<u>Líneas de Influencia</u>

1. Introducción

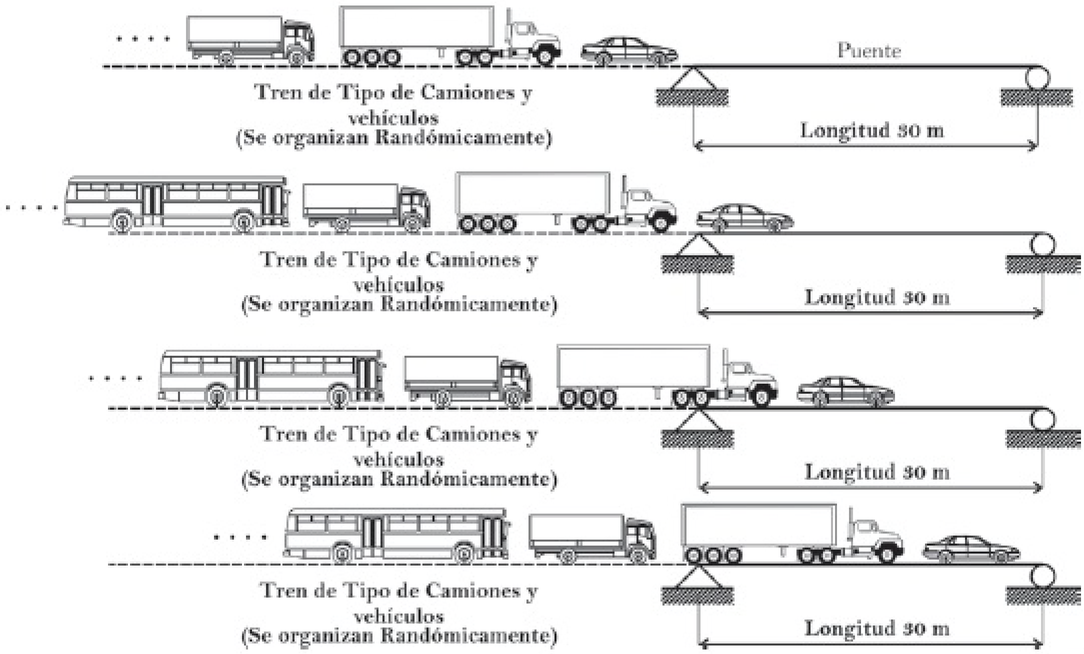
Hasta el momento se han estudiado estructuras cuyas cargas actuantes tienen puntos de aplicación fijos, o dicho de otro modo son cargas estacionarias. Sin embargo, el ingeniero en su práctica profesional rara vez va a tratar con estructuras que tienen aplicadas únicamente cargas cuyos puntos de aplicación son fijos. El ejemplo más evidente es sin duda el de los puentes carreteros. No obstante, hay otros ejemplos como son los edificios industriales, edificios de vivienda y oficinas o las estructuras sobre la que se apoya un puente grúa.

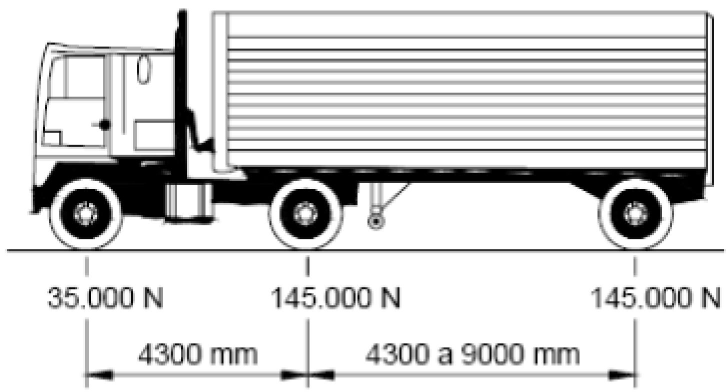
En estos casos los esfuerzos y deformaciones en cada sección de la estructura dependen de la posición que ocupa la carga, y en particular el valor máximo de cada uno de ellos se produce en una cierta posición, en principio desconocida. El ingeniero deberá colocar las cargas (en general las cargas denominadas como "cargas vivas") en las posiciones en las que producirán los máximos esfuerzos y desplazamientos de cada elemento de la estructura que se estudie. Para ello se utilizan las *Líneas de Influencia*.

2. Definición de carga móvil, líneas de influencia y envolvente

El concepto de *carga móvil* refiere a una carga la cual solo su posición en la estructura es arbitraria. En otras palabras, su módulo y sentido de aplicación se mantienen constantes.

Se denomina *tren de cargas* a un conjunto de cargas móviles que mantienen su posición relativa al recorrer las estructuras. Frecuentemente, los trenes de cargas representan la acción de los vehículos, como se puede observar en la siguientes figuras.

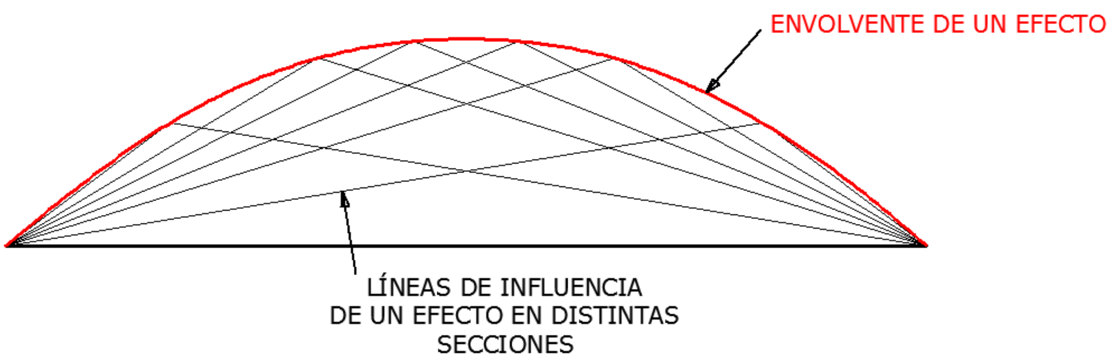




Se define la *línea de influencia* de un esfuerzo o de una deformación en una sección como la función que proporciona la variación de dicho esfuerzo o deformación en esa sección fija de la estructura, para las distintas posiciones de una carga puntual de valor unitario que se desplaza, paralela a sí misma, a lo largo de la estructura.

Por lo tanto hay una línea de influencia para cada esfuerzo o deformación de cada sección de la estructura. Todas las líneas de influencia se expresan en función de algún parámetro o coordenada que define la posición de la carga móvil en su trayectoria.

Si se conoce para cada sección de una viga la línea de influencia de un determinado efecto, se puede dibujar la curva *envolvente* de las líneas de influencia y de ella se determina la posición de la sección donde debe actuar la carga unitaria para producir el valor máximo maximorum del efecto.



De esa forma, y como se mencionó anteriormente, las líneas de influencia pueden usarse para dos importantes fines:

- Determinar la posición de la carga que producirá un valor máximo del efecto para la que se construye.
- Calcular el valor de ese efecto con las cargas así colocadas, o bien, para cualquier condición de cargas.

3. Hipótesis

Las hipótesis que simplifican el estudio de las líneas de influencia son:

- Estructura con material elástico y lineal, lo cual permite aplicar el principio de superposición.
- Se trabaja con una sola fuerza móvil de módulo unidad. Este supuesto se introduce para facilitar el estudio inicial, pero se pueden estudiar otros tipos de cargas.
- La carga móvil mantiene siempre la misma dirección y sentido de aplicación, es decir que se traslada paralelamente a sí misma y no gira.

Estos supuestos permiten calcular una solicitación, reacción o deformación en una sección de una estructura debidos a cualquier conjunto de cargas aplicadas en cualquier tramo de la viga a partir de la línea de influencia de ese esfuerzo o deformación en la sección.

