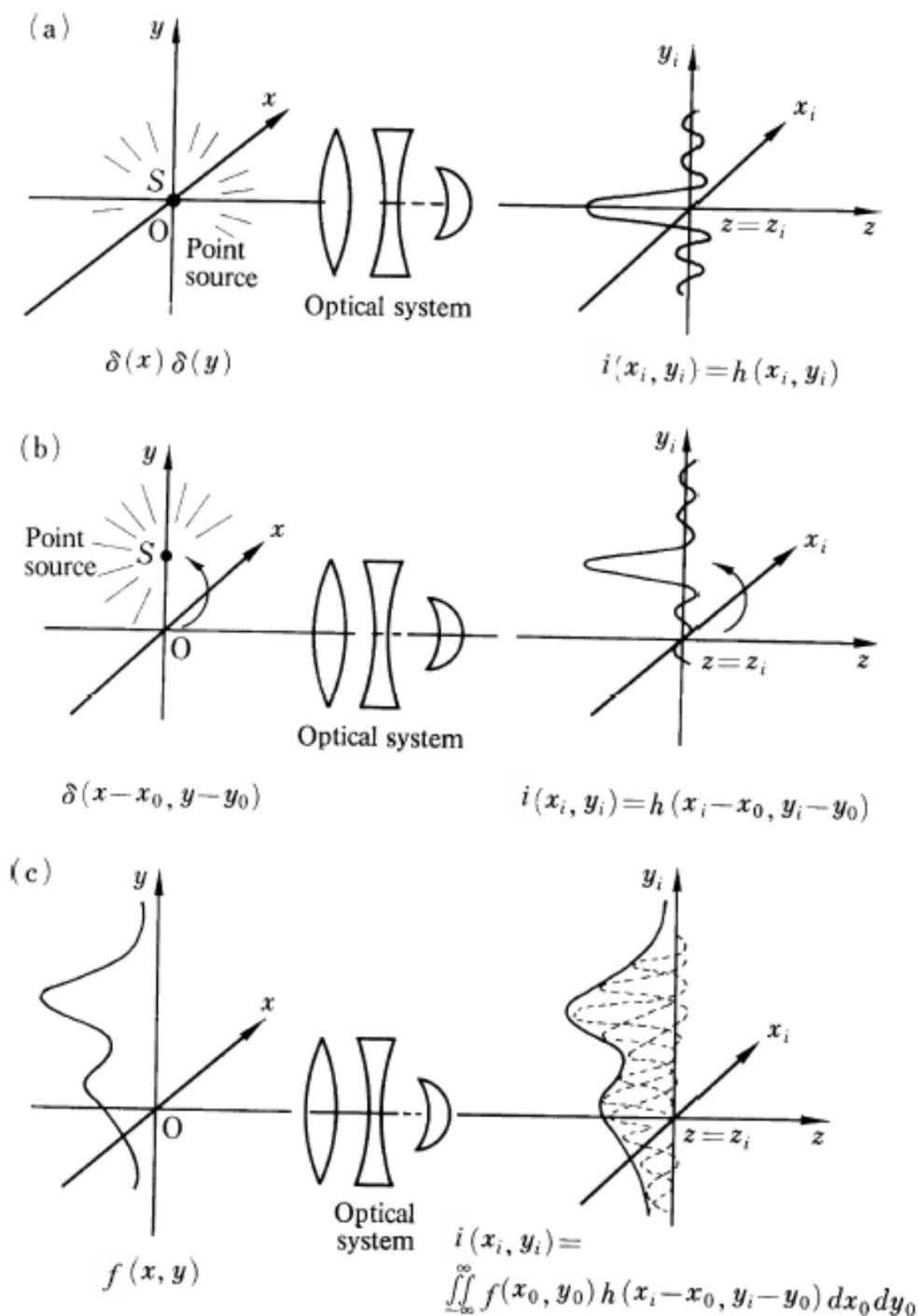


Figure 3.1: Impulse response  $h(x, y)$ . a) Point source at origin in object space, b) point source at  $(x_0, y_0)$ , c) distributed source. Adapted from [Iizuka, 2013]

# OTF y MTF

La convolución con la PSF en el dominio espacial puede resultar una operación relativamente compleja, mientras que en el espacio de Fourier (dominio frecuencial) es mucho más sencilla de realizar.

