ELECTROMAGNETISMO
PRÁCTICO 5
CORRIENTE ELÉCTRICA

Problema Nº 1

Un sistema de cargas y corrientes está completamente contenido en el interior de un volumen V_0, cuya frontera es la superficie S.

a) Siendo $\vec{p}$ el momento dipolar de la distribución de cargas y corrientes (definido de la misma forma que en electrostática), demuestre que:

$$\int_V \vec{J}\,dV = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{V_0} \vec{r}\,\rho\,dV\right)$$

Sugerencia: utilice la igualdad vectorial:

$$\oint_S \vec{F}(\vec{G}\cdot\hat{n})dA = \int_V \vec{F}\nabla\cdot\vec{G}\,dV + \int_V \left(\vec{G}\cdot\nabla\right)\vec{F}\,dV$$

(se puede demostrar usando el teorema de la divergencia para los vectores $F_x\vec{G}$, $F_y\vec{G}$ y $F_z\vec{G}$), aplicándola convenientemente a los vectores $\vec{r}$ y $\vec{J}$.

Nota: Este resultado cobra importancia cuando se calcula la potencia radiada por una antena.

b) Demuestre a partir de la ecuación de continuidad, que en el interior de un conductor óhmico de conductividad g y permitividad ε, en estado estacionario la densidad volumétrica de carga $\rho(\vec{r})$ es nula.

c) Halle la ecuación diferencial que verifica $\rho(\vec{r},t)$ en el estado no-estacionario, y resuelva la ecuación con la condición inicial $\rho(\vec{r},t_0) = \rho_0(\vec{r})$.

Problema Nº 2

Una esfera de radio a, de un material óhmico de conductividad g, está sometida a un potencial $V_0 cos\theta$ (θ de coordenadas esféricas) en su superficie. Halle el potencial eléctrico y la densidad volumétrica de corriente en el interior de la esfera.

Sugerencia: Para hallar el potencial se puede buscar soluciones de la forma $\phi(\vec{r}) = Cr^n cos\theta$, determinando C y n.

Problema Nº 3

Una esfera de radio a, rellena con un material óhmico de conductividad g y permitividad ε, que se encuentra en el vacío, tiene inicialmente una densidad volumétrica de carga ρ_0 uniforme. Halle (en todo instante) la densidad volumétrica de carga $\rho(\vec{r},t)$, la densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r},t)$ y el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r},t)$ en todo el espacio. Determine además la densidad superficial de carga $\sigma(t)$ en la superficie de la esfera.

Problema Nº 4

a) Entre dos superficies esféricas conductoras ideales *($g \to \infty$)*, de radios a y b, hay un material óhmico de conductividad g. Si la diferencia de potencial entre las superficies esféricas es V_0:

i. Halle el campo eléctrico y la densidad de corriente en el conductor interno.

ii. Calcule la resistencia de este sistema.

iii. Halle el calor disipado por efecto Joule y verificar que vale V_0^2/R.

b) Ahora se tiene un material óhmico que llena el espacio entre dos cilindros de radios a y b, y largo L. Repita los cálculos de la parte anterior, despreciando efectos de borde, en los siguientes casos:

i. Cuando las superficies conductoras ideales son las superficies cilíndricas interna y externa del sistema (Resistencia Transversal).

ii. Cuando las superficies conductoras ideales son las dos superficies planas del sistema (Resistencia Longitudinal).

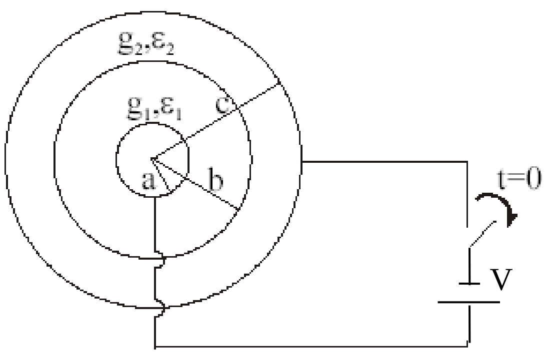
c) Utilizando los resultados del Problema 3 del Práctico Nº 2, en que se calcularon las capacidades de sistemas análogos a los de las partes a) y b)i, verifique que se cumple la relación $RC = \varepsilon/g$.

d) Usando la relación anterior, ¿cuál será la resistencia, por unidad de longitud, de un sistema formado por dos cables cilíndricos paralelos, de radios R_1 y R_2 y separados una distancia *d*, rodeados de un dieléctrico con pérdidas, de permitividad ε y conductividad g, que llena todo el espacio? Compare con el Problema Nº 3 del práctico 2.