4. Propiedades de las líneas de influencia

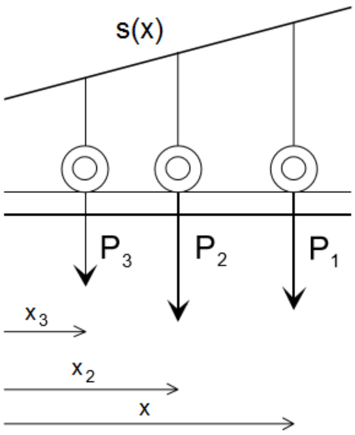
Cargas móviles puntuales

Si por ejemplo LI(E(x)) es la función de la línea de influencia de un efecto en una sección, el valor del efecto (que denominaremos E) en esa sección, al aplicar una carga P en $x=x_1$, se calcula como $E = P \cdot LI(E(x_1))$.

Si se tiene un conjunto de n cargas puntuales P_i con i=1, 2, …n aplicadas en abscisas x_i, entonces el efecto será:

$$E = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot LI(E(x_i))$$

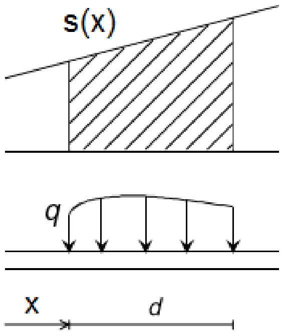
Consideremos ahora un tren de cargas móviles puntuales situadas a unas distancias d_i a la primera de ellas (con $d_1=0$), como se indica en la figura. Para situar el tren de cargas en la viga se emplea la coordenada de posición de la primera carga x, por lo que las restantes cargas están situadas en unas posiciones $x_i = x - d_i$.



El valor del esfuerzo S en una posición cualquiera del tren de cargas es:

$$E = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot E(LI((x_i)) = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot LI(E(x - d_i))$$

Esta última deducción implica que la expresión analítica de la línea de influencia correspondiente al tren de cargas se obtiene sumando, para cada carga, la línea de influencia básica, trasladada en la separación de dicha carga respecto de la primera y multiplicada por el valor de la carga P_i.



Carga móvil distribuida

Del mismo modo, para una carga distribuida q(x) aplicada en $x_1<x<x_2$, el efecto E en la sección valdrá

$$E = \int_{x_1}^{x_2} q(x) \cdot LI(E(x))dx$$

Si la carga q es uniformemente distribuida se tendrá entonces:

$$E = q \int_{x_1}^{x_2} LI(E(x))dx$$

siendo el valor de la integral, el área bajo la curva de la línea de influencia entre las abscisas x_1 y x_2. Claramente se ve que para estas situaciones, para maximizar E es necesario maximizar el área bajo la curva de influencia.

Análisis

De esto, se puede deducir:

1. Para obtener el valor máximo de un efecto, debido a una carga aislada, se colocará la carga en el punto en que la ordenada de la línea de influencia de dicho efecto es máxima.
2. Para obtener el valor máximo de un efecto producido por una carga uniformemente distribuida, se colocará la carga en todas las zonas de la estructura para las cuales las ordenadas de las líneas de influencia tienen el signo del efecto deseado.

5. Métodos de cálculo para líneas de influencia

Una manera de construir la línea de influencia de un efecto debido a una carga móvil, será calcular dicho efecto para varias posiciones de la carga. Se contará así con una cierta cantidad de ordenadas de la línea de influencia, lo cual permite su trazado por puntos. Este procedimiento se denomina *método directo*. Naturalmente, el empleo del método directo implica resolver la estructura repetidas veces. Esta circunstancia desalentó en el pasado el uso de este procedimiento. Actualmente, la intensiva aplicación de la computación en la resolución de estructuras ha revertido dicha tendencia.

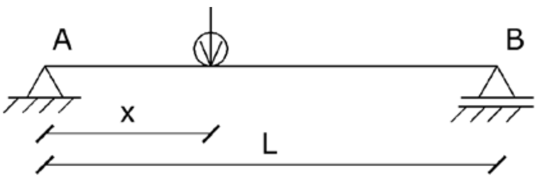
Otro método de cálculo es el *método indirecto* que implica la utilización del Principio de Trabajos Virtuales y el de reciprocidad de Betti. En efecto, consistirá en transformar el cálculo de un efecto en una sección fija debido a una causa móvil, en el cálculo de otro efecto en una posición variable, debido a una causa fija. Esto lo trabajaremos más adelante.

6. Líneas de influencia en estructuras isostáticas

En principio utilizaremos el método directo para la resolución de las líneas de influencia en estructuras isostáticas. Consistirá en hallar la expresión de las funciones que representan los efectos en estudio cuando la carga es variable en posición, o simplemente determinar valores destacados y unirlos en forma correspondiente.

Viga simplemente apoyada

Supongamos una viga simplemente apoyada de longitud L. Sobre ella se desplaza una carga concentrada unitaria. El círculo denota que la carga es móvil.



Reacciones

La reacción vertical en el apoyo para la carga unitaria ubicada una distancia x es,

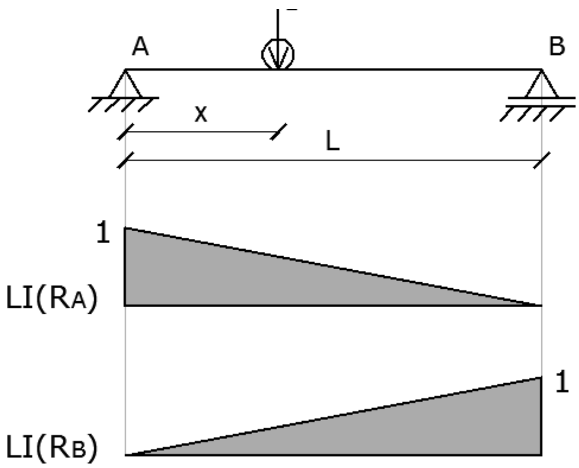
$$R_A = \frac{L - x}{L}$$

Observar que para cada posición x de la carga unitaria puede calcularse un valor de la reacción R_A. Esta función es llamada la línea de influencia para R_A y la denotaremos como $LI(R_A)$.

Observar que cuando la carga está sobre el apoyo A, la reacción es igual a 1; cuando la carga está sobre el apoyo B, la reacción es igual a cero.

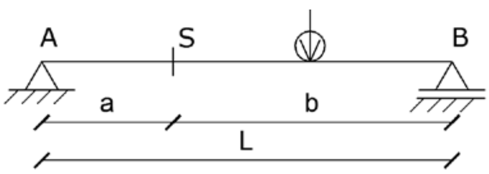
De manera análoga, la línea de influencia para la reacción R_B es

$$R_B = \frac{x}{L}$$



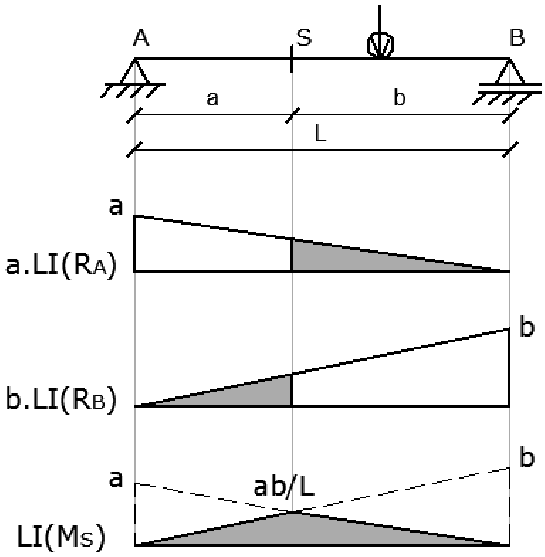
Solicitaciones

Queremos obtener las líneas de influencia para el momento flector y para el esfuerzo cortante en la sección S cuando la carga concentrada unitaria se mueve sobre la viga.