La transf. de Fourier (espectro de Fourier o espectro frecuencial) de una función  $g(x,y)$  de dos variables independientes  $x$  e  $y$  (en el dominio espacial) se puede representar por

$$G(u,v) = \underbrace{\mathcal{F}\{g(x,y)\}}_{\text{Transf. de Fourier (F.T.)}} = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (4)$$

donde  $u, v$  son frecuencias espaciales.

$$\left( \begin{array}{l} \text{la transf. inversa:} \\ g(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\{G(u,v)\} = \iint_{-\infty}^{+\infty} G(u,v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \end{array} \right)$$

## teorema de Convención

$$\text{Si } \mathcal{F}\{f(x,y)\} = F(u,v) \text{ y } \mathcal{F}\{g(x,y)\} = G(u,v)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left\{ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta) g(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta}_{f * g} \right\} = F(u,v) G(u,v)$$

Por lo que podemos escribir (3) en el dominio frecuencial como:

$$I(u,v) = H(u,v) F(u,v) \quad (5)$$

donde

$$\begin{cases} I(u,v) = \mathcal{F}\{i(x,y)\} \\ \text{OTF} \rightarrow H(u,v) = \mathcal{F}\{h(x,y)\} \\ F(u,v) = \mathcal{F}\{f(x,y)\} \end{cases}$$

producto punto a punto en el espacio de frecuencias

A la transformada de Fourier de la respuesta al impulso se la conoce como la función de transferencia óptica (Optical Transfer Function - OTF) del sistema.

La OTF verifica:

$$\begin{cases} \text{i) } H(0,0) = 1 \\ \text{ii) } H(-u,-v) = H^*(u,v) \\ \text{iii) } |H(u,v)| \leq |H(0,0)| \end{cases}$$

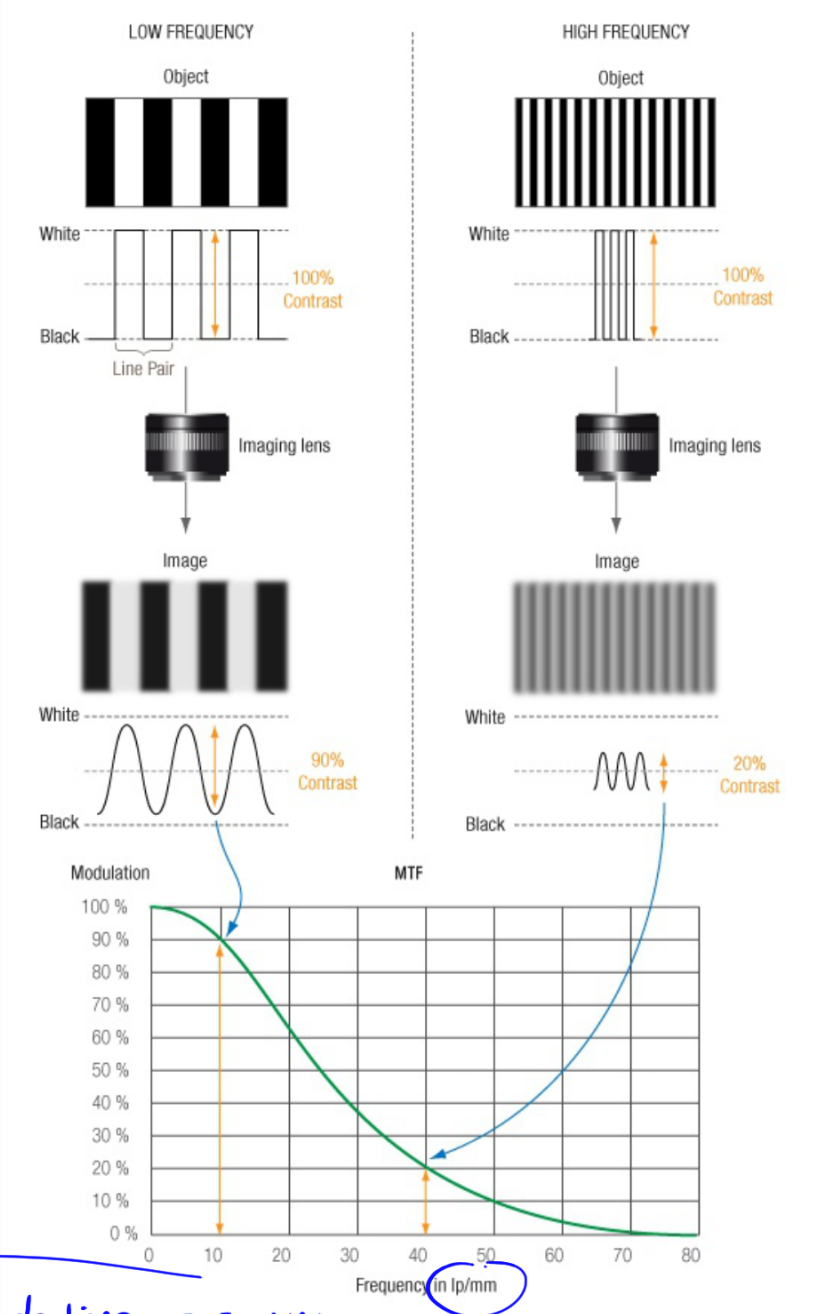
complejo conjugado

Por otro lado, el módulo de la OTF se conoce como función de transferencia de la modulación (Modulation Transfer Function - MTF)

Contraste:  $m = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$  ← máximo y mínimo de la intensidad

La MTF da cuenta del cambio en el contraste al pasar a través del sistema óptico.

$$MTF = \frac{m \text{ (plano imagen)}}{m \text{ (plano objeto)}}$$



spoke target (la menor y mayor frec.)