Problema Nº 5

a) Un sistema como el de la parte a) del Problema Nº 4, en que el medio tiene además una permitividad ε, está conectado a una fuente de tensión V_0. En un determinado instante $t = 0$ se desconecta dicha fuente. Para $t > 0$: halle el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ en la zona $a < r < b$, la diferencia de potencial $V(t)$ entre las superficies conductoras ideales, y las densidades superficiales de carga $\sigma_a(t)$ $(r = a)$ y $\sigma_b(t)$ $(r = b)$.

b) Entre dos conductores esféricos supuestos ideales *($g \to \infty$)*, de radios a y c, se colocan dos capas de materiales dieléctricos. La primera de ellas, de conductividad g_1 y permitividad ε_1, tiene radio interno a y externo b; y la segunda, de conductividad g_2 y permitividad ε_2, tiene radio interno b y externo c. Este arreglo se conecta a una batería, como se indica en la figura. Estando el circuito en régimen con la llave cerrada, ésta se abre en $t = 0$. Para $t > 0$:



i. Halle el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ para $a < r < b$.

ii. Halle la densidad de carga en la

interfase entre los dos medios.

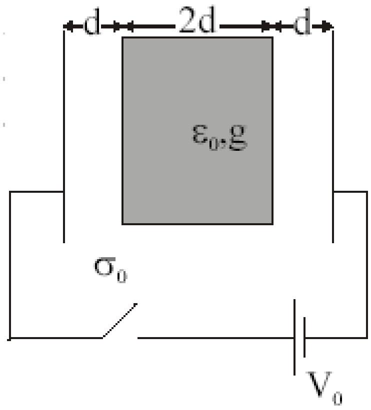
iii. Halle la diferencia de potencial entre los conductores $V(t)$.

Sugerencia: para simplificar los cálculos puede ser conveniente trabajar con los parámetros:

$$\tau_1 = \frac{\varepsilon_1}{g_1}, \qquad R_1 = \frac{1}{4\pi g_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right), \qquad \tau_2 = \frac{\varepsilon_2}{g_2}, \qquad R_2 = \frac{1}{4\pi g_2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$$

Problema Nº 6

Sean dos placas planas paralelas de conductividad infinita y área A que se encuentran separadas una distancia $4d$. Ambas placas pueden conectarse a una fuente constante de valor V_0, mediante el interruptor S. Se coloca entre ellas un prisma de material conductor, de conductividad g, área A y espesor $2d$, como se muestra en la figura. El prisma se encuentra cargado con una densidad superficial de carga uniforme de valor σ_0, en la cara que se indica. En $t = 0$ se cierra la llave.



a) Calcule las densidades en las dos caras del prisma.

b) Calcule la energía disipada hasta llegar al nuevo estado de régimen.

Se despreciarán los efectos de borde.

Problema Nº 7 - (Primer parcial de 2003)

Considere el circuito de 4 terminales formado por dos condensadores de valor C dispuestos como se muestra en la figura (a). Suponga que se conectan infinitos tramos de circuitos similares al anterior en la forma mostrada en la figura (b). Calcule el valor de la capacitancia equivalente entre los puntos 1 y 2.

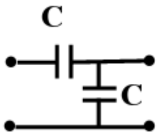


Figura (a)

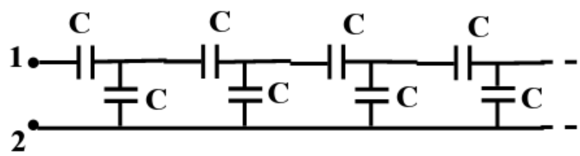
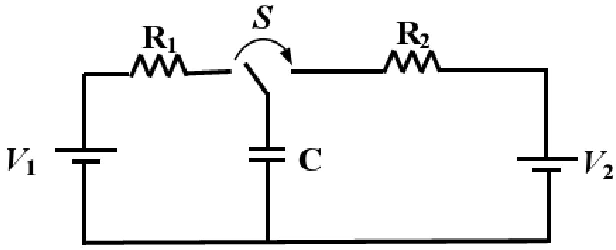


Figura (b)

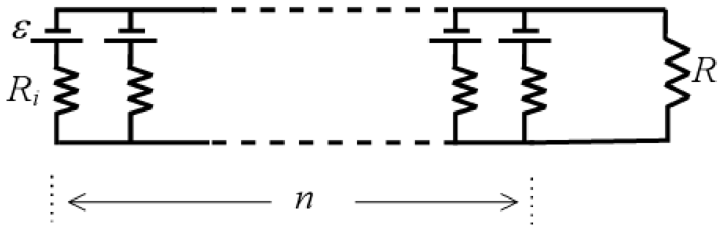
Problema Nº 8 - (Primer parcial de 2001)

En el circuito de la siguiente figura, para todo $t < 0$ el condensador C se halla conectado a la fuente de fem constante V_1 a través de la resistencia R_1. En $t = 0$, mediante el interruptor S se abre el circuito 1 y se cierra el circuito 2, y el condensador queda conectado a la fuente de fem constante V_2 a través de la resistencia R_2. Encuentre la corriente a través de la fuente de fem V_2 inmediatamente después.



