**Ejercicio 3.** Una companía compró cierto número de reliquias falsas a 46 pesos cada una y vendió algunas de ellas a 100 pesos cada una. Si la cantidad comprada originalmente es mayor que 400 pero menor que 500 y la companía obtuvo una ganancia de 1000 pesos, ¿cuántas reliquias no se vendieron?

(Primer parcial mayo 2014 )

**Ejercicio 1.** Una tienda de cotillón vende chifles en bolsas de 46 unidades y bolsas de 26 unidades.

¿Cuántas bolsas de cada tipo tenemos que comprar si queremos comprar 600 chifles?

Mostrar el procedimiento para llegar a su respuesta.

**Ejercicio 2.** Para cada uno de los casos, determinar si existen naturales $a$ y $b$ que cumplan las siguientes ecuaciones:

**a**. $27a^2 = 16b^4$

**b**. $50a^3 = 27b^2$

(primer prueba setiembre 2015)

**Ejercicio 1.**

**a**. Resolver la ecuación diofántica:

$$738x + 621y = 45$$

**b**. ¿Existen enteros positivos $x, y$ tales que $738x + 621y = 49563$? Justifique la respuesta.

**Ejercicio 2.** Sea $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ con $p_i$ primos distintos y $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$.
Demostrar que $n$ es un cuadrado perfecto si y solo si el número de divisores positivos de $n$ es impar.

(primer prueba set 2016)

**Ejercicio 1.** Encontrar todos los $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $a + b = 407$ y $\text{mcm}(a, b) = 210\,\text{mcd}(a, b)$.

(primer parcial abril 2017)

**Ejercicio 1.**

**a**. Hallar mcd$(1820, 819)$ utilizando el Algoritmo de Euclides.

**b**. Hallar las descomposiciones factoriales de 1820 y de 819.

**c**. Hallar una solución (entera) de la ecuación $819x + 1820y = 4550$.

**d**. Una mamá canguro está reunida con sus amigas canguros y sus bebés. Al ver que su cría está cansada, la carga saltando menos de 30 veces a dormir debajo de un árbol y vuelve hacia la reunión. $4,55$ metros antes de llegar, encuentra unas ricas hierbas y se sienta a comerlas. Si salta una distancia de $0,819$ metros cuando transporta a su bebé y de $1,82$ metros cuando no lo carga, ¿cuántos saltos con y sin bebé dió?

**Ejercicio 2.** Para cada uno de los casos, determinar si existen naturales $a$ y $b$ que cumplan la condición dada. En caso de que existan, hallarlos todos; en caso contrario justificar.

**a**. $a > b$ y $\text{mcm}(a, b) - 4\,\text{mcd}(a, b) = 4$.

**b**. $\text{mcd}(a, b) = 54$ y $3a^2 = 2b^3$.

---

(primer prueba setiembre 2017)

**b**. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $\text{mcd}(a, b) = 1$.

i) Probar que si $p$ es un primo divisor común de $(a + 2b)$ y $ab$, entonces $p = 2$.

ii) Hallar $\text{mcd}(a + 2b, ab)$ discutiendo según la paridad de $a$.

**Ejercicio 3.**

**a**. Hallar todos $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $\text{mcd}(a, b) = 12$, $a$ tiene 15 divisores positivos y $b$ tiene 12.

**b**. Sea $(p_n)$ la sucesión de los números primos, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, etc. Probar que para todo $n > 1$ y todo $k = 1, \cdots, n-1$, se tiene que

$$p_1 p_2 \cdots p_k + p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_n \geq p_{n+1}.$$

(primer parcial setiembre 2017)

**Ejercicio 1.** (4 puntos)

**a**.
- Sea $a \in \mathbb{N}$, buscar todos los restos posibles de dividir $a^2$ entre 7.
- Dar ejemplos para cada resto que se pueda obtener.

**b**. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ tales que 7 divide a $a^2 + b^2$. Probar que 7 divide al $\text{mcd}(a, b)$.

(primer prueba set. 2018)

**Ejercicio 3.** (12 puntos)

**a**. Hallar el $\text{mcd}(7^4 - 1, 11^4 - 1)$.

**b**. Demostrar que si $p \geq 7$ es primo entonces $240 | (p^4 - 1)$.

**c**. Sea $A \subset \mathbb{Z}^*$ un subjconjunto no vacío de números enteros diferentes de cero. Definimos $\text{mcd}(A) = \text{máx}\{d \in \mathbb{Z}^+ \ / \ d|a, \text{ para todo } a \in A\}$.
Probar, a partir de las partes anteriores, que: $\text{mcd}\{p^4 - 1 \ / \ p \geq 7,\ p \text{ primo}\} = 240$.

(primer parcial set.2018)

**d)** Se tiene un tablero de $18 \times 20$ casillas y se ponen granos de arroz en las casillas de modo que todas tengan la misma cantidad. ¿Cuál es la menor cantidad de granos que se deben colocar en cada casilla para que la cantidad total de granos sea un cubo perfecto?

(primer parcial 2013)

**Ejercicio 2.** Las partes de este ejercicio son independientes.

**A.** Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\text{mcd}(2^n + 7^n, 2^n - 7^n) = 1$.

**B.** Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $\text{mcd}(n, 1260) = 70$ y $n$ tiene 30 divisores positivos.

**C.** Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $3^n$ divide a $64^{3^{n-1}} - 1$.

(primer parcial 2012)

**Ejercicio 1.**

**A.** Hallar $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $a > b$, el resto de dividir $a$ entre $b$ es 7 y $\text{mcm}(a, b) = 26\,\text{mcd}(a, b)$.

**B.** Probar que $5^{4n+1} + 2 \cdot 4^{6n+1}$ es múltiplo de 13 para todo $n \in \mathbb{N}$.

(primer parcial 2010)

**Ejercicio 2. (Total: 7 puntos).** Hallar todas las parejas de enteros positivos $(a, b)$ tales que

$$mcm(a, b) = 155 mcd(a, b), \quad a + b = 432 \text{ y } a < b.$$

(primer parcial 2005)

(b) Hallar todos los pares de naturales $(a, b)$ tales que $ab = 4900$ y $\text{mcd}(a, b) = 1$.

(primer parcial mayo 2021)