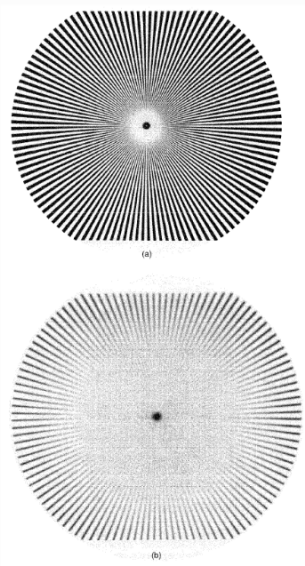
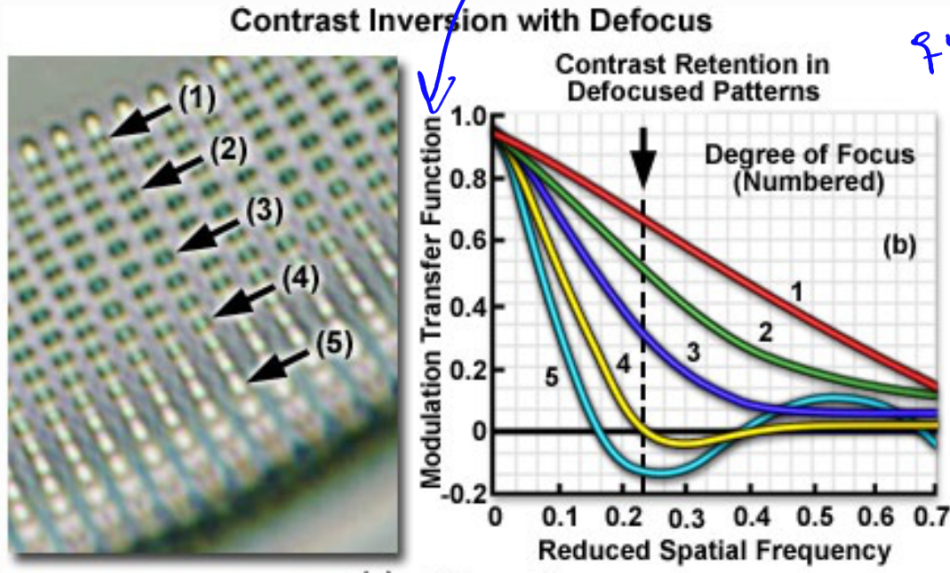


FIGURE 6.12 (a) Focused and (b) misfocused images of a spoke target.

lp/mm → pares de líneas por mm (la frec. máxima (Nyquist) corresponde alternancia de líneas blancas y negras de 1 pixel de ancho)

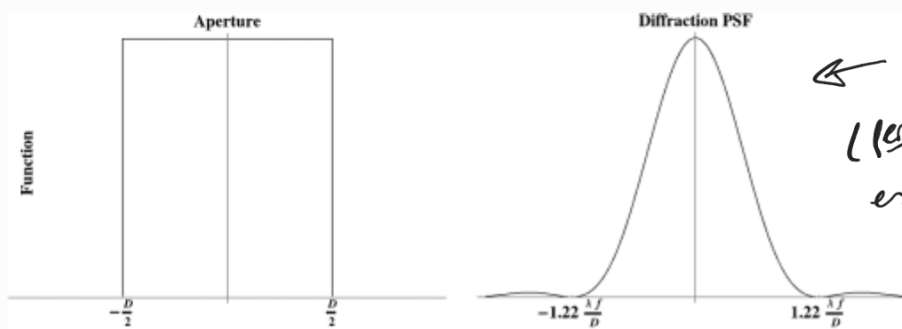
En la fig. anterior vemos dos series de franjas negras y blancas con frecuencia espacial variable con contraste fijo. Vemos que la imagen, a través del sistema óptico, de alta frecuencia resulta con menor contraste que la de baja frecuencia (se pierden detalles). Para frecuencias muy altas, la imagen se vuelve prácticamente uniforme (gris).

ejemplo:  
 PSF = círculo  
 → OTF =  $\text{sinc}$   
 que tiene ceros

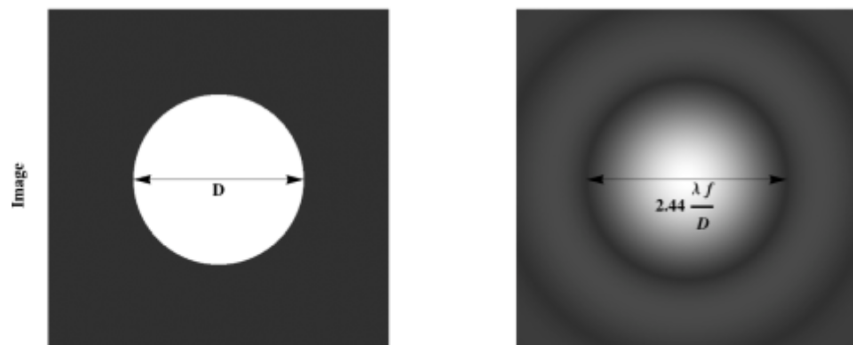


(a) Figure 8

sist. limitado por difracción



← perfil de intensidad  
 (1er cero de la PSF es en  $1.22 \lambda / D$ )  
 $f = \text{dist. focal}$





La óptica geométrica predice una PSF que es la proyección geométrica en el plano imagen de la pupila de salida, y por lo tanto la PSF en esta aproximación resultaría uniformemente brillante sobre esa proyección geométrica y cero en cualquier otro sitio.

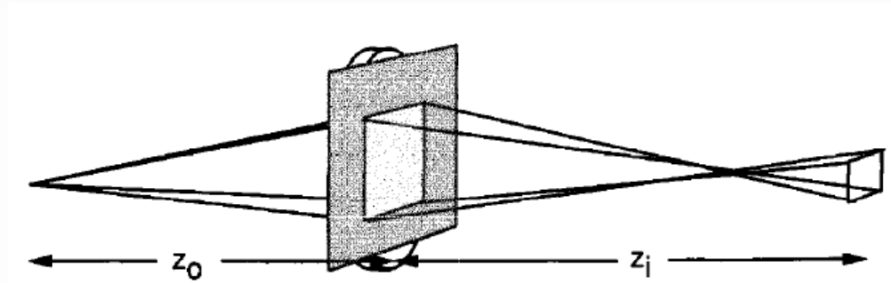


FIGURE 6.13

Geometrical optics prediction of the point-spread function of a system having a square pupil function and a severe focusing error.

La transf. de Fourier de esa proyección geométrica es una buena aproximación a la OTF del sistema. Cuando existen aberraciones severas, la PSF está determinada fundamentalmente por la óptica geométrica y la difracción prácticamente no juega ningún rol en la determinación de la forma de la PSF.

# Problemas inversos

Problema directo



Object



Shadow



Problema inverso



Un ejemplo de problema inverso es tratar de inferir la forma de un objeto sólo conociendo su sombra (proyección).

¿Es posible? ¿Qué tipo de errores podemos cometer? ¿cuánta información necesitamos?

Problema: diferentes causas (objetos de diferente forma) pueden dar resultados similares (sombras similares).

Para resolver un problema inverso necesitamos un modelo físico-matemático del proceso (formalismo matemático que describa la física del proceso).

Necesitamos entender el problema directo, qué causas llevan a qué efectos para luego, dados los efectos conocidos, valores de la matemática para dar posibles causas, tal como decidir cuál de los objetos es el responsable de la sombra en la imagen de arriba.

El modelo físico-matemático nos permite también establecer limitaciones sobre él y la precisión de la respuesta.

## Deblurring ("deshar" el desenfoque). Restauración de la imagen

Como vimos, la imagen de un objeto a través de un sistema óptico puede representarse como una transformación lineal (espacio-invariante) descrita por la PSF del sistema  $h(x, y)$ :

$$i(x, y) = h(x, y) * f(x, y) \leftarrow \text{convolución de la respuesta al impulso (PSF) con la distribución de intensidad del objeto.}$$

En la práctica, debemos considerar además la presencia de ruido aditivo que asumiremos aleatorio:  $\eta(x,y)$

$$\Rightarrow i(x,y) = h(x,y) * f(x,y) + \eta(x,y) \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{dominio} \\ \text{espacial} \end{matrix}$$

$$I(u,v) = H(u,v)F(u,v) + N(u,v) \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{dominio} \\ \text{frecuencial} \end{matrix}$$

El objetivo es estimar lo mejor posible la imagen original ( $f$ ) a partir de su imagen degradada ( $i$ )  $\rightarrow$  restauración.

Este tipo de problema se dice que está "mal planteado" (ill-posed problem) y la recuperación de la imagen es inestable frente a pequeños cambios.

## Filtrado Inverso

$\leftarrow$  PSF Gaussiana

$$h(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2}$$

$n(x,y)$  = Normal distribution, mean zero



$f(x,y)$



$g(x,y) \leftarrow i(x,y)$  imagen degradada

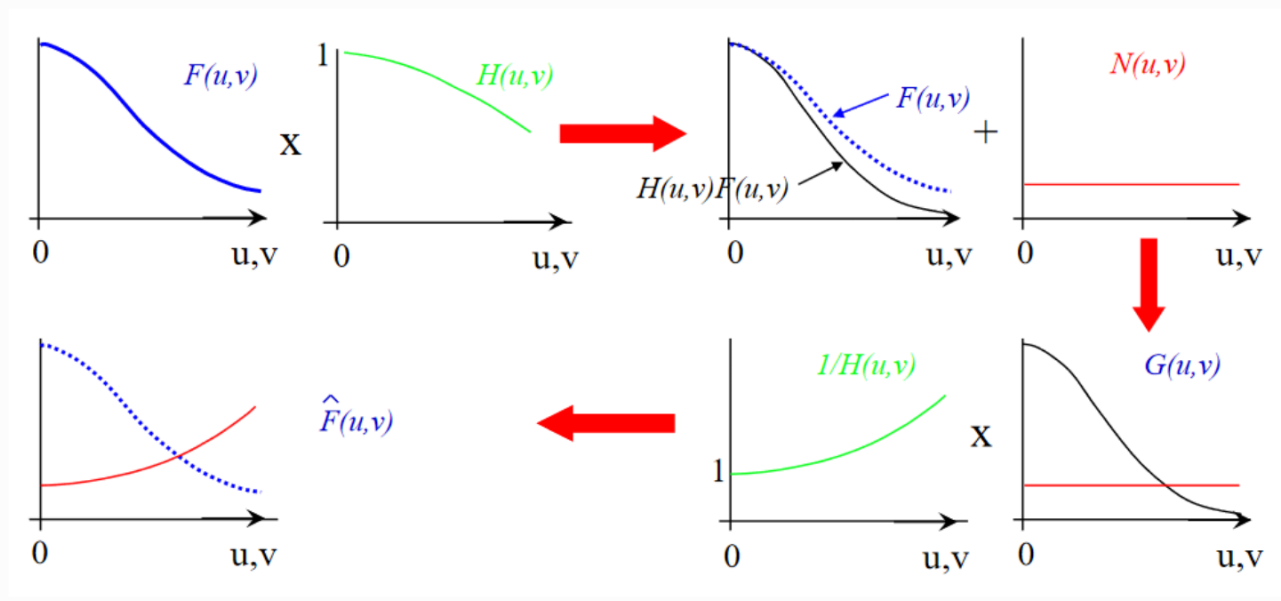
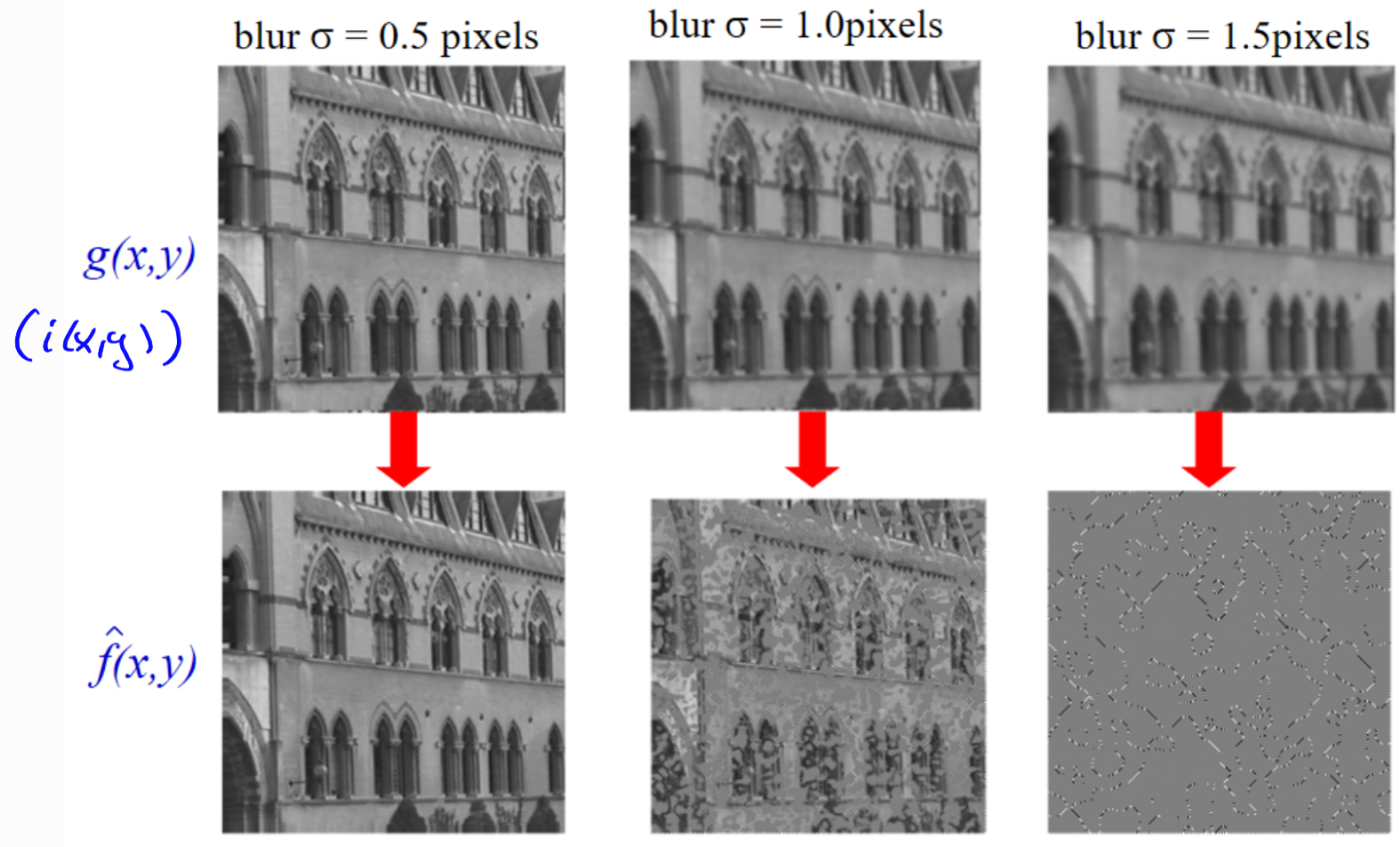
blur  $\sigma = 1.0$  pixels

noise  $\sigma = 0.3$  grey levels

Ignoramos por el momento la influencia del ruido y consideramos un estimado de  $f$  a partir de : estimación de  $F(u,v)$

$$\hat{F}(u,v) = \frac{I(u,v)}{H(u,v)} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \hat{f}(x,y)$$

noise  $\sigma = 0.3$  grey levels       $\hat{F}(u,v) = G(u,v) / H(u,v)$       ( $G$  es  $I$ )



Obs: aún si conocemos la PSF  $(h)$  y por tanto la OTF  $(H)$ , es posible que no logremos recuperar la imagen original debido a la amplificación del ruido en las altas frecuencias.

El problema está en el término del ruido que no consideramos:

$$I(u, v) = H(u, v) F(u, v) + N(u, v)$$

$$\rightarrow \hat{F}(u, v) = \frac{I(u, v)}{H(u, v)} = \underbrace{F(u, v)}_{\substack{\uparrow \\ \text{imagen sin} \\ \text{degradar} \\ \text{(objeto original)}}} + \underbrace{\frac{N(u, v)}{H(u, v)}}_{\substack{\uparrow \\ \text{este} \\ \text{término puede} \\ \text{ser dominante}}}$$

↑  
estimación de la imagen original

↑  
imagen sin degradar (objeto original)

↑  
este término puede ser dominante

Además los ceros de  $H(u, v)$  pueden generar artefactos del tipo "ringing" en la imagen restaurada.

# Filtro de Wiener

Se trata de encontrar en cuenta la función de degradación (PSF) así como características estadísticas del ruido en el proceso de restauración.

El filtro de Wiener busca minimizar la diferencia entre la imagen sin degradar y su estimación.

$$\begin{aligned} E^2 &= \iint |f(x,y) - \hat{f}(x,y)|^2 dx dy \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} |F(u,v) - \hat{F}(u,v)|^2 du dv \end{aligned} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{teo. de} \\ \text{Parseval} \end{array}$$