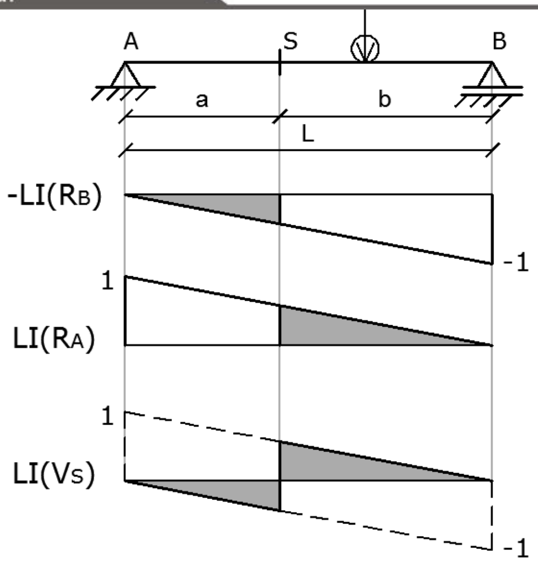


Obtengamos primero la línea de influencia para el momento flector en la sección S. El momento flector en dicha sección es igual a la suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas localizadas a la izquierda (o a la derecha) de la misma. Por lo tanto, la expresión del momento flector depende de la ubicación de la carga unitaria con respecto de la sección S.

Si la carga unitaria está localizada a la derecha de la sección, la expresión para el momento flector es $M_S = R_A \cdot a$. Como la carga unitaria cambia de posición (a la derecha de S) la ecuación de la línea de influencia para el momento flector en la sección S es $LI(M_S) = a \cdot LI(R_A)$. Un razonamiento análogo puede hacerse cuando la carga está localizada a la izquierda de la sección S. La ecuación de la línea de influencia para el momento flector en la sección S es entonces $LI(M_S) = b \cdot LI(R_B)$.

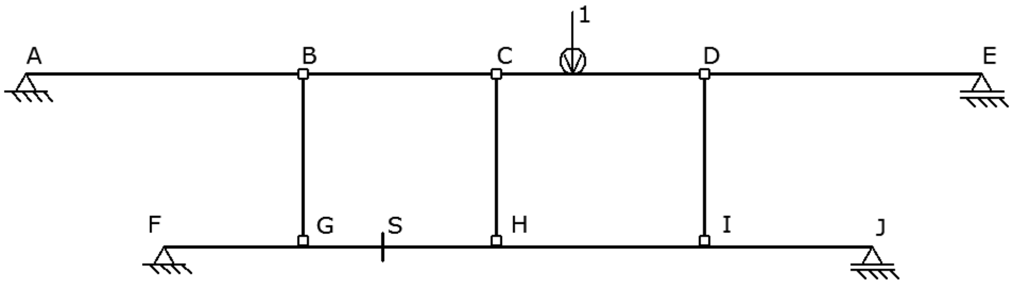


Obtengamos ahora la línea de influencia para el cortante en la sección S. El cortante de dicha sección depende de la posición relativa de la carga respecto a la sección. Cuando la carga está localizada a la izquierda de la sección, el cortante en S es igual al negativo del valor de la reacción R_B. Cuando la carga está localizada a la derecha de la sección S el cortante en S coincide con el valor de la reacción R_A. Por lo tanto, la expresión de la línea de influencia para el cortante en S es $LI(V_S) = -LI(R_B)$, si la carga está localizada a la izquierda de la sección S y es, $LI(V_S) = LI(R_A)$ si la carga está localizada a la derecha de la sección S.



Como se puede observar en las figuras anteriores, al ser la línea de influencia una función que indica el valor de un efecto, sólo importa indicar el signo de dicho efecto según la convención de signos utilizada usualmente. Por ejemplo, el momento flector es positivo si tracciona las fibras inferiores de una sección, pero no es necesario dibujar los valores de la línea de influencia del momento flector positivos del lado inferior del diagrama.

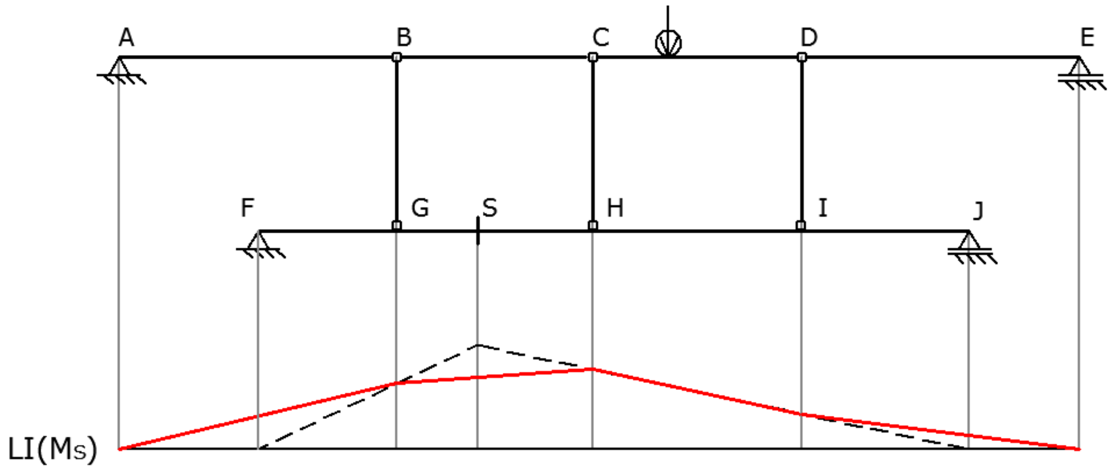
Estructuras con carga indirecta



Cuando la carga unitaria recorre las vigas AE de la estructura, la carga se transmite de forma indirecta a la viga FJ. Decimos entonces que la viga FJ es una estructura con carga indirecta. Supongamos que queremos hallar la línea de influencia para el momento flector en la sección S de la viga FJ al recorrer la carga móvil el tramo AE.

Si la carga móvil se trasladara por el tramo FJ en lugar de trasladarse por el tramo AE, la línea de influencia para el momento flector en la sección S sería la indicada con trazo discontinuo (semejante a la que hallamos anteriormente para la viga simplemente apoyada).

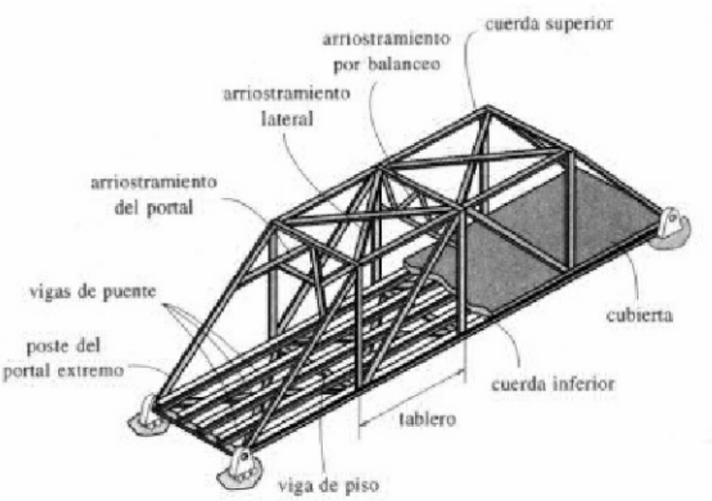
Si la carga unitaria se traslada por el tramo AE, el valor del momento flector en la sección S cuando la carga se ubica sobre los puntos B, C y D es el mismo que cuando la carga se ubica sobre los puntos G, H e I respectivamente, dado que las barras superiores no se ven afectadas. Si la carga se aplica en A o E, es lógico que el valor del momento flector en S sea nulo. Finalmente, cuando la carga se mueve internamente en los tramos AB, BC, CD y DE, las descargas en los nodos B, C y D varían en forma lineal y serían menores a 1, lo que puede comprobarse planteando equilibrio. Luego la línea de influencia para el momento flector en la sección S al recorrer la carga unitaria el tramo AE se halla graficada en trazo continuo.



