SyC - Hoja 3 - Ej. 4

4) **a)** Verifique que el diagrama de bloques de la **figura 4** corresponde a un sistema lineal cuya dinámica viene dada por:

$$\dot{x} = A.x + B.u$$

$$y = C.x + D.u$$

y la condición inicial $\mathbf{x(t_o) = x_o}$.

En ese caso, ¿qué representan los vectores $\mathbf{z(t)}$, $\mathbf{dz(t)/dt}$ y $\mathbf{w(t)}$?

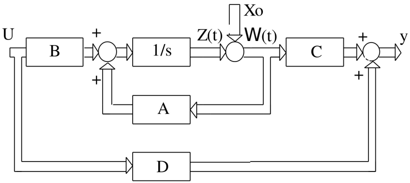


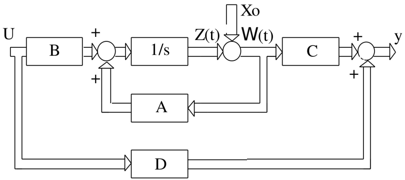
Figura 4

Supóngase $\mathbf{z(t_o)=0}$. Obsérvese como se puede representar un sistema dinámico con condiciones iniciales nulas y una entrada adicional que representa la condición inicial.

b) Calcule las funciones de transferencia.

SyC - Hoja 3 - Ej. 4

Parte a



Del diagrama de bloques:

$$\begin{cases} \dot{z} = Aw + Bu \\ w = z + x_0 \\ y = Cw + Du \end{cases}$$

Como $w = z + x_0$, se tiene que $\dot{z} = \dot{w}$ y entonces:

$$\begin{cases} \dot{w} = Aw + Bu \\ y = Cw + Du \end{cases}$$

Definiendo $x := w$, y tomando $z(t_0) = 0$, el diagrama de bloques corresponde a

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

con cond. inicial $x(t_0) = z(t_0) + x_0 = x_0$.

En ese caso,

$$z = x - x_0$$

$$\dot{z} = \dot{x}$$

$$w = x$$

SyC - Hoja 3 - Ej. 4

Parte a - Condiciones iniciales como entradas

Como $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(t_0) = x_0 \\ y = Cx + Du \end{cases}$ y $z = x - x_0,$ se tiene

$$\begin{cases} \dot{z} = A(z + x_0) + Bu \\ z(t_0) = 0 \\ y = C(z + x_0) + Du \end{cases}