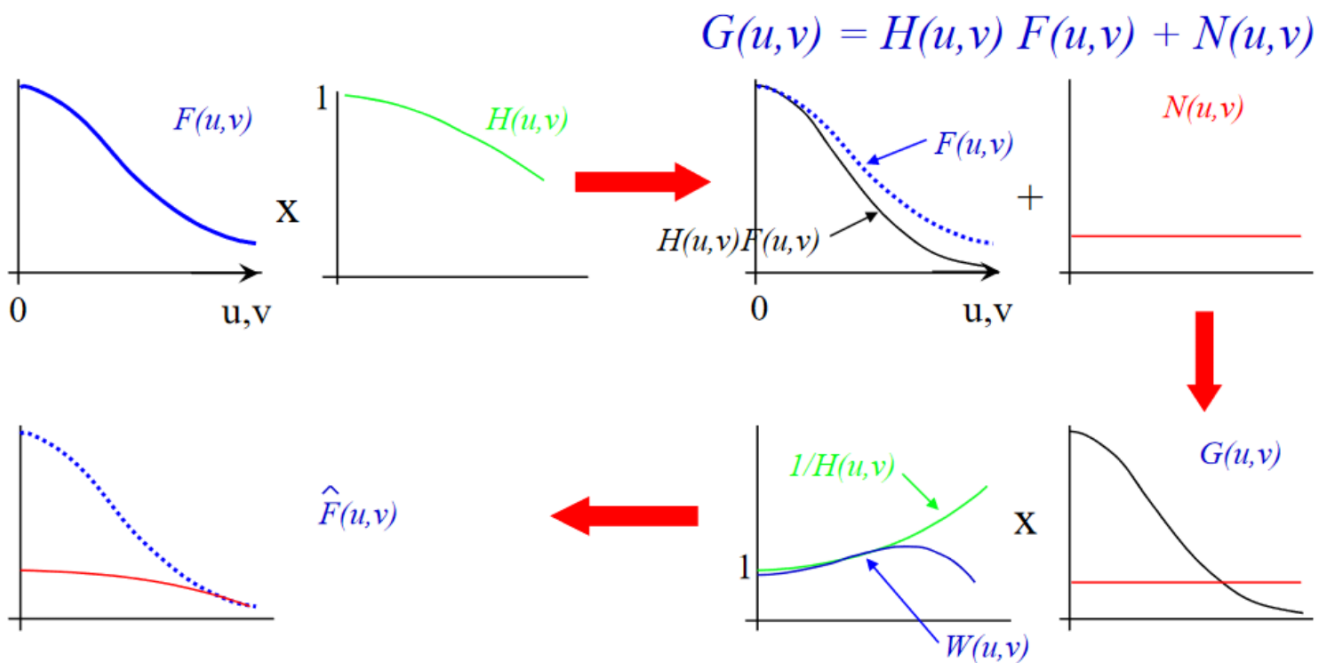
Si bien no vamos a deducirlo, el estimando en el dominio de frecuencias está dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \hat{F}(u,v) &= \left[ \frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + K(u,v)} \right] I(u,v) \\ &= \frac{1}{H(u,v)} \left[ \frac{|H(u,v)|^2}{|H(u,v)|^2 + K(u,v)} \right] I(u,v) \end{aligned} \quad = W(u,v)$$

donde  $K(u, \nu) = \frac{S_n(u, \nu)}{S_f(u, \nu)}$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_n(u, \nu) = |N(u, \nu)|^2, \text{ densidad espectral de potencia del ruido } \eta(x, y) \\ S_f(u, \nu) = |F(u, \nu)|^2, \text{ dens. espectral de potencia de } f(x, y) \end{array} \right.$$

Obs: para aquellas frecuencias en que la relación señal-ruido (SNR) es alta ( $K = S_n/S_f \ll 1$ ), se reduce el filtro inverso, y cuando SNR es bajo ( $K = S_n/S_f \gg 1$ ) se atenúa el efecto del ruido en las altas frecuencias.





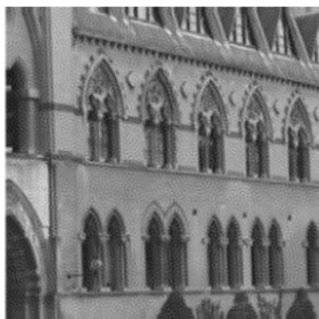
blur  $\sigma = 1.5$  pixels

noise  $\sigma = 0.3$  grey levels

$$\hat{F}(u,v) = W(u,v) G(u,v) \quad W(u,v) = \frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + K(u,v)}$$

$g(x,y)$

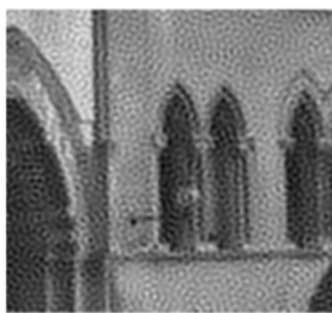
$\hat{f}(x,y)$



$K = 1.0 \text{ e } -5$

$K = 1.0 \text{ e } -3$

$K = 1.0 \text{ e } -1$



blur  $\sigma = 3.0$  pixels

noise  $\sigma = 0.3$  grey levels

$f(x,y)$

$g(x,y) = i(x,y)$

$\hat{f}(x,y)$



$K = 5.0 \text{ e } -4$

# Filtrado Inverso Regularizado (Laplace)

Este método busca la optimización de la restauración de la imagen minimizando:

$$\min \left\{ \underbrace{\| i_{\text{vect}} - h_{\text{matriz}} \hat{f}_{\text{vect}} \|}_{\| \eta \|^2}^2 + \alpha \| \nabla^2 f(x,y) \|^2 \right\}$$

siendo  $\|w\|^2 = w^T w$  la norma Eudídea y  $\alpha$  un parámetro de regularización.

la estimación de la función no degradada en el dominio de frecuencias resulta:

$$\hat{F}(u,v) = \left[ \frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + \alpha |P(u,v)|^2} \right] I(u,v)$$

donde  $P(u,v)$  es  $\mathcal{F}\{p(x,y)\}$  ← Transformada de Fourier del Laplaciano