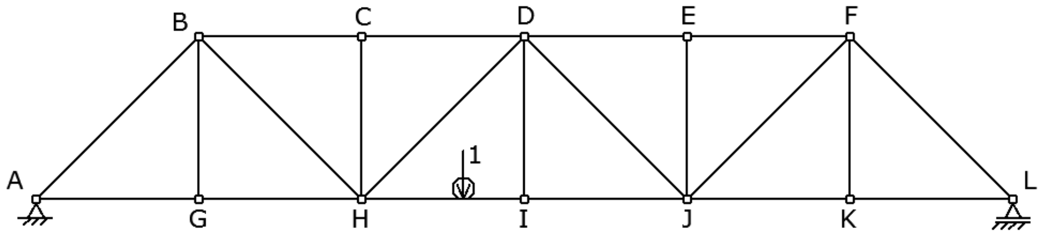
Si se busca la línea de influencia de alguna reacción, solicitación o desplazamiento de una estructura con carga aplicada de forma indirecta, una forma posible de hallarla es plantear la línea de influencia de la misma solicitación, reacción o desplazamiento con la carga aplicada de forma directa y luego unir linealmente los valores de dicha función correspondientes a las coordenadas en donde se transmite la carga.

Reticulados

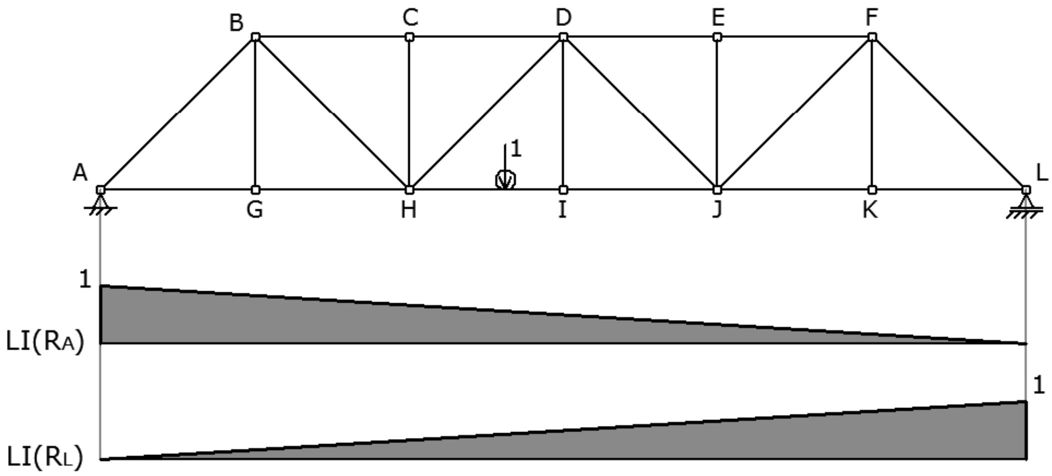
Existe una enorme cantidad de puentes construidos con celosías de diverso tipo, cuya caracterización dependerá de la longitud a salvar del curso de agua, las cargas que transitarán por el mismo, la distancia necesaria entre el curso de agua y el tablero (franquía), la estética arquitectónica del puente, entre otros.



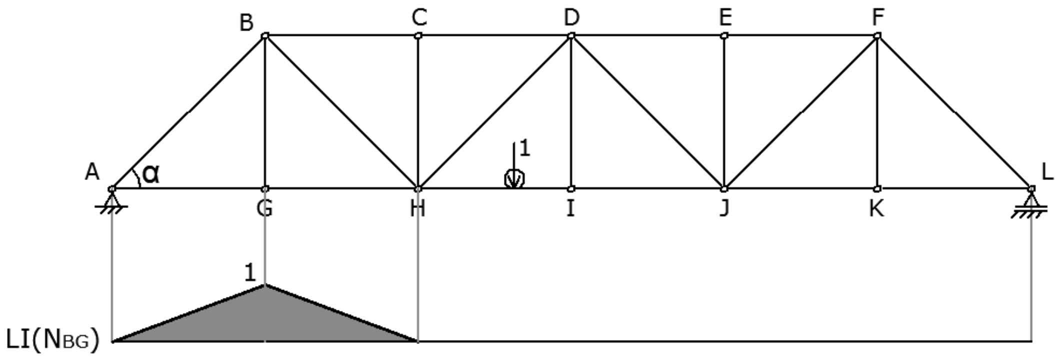
Cuando se quiere obtener la línea de influencia para la fuerza directa en alguna barra de un reticulado, es posible hallarla sin necesidad de resolverlo todo. Esto puede lograse planteando equilibrio de nudos o mediante cortes de la estructura por secciones canónicas y aplicando equilibrio.



Se considera el reticulado de la figura. La carga concentrada unitaria móvil puede desplazarse por el tramo AL. Al igual que para el caso de las vigas simplemente apoyadas pueden obtenerse las líneas de influencia para las reacciones en los apoyos A y L.



Nos concentraremos ahora en el cálculo de la línea de influencia de la directa de la barra BG (N_{BG}). Cuando la carga unitaria está localizada en el punto G, la fuerza directa en la barra BG puede obtenerse por equilibrio en el nodo G. Planteando equilibrio obtenemos $N_{BG} = 1$. Observar que a medida que la carga se desplaza desde G hasta H, la fuerza directa en la barra BG disminuye su magnitud hasta volverse nula. Lo mismo ocurre cuando la carga se desplaza desde G hasta A. Podemos por lo tanto obtener la línea de influencia correspondiente.



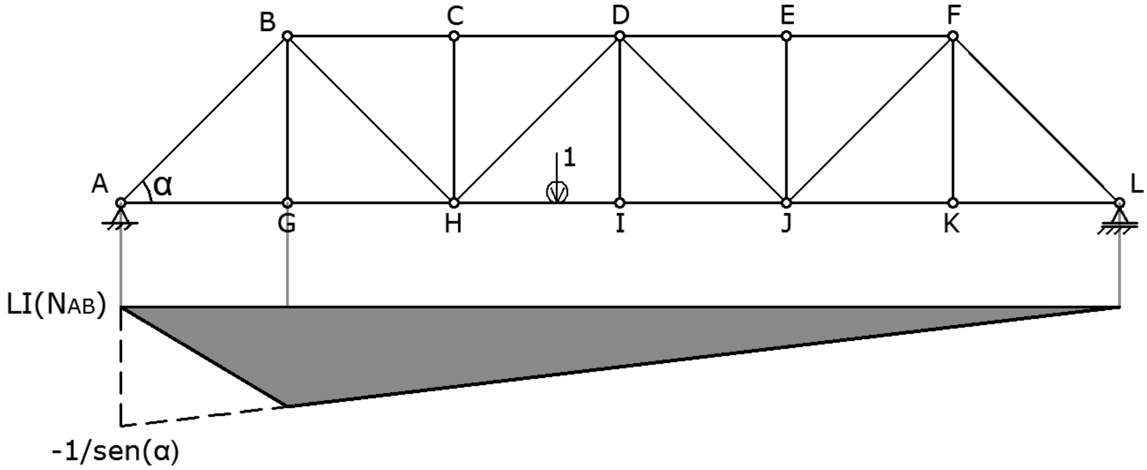
Obtengamos la línea de influencia para la fuerza directa en la barra AB (N_{AB}). Aplicando equilibrio en el nodo A, podemos hallar el valor de la fuerza directa N_{AB} en función de la reacción en A,

$$N_{AB} = -\frac{R_A}{sen\ (\alpha)}$$

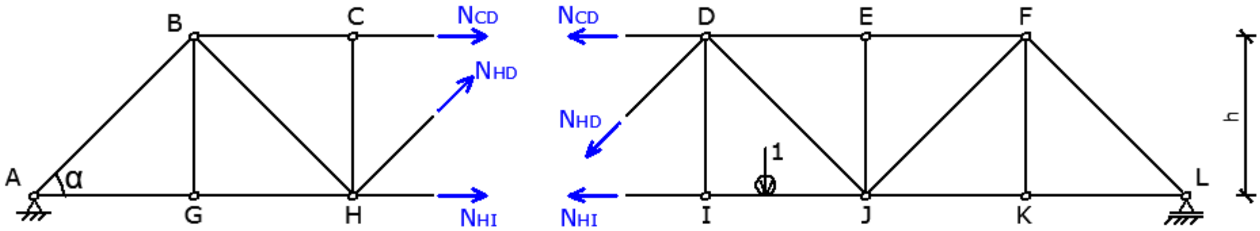
y por lo tanto la línea de influencia de la fuerza directa (N_{AB}) puede obtenerse como una función de la línea de influencia de la reacción:

$$LI(N_{AB}) = -\frac{LI(R_A)}{sen\ (\alpha)}$$

Se debe tener en cuenta que cuando la carga está aplicada en el apoyo A, la reacción en dicho apoyo es 1 y por lo tanto, la barra AB no se encuentra solicitada. Esto implica que necesariamente debe haber un cambio en el andamiaje de $LI(N_{AB})$ con respecto al de $LI(R_A)$. Esto último se debe a que cuando la carga recorre el tramo AG, la barra flexa y tiene asociado un cortante. En los nodos A y G aparecerán entonces las colaboraciones relacionadas a dicho cortante, que hacen reducir el valor de N_{AB}.