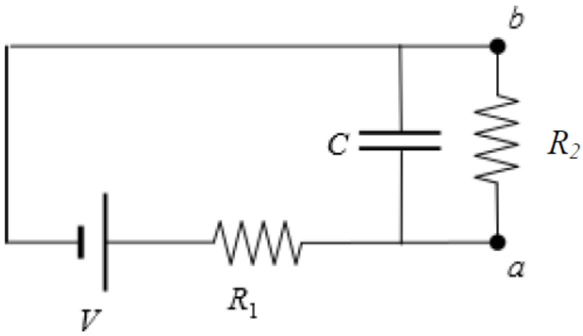
Problema Nº 9 - (Primer parcial de 2003)

Un grupo de n baterías idénticas de fem ε y resistencia interna R_i, suministran corriente a una resistencia R. Las baterías se conectan en paralelo (ver figura). Calcule la corriente a través de la resistencia R.



Problema Nº 10 - (Primer parcial de 2009)

En el instante $t = 0$ se enciende la fuente V del circuito de la figura (inicialmente el condensador se encuentra descargado). La resistencia R_2 se quema (instantáneamente, dejando de conducir corriente) si la diferencia de potencial en los puntos a y b del circuito llega a $|V_b - V_a| = V/2$. Llamemos t' al instante en que R_2 se quema. Obtener la condición bajo la cual R_2 se quema y el valor de t'.



RESULTADOS DE ALGUNOS PROBLEMAS

P2) b) $\phi(r,\theta) = \frac{V_0}{a} r \cos\theta \quad \vec{J} = \frac{gV_0}{a}(-\cos\theta\, \hat{e}_r + \operatorname{sen}\theta\, \hat{e}_\theta)$.

P3) $\rho = \rho_0 e^{-\frac{g}{\varepsilon}t} \quad \vec{J} = \frac{g\rho_0}{3\varepsilon} r e^{-\frac{g}{\varepsilon}t} \hat{e}_r = g\vec{E}_{dentro} \quad \vec{E}_{fuera} = \frac{a^3\rho_0}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{e}_r \quad \sigma(t) = \frac{a\rho_0}{3}(1 - e^{-\frac{g}{\varepsilon}t})$.

P4) a) i) $\vec{J} = g\frac{ab}{b-a}V_0\frac{1}{r^2}\hat{e}_r = g\vec{E}$ **ii)** $R = \frac{1}{4\pi g}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$

b)i) $\vec{J} = \frac{gV_0}{\mathrm{Ln}(b/a)}\frac{1}{r}\hat{e}_r = g\vec{E} \quad R_T = \frac{1}{2\pi g}\frac{\mathrm{Ln}(b/a)}{L}$ **ii)** $\vec{J} = \frac{gV_0}{L}\hat{k} = g\vec{E} \quad R_L = \frac{1}{\pi g}\frac{L}{b^2 - a^2}$

d) $R = \frac{1}{2\pi gL}\mathrm{Ln}\left(\frac{d^2}{R_1R_2}\right)$

P5) a) $\vec{E} = \frac{ab}{b-a}V_0\frac{e^{-\frac{g}{\varepsilon}t}}{r^2}\hat{e}_r \quad V_a - V_b = V_0 e^{-\frac{g}{\varepsilon}t}$

$\sigma_a(t) = \frac{\varepsilon b V_0}{a(b-a)} e^{-\frac{g}{\varepsilon}t} \quad \sigma_b(t) = -\frac{\varepsilon a V_0}{b(b-a)} e^{-\frac{g}{\varepsilon}t}$

b) i) $\vec{E}_1 = \frac{V_0}{4\pi g_1}\frac{1}{R_1 + R_2}\frac{e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{r^2}\hat{e}_r$ **ii)** $\sigma_b = \frac{V_0}{4\pi b^2}\frac{1}{R_1 + R_2}\left(\tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} - \tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right)$