El Laplaciano nos da una idea de la "suavidad" de la imagen (derivadas segundas)

$$\nabla^2 u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \leftarrow \text{operador Laplaciano en coords. cartesianas}$$

$$= u(x+1,y) + u(x-1,y) - 2u(x,y) + u(x,y+1) + u(x,y-1) - 2u(x,y) \quad \leftarrow \text{discretización}$$

$$= u(x+1,y) + u(x-1,y) + u(x,y+1) + u(x,y-1) - 4u(x,y)$$

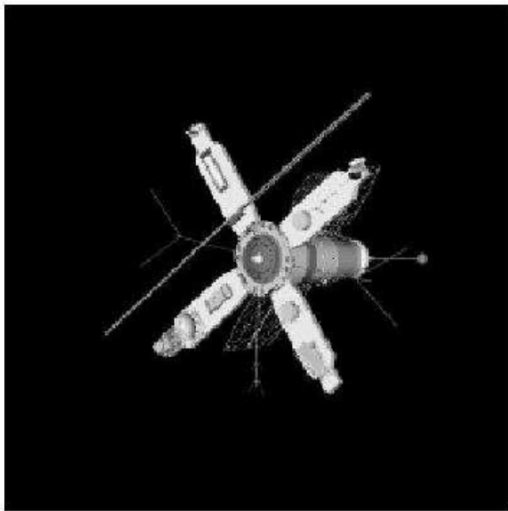
$$P(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{operador } \nabla^2 \text{ en } (x,y)$$

("padding" con ceros antes de hacer la transformada de Fourier)

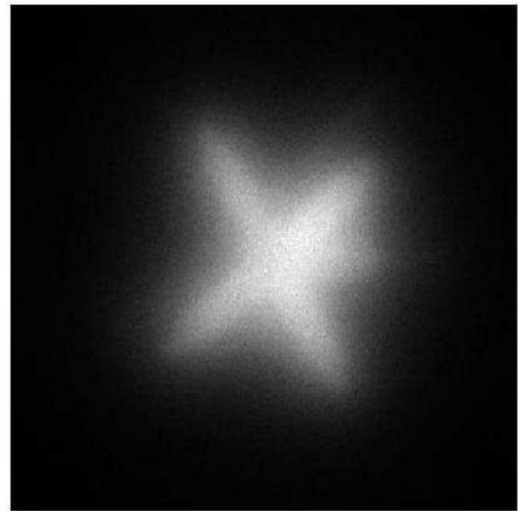
El parámetro  $\alpha$  se puede ajustar manualmente para obtener mejores resultados. También se pueden hacer aproximaciones automáticas iterativas pero no nos vamos a detener en eso ahora.

Obs:  $\alpha=0$  recupera el filtrado inverso.

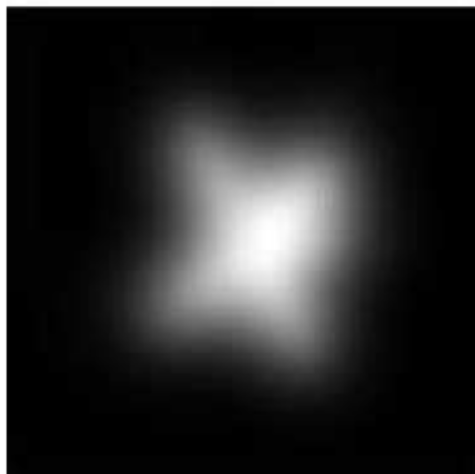
Original Image



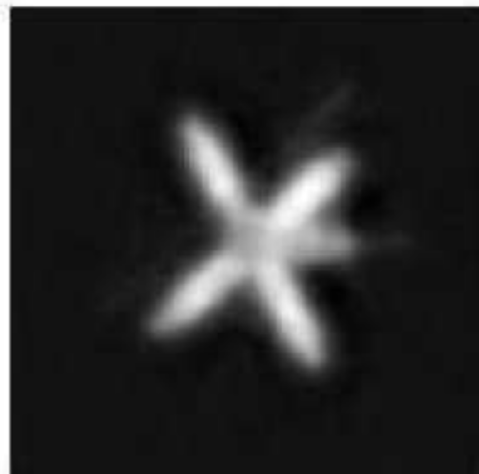
Blurred Noisy Image



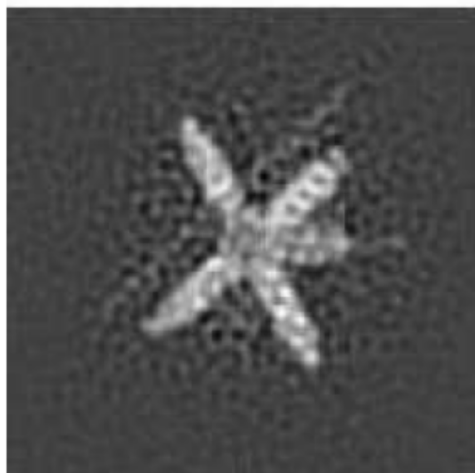
$\alpha=0.5$



$\alpha=0.05$



$\alpha=0.005$



$\alpha=0.0005$