Si queremos hallar la línea de influencia para la fuerza directa en la barra CD (N_{CD}) no necesitamos resolver el reticulado completo, basta con elegir convenientemente una sección canónica de corte del reticulado y plantear equilibrio de las fuerzas y momentos a la derecha y a la izquierda de dicha sección.



Análogo a los casos ya vistos, la expresión para la fuerza directa en la barra CD depende de la localización de la carga unitaria con respecto del punto H. Si la carga está localizada a la derecha del punto H, la fuerza directa N_{CD}, queda expresada en función de la reacción en el apoyo A. Planteando equilibrio de momentos respecto al punto H de las fuerzas a la izquierda de H,

$$N_{CD} = -\frac{L_{AH}}{h} \cdot R_A$$

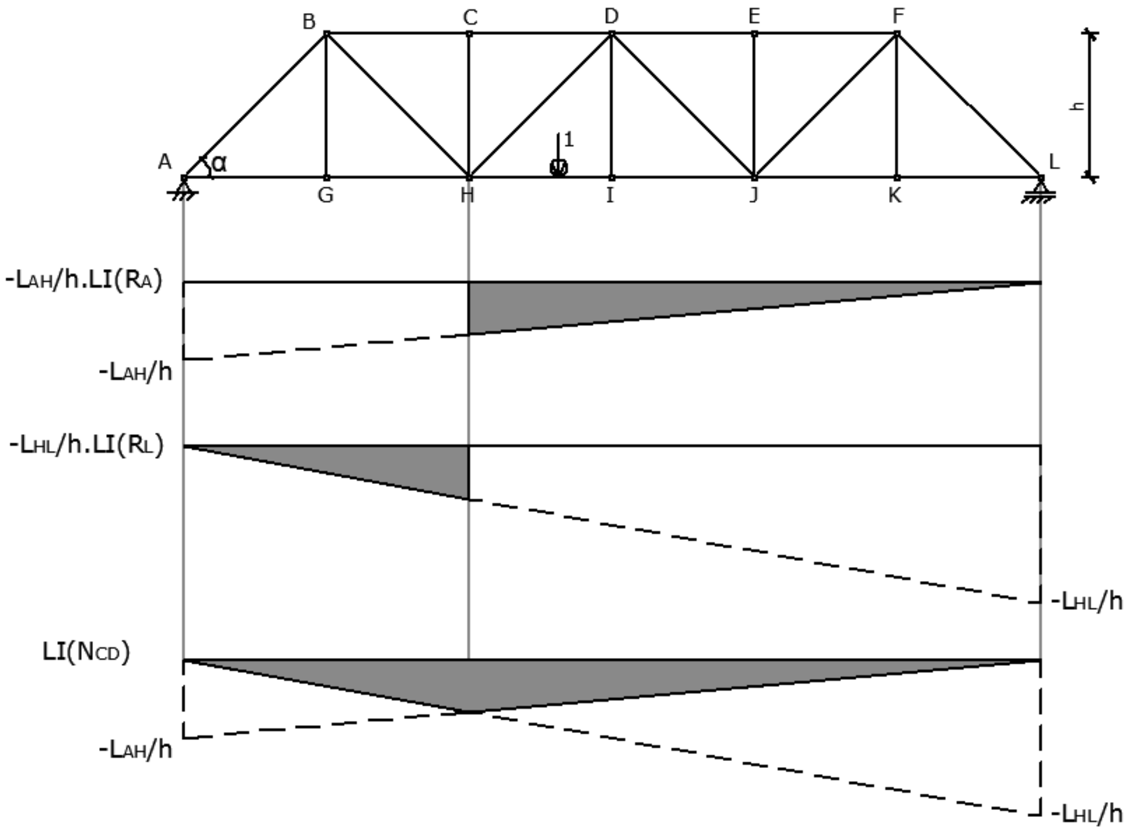
siendo L_{AH} la distancia desde el punto A hasta el punto H. Luego la línea de influencia para N_{CD} cuando la carga está a la derecha del punto H queda expresada como

$$LI(N_{CD}) = -\frac{L_{AH}}{h} \cdot LI(R_A)$$

Cuando la carga unitaria está localizada a la izquierda del punto H la expresión para la línea de influencia de la directa en la barra CD es,

$$LI(N_{CD}) = -\frac{L_{HL}}{h} \cdot LI(R_L)$$

siendo L_{HL} la distancia desde el punto H hasta el punto L.



Análogamente podemos construir las líneas de influencia para todas las barras del reticulado.

7. Métodos Indirectos - Principio de Müller-Breslau

<u>Estructuras isostáticas</u>

El Principio de los Trabajos Virtuales brinda un método simplificado para la determinación de líneas de influencia.

Si en una estructura isostática se elimina la restricción al efecto cuya línea de influencia se desea hallar, la estructura se convierte en un mecanismo, con lo cual puede tener movimientos de sólido rígido, que se producen sin acumulación de energía elástica. De acuerdo con el Principio de los Trabajos Virtuales se cumple que el trabajo virtual de todas las fuerzas que actúan sobre la estructura es nulo, al no acumularse energía elástica:

$$\delta W = \delta U = 0$$

Sobre la estructura, transformada en mecanismo, actúan la fuerza unitaria móvil, el esfuerzo cuya línea de influencia se desea hallar, llamado genéricamente E, y las reacciones en los apoyos cuyas restricciones no se han quitado, que no producen trabajo virtual.

Si se aplica sobre la estructura un desplazamiento virtual en la dirección del esfuerzo E cuya línea de influencia se busca, la estructura adopta una configuración deformada como sólido rígido. En esta configuración deformada se denomina δ_E al desplazamiento virtual en la dirección y sentido del esfuerzo buscado y δ_I al desplazamiento en los puntos de aplicación de la fuerza unitaria móvil. El trabajo virtual producido por ambas fuerzas es:

$$\delta W = \delta_E \cdot E - \delta_I \cdot 1 = 0$$

de donde se calcula el valor del efecto:

$$E = \frac{\delta_I}{\delta_E}$$

Si se elige el desplazamiento virtual de tal manera que valga la unidad ($\delta_E = 1$) se obtiene:

$$E = \delta_I$$

Esta expresión indica que la línea de influencia de un esfuerzo cualquiera en una estructura isostática es igual a la deformada que adopta la estructura, cuando se quita la restricción asociada al efecto estudiado y se aplica un desplazamiento virtual relativo unitario en la dirección y sentido del esfuerzo.

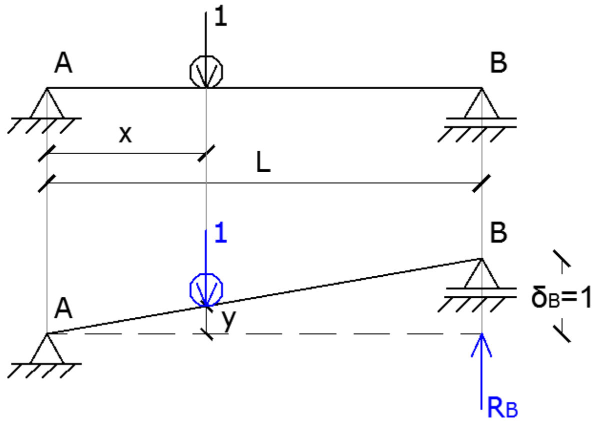
Esta deducción es general, sea cual sea el tipo de esfuerzo. Para reacciones, el desplazamiento virtual unitario se impone en la dirección y sentido supuestos para la reacción. Para esfuerzos internos, se debe imponer un desplazamiento virtual unitario relativo entre las dos caras donde actúa el esfuerzo interno.

Aunque aquí se ha presentado como una mera utilización del Principio de los Trabajos Virtuales, este método fue presentado por Müller-Breslau en 1887, conjuntamente con su método para el cálculo de líneas de influencia en estructuras hiperestáticas, que se explica más adelante. A este resultado se le llamó principio de Müller-Breslau.

El principio de Müller-Breslau proporciona un método útil para determinar la forma y valores de las líneas de influencia y es el fundamento de ciertos métodos indirectos de estudios de modelos.

Ejemplo - Viga Simplemente Apoyada

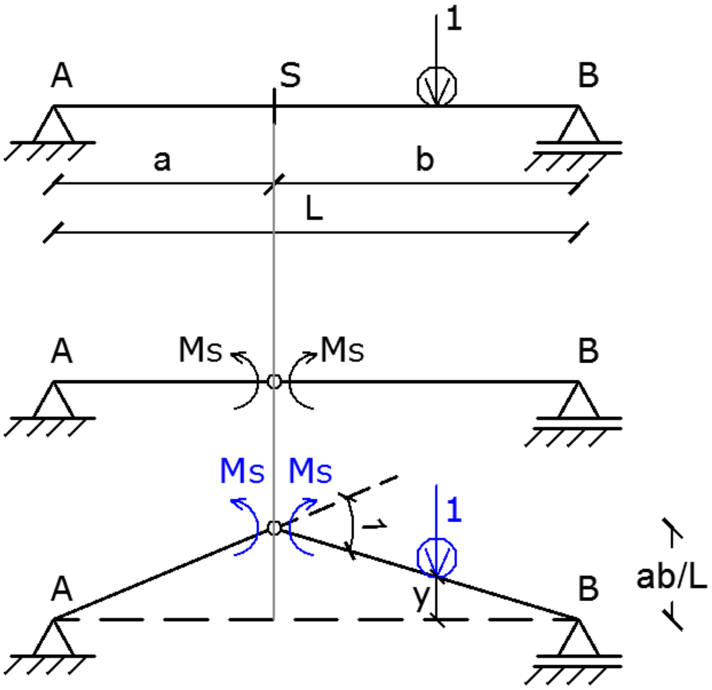
En la viga simplemente apoyada queremos hallar la línea de influencia de la reacción en B, aplicando el principio de Müller–Breslau. Para ello, debemos liberar el vínculo y dejar que la reacción, que es la función de la que queremos obtener la línea de influencia, actúe a través de un desplazamiento unitario.



$$R_B \cdot \delta_B - 1 \cdot y = 0 \;\rightarrow\; R_B = \frac{y}{\delta_B} \xrightarrow[\delta_B=1]{} R_B = y$$

Puesto que y es, por una parte, la ordenada de la viga desplazada en el punto donde está aplicada la carga unitaria y es, por otra parte, el valor del efecto R_B debido a la carga unitaria móvil (esto es la ordenada de la línea de influencia en ese punto), se concluye que la forma que adopta la viga AB desplazada es la línea de influencia para R_B si $\delta_B = 1$.

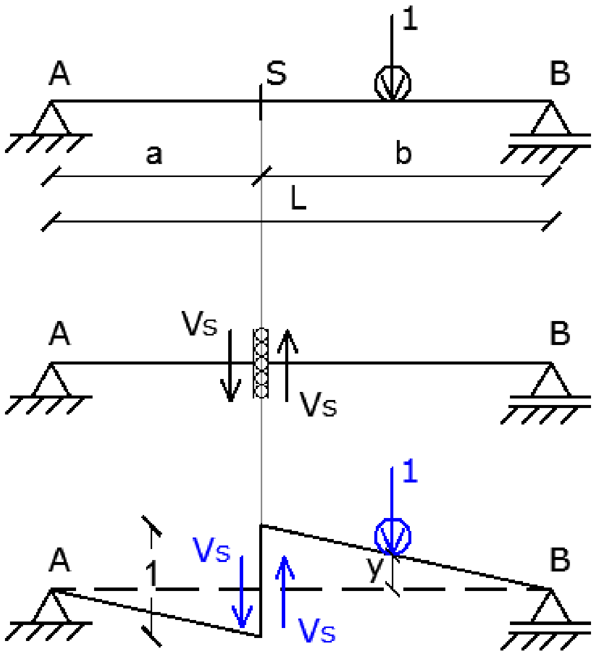
Supongamos ahora que queremos obtener la línea de influencia para el momento flector en la sección S de la viga simplemente apoyada. Para aplicar el principio de Müller–Breslau debemos liberar el vínculo, que es en este caso la continuidad en el giro, mediante la colocación de una articulación en la sección S y permitir que actúe un par de momentos iguales en módulo y opuestos en sentido que produzcan una rotación relativa unitaria de los dos lados de la sección considerada.



$$M_S \cdot \left(\theta_S^{izq} + \theta_S^{der}\right) - 1 \cdot y = 0 \;\rightarrow\; M_S = \frac{y}{\theta_S^{izq} + \theta_S^{der}} \;\xrightarrow[\theta_S^{izq}+\theta_S^{der}=1]{}\; M_S = y$$

Observar que la elástica de la estructura representa la línea de influencia para el momento flector en la sección S.

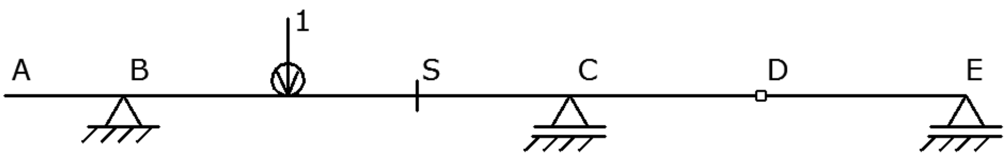
Un razonamiento análogo puede realizarse para la fuerza cortante en la sección S. Basta con liberar el vínculo y permitir que la estructura actué a través de un desplazamiento unitario, manteniendo la continuidad en el giro (observar que se conservan las pendientes a ambos lados de S).



$$V_S \cdot \left(\delta_S^{izq} + \delta_S^{der}\right) - 1 \cdot y = 0 \;\rightarrow\; V_S = \frac{y}{\delta_S^{izq} + \delta_S^{der}} \xrightarrow[\delta_S^{izq}+\delta_S^{der}=1]{} V_S = y$$

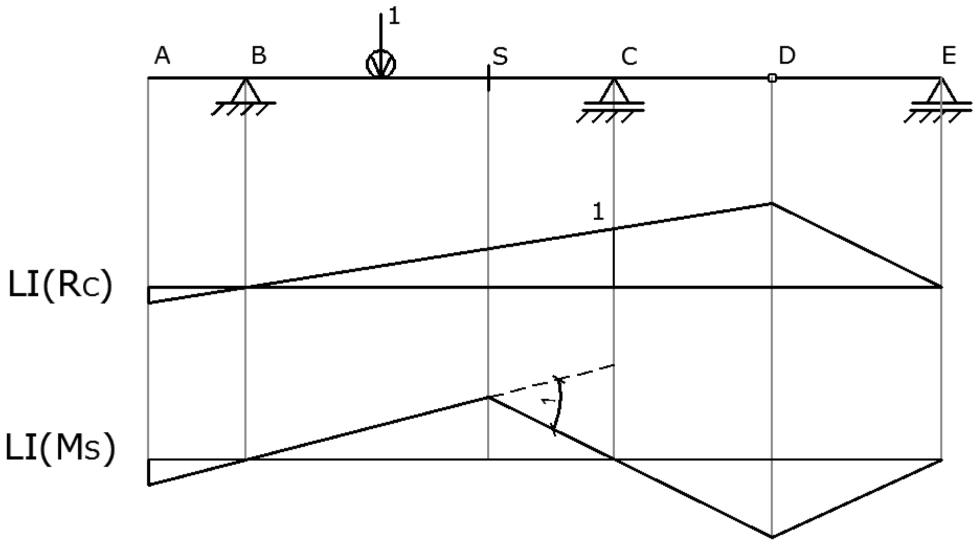
Ejemplo - Viga Gerber

En el caso de una viga Gerber como la indicada en la figura, si se quiere la línea de influencia de la reacción en C y del momento flector en S, se puede aplicar el principio de Müller-Breslau.



En el primer caso, se procede a quitar el apoyo en C y aplicar un desplazamiento vertical unitario. Luego, considerando ese desplazamiento unitario en C, se determina la configuración deformada teniendo en cuenta los tipos de vínculos no removidos que existen en la viga. Por ejemplo, se sabe que en B y en E no puede haber desplazamiento vertical, y que en D hay una articulación por lo que pueden existir giros diferentes a ambos lados. Una vez definida dicha deformada, se procede a determinar los valores límites.

Para la línea de influencia del momento flector en S, se procede de forma análoga a la línea de influencia de la reacción en B. Se quita la restricción al giro en dicha sección y se impone un giro relativo unitario.

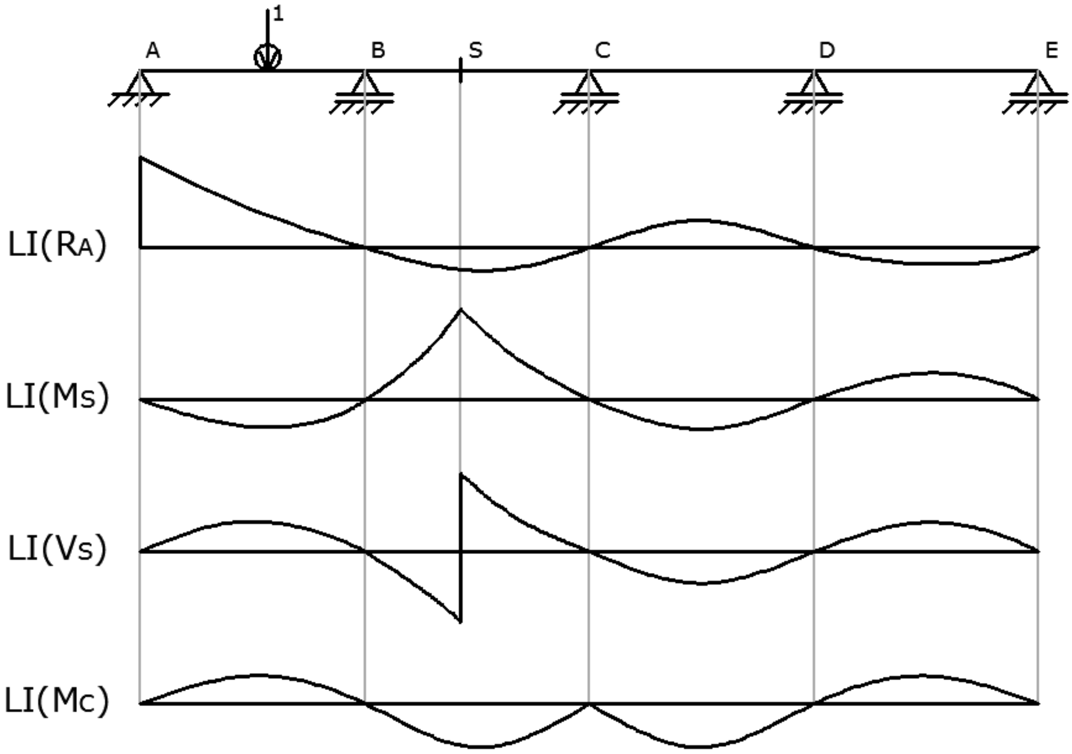


Estructuras hiperestáticas

El método de Müller–Breslau se puede generalizar a estructuras hiperestáticas y no solo permite obtener los valores numéricos para las líneas de influencia de las funciones deseadas, sino que permite esbozar fácilmente las líneas de influencia sin necesidad de calcular dichos valores numéricos.

La línea de influencia obtenida esbozando la forma deformada de la estructura se denomina línea de influencia cualitativa. Su aplicación es de gran importancia en estructuras hiperestáticas, en donde, en algunas ocasiones simplemente se necesitan conocer las posiciones en las que deben colocarse las cargas vivas para maximizar los valores de las funciones en estudio.

La figura muestra las líneas de influencia cualitativas para la reacción vertical en el apoyo A, para el momento flector en la sección S del vano BC, para la fuerza cortante en la misma sección y para el momento flector sobre el apoyo C.



Para esbozar la línea de influencia de la reacción vertical en A, se libera el vínculo y se aplica un desplazamiento unitario en dicha sección. La estructura tomará la forma mostrada. Lo mismo debemos hacer para obtener las líneas de influencia de las restantes funciones. Observar además que las líneas de influencia en estructuras hiperestáticas no son lineales, dado que al quitar la restricción asociada al efecto estudiado, la estructura no pasa a ser un mecanismo y se puede deformar internamente, en lugar de moverse como un sólido rígido como hemos visto anteriormente.

Para obtener el valor máximo del efecto debido a una carga aislada P, se aplica la carga aislada en el punto en que la ordenada de la línea de influencia del efecto es máxima. Luego el valor máximo de dicho efecto debido a esa carga P, es igual al producto de la magnitud de la carga por la ordenada de la línea de influencia del efecto, en el punto encontrado anteriormente.

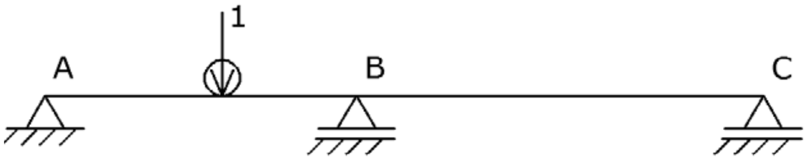
Si se desea saber las posiciones en las que debe colocarse una carga uniforme para obtener la máxima reacción vertical positiva (hacia arriba) en el apoyo A, se observa que es cubriendo los tramos AB y CD, ya que las ordenadas de la línea de influencia son positivas. Para obtener el máximo momento positivo en la sección S la carga uniforme debe colocarse en los vanos BC y DE. Para los otros dos casos se razona de manera análoga.

8. Líneas de influencia en estructuras hiperestáticas

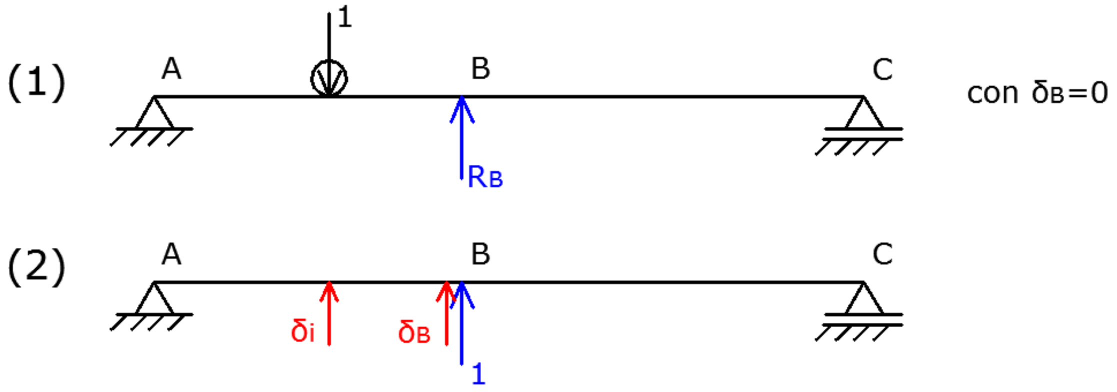
El método directo puede ser usado también en estructuras hiperestáticas. Usando los métodos vistos en cursos anteriores, es posible la determinación de la expresión de las solicitaciones en función de la posición genérica de la carga. Sin embargo, nos concentraremos en la utilización de los métodos indirectos para la resolución de este tipo de estructuras.

Vigas Continuas

Supongamos la viga continua de dos tramos. La estructura tiene un grado de hiperestaticidad externa.



La reacción vertical en el apoyo B para una carga unitaria aplicada en los distintos puntos de la viga, puede obtenerse a partir del teorema de reciprocidad de Betti. Para ello consideraremos dos estados. Un estado original (1) que se quiere resolver, y uno auxiliar (2) con carga unitaria en el punto donde se quiere evaluar la línea de influencia del efecto (en el sentido y dirección del efecto a analizar). A su vez, se indican los desplazamientos verticales de cada nudo por el que pasa la carga como δ_i, y como δ_B el desplazamiento vertical del punto B.



Al aplicar el teorema de Betti se tiene:

$$\sum F_j^{(1)} \cdot \delta_j^{(2)} = \sum F_j^{(2)} \cdot \delta_j^{(1)}$$

$$-1^{(1)} \cdot \delta_i{}^{(2)} + R_B{}^{(1)} \cdot \delta_B{}^{(2)} = 1^{(2)} \cdot \delta_B{}^{(1)}$$

Se sabe que en la estructura original (1) el descenso del punto B debe ser nulo, $\delta_B{}^{(1)} = 0$.

Por lo tanto:

$$-1^{(1)} \cdot \delta_i{}^{(2)} + R_B{}^{(1)} \cdot \delta_B{}^{(2)} = 0$$

Luego:

$$R_B{}^{(1)} = \frac{1^{(1)} \cdot \delta_i{}^{(2)}}{\delta_B{}^{(2)}} = \frac{\delta_i{}^{(2)}}{\delta_B{}^{(2)}}$$

Se observa entonces que para ver la variación de la incógnita R_B en la estructura (1) cuando la carga se desplaza, alcanza con resolver la estructura (2) con carga fija de valor 1 en B. Es decir, se transformó el cálculo del efecto en una sección fija debido a una carga móvil, en el cálculo de otro efecto en distintas secciones, debido a una carga fija.

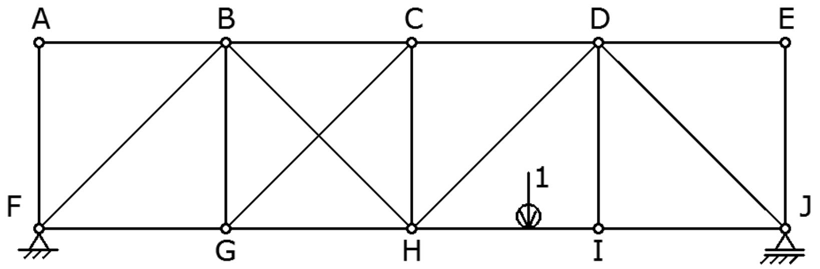
Una vez obtenida la línea de influencia de la incógnita hiperestática es posible hallar la línea de influencia de cualquier función (reacción, cortante, momento flector, etc.).

Reticulados

Para estudiar las líneas de influencia en reticulados hiperestáticos distingamos en primera instancia los que presentan hiperestaticidad interna de aquellos que presentan hiperestaticidad externa.

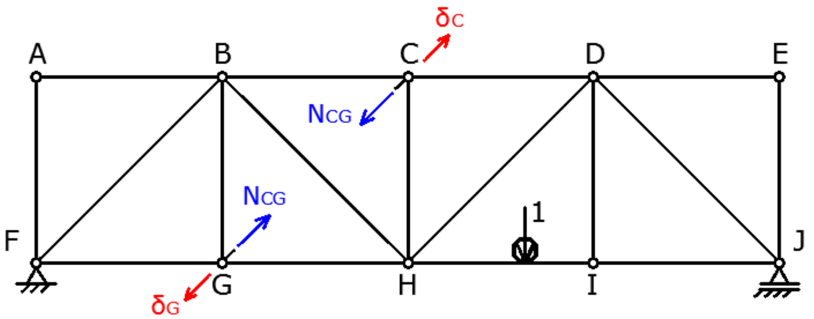
Cuando los reticulados presentan únicamente hiperestaticidad externa, su tratamiento es análogo al de una viga continua y por lo tanto se pueden aplicar para su resolución los métodos expuestos anteriormente. Una vez hallada la línea de influencia de la incógnita hiperestática es posible hallar la línea de influencia de cualquier reacción o de cualquier directa en sus barras.

Supongamos ahora un reticulado que presenta hiperestaticidad interna.



Tomemos como incógnita hiperestática la directa en la barra CG, la cual asumiremos que está traccionada. Queremos entonces hallar la línea de influencia de la directa en dicha barra.

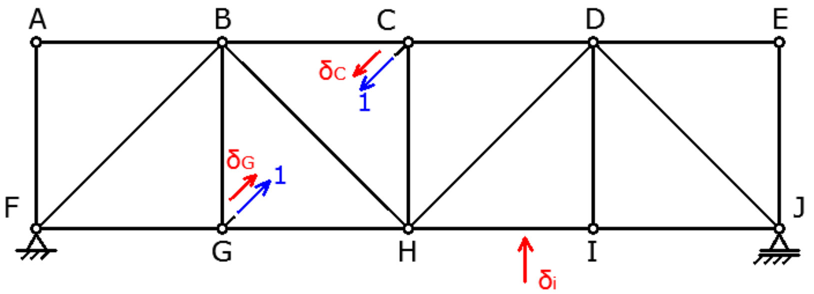
(1)



con

$$\delta_C + \delta_G = \frac{N_{CG}.L_{CG}}{E_{CG}.A_{CG}}$$

(2)



Aplicando el teorema de Betti a las estructuras de las figuras, que denominamos sistema original y sistema auxiliar respectivamente, tenemos:

$$-1^{(1)} \cdot \delta_i{}^{(2)} + N_{CG}^{(1)} \cdot \left(\delta_C{}^{(2)} + \delta_G{}^{(2)}\right) = -1^{(2)} \cdot \left(\delta_C{}^{(1)} + \delta_G{}^{(1)}\right)$$

Luego:

$$\delta_C{}^{(1)} + \delta_G{}^{(1)} = \frac{N_{CG}^{(1)} \cdot L_{CG}}{E_{CG} \cdot A_{CG}}$$

Entonces:

$$-1^{(1)} \cdot \delta_i{}^{(2)} + N_{CG}{}^{(1)} \cdot (\delta_C{}^{(2)} + \delta_G{}^{(2)}) = -1^{(2)} \cdot \frac{N_{CG}^{(1)} \cdot L_{CG}}{E_{CG} \cdot A_{CG}}$$

Despejando:

$$N_{CG}^{(1)} = \frac{\delta_i{}^{(2)}}{\delta_C{}^{(2)} + \delta_G{}^{(2)} + \dfrac{L_{CG}}{E_{CG} \cdot A_{CG}}}$$

Por lo tanto, nuevamente se necesita resolver solo el reticulado con carga fija indicada en el estado (2). Para determinar los valores de $\delta_i{}^{(2)}$, $\delta_C{}^{(2)}$ y $\delta_G{}^{(2)}$ se puede trabajar con diagramas de Williot, utilizar el segundo teorema de Castigliano o con programas computacionales, para hallar dichos desplazamientos en los nodos del reticulado. Una vez hallados dichos desplazamientos se procede a calcular $N_{CG}^{(1)}$ de la forma mencionada y se completa la línea de influencia uniendo linealmente, para los restantes puntos intermedios entre nodos.

Del mismo modo que en el reticulado con hiperestaticidad externa, una vez obtenida la línea de influencia de la incógnita hiperestática es posible hallar la línea de influencia de las restantes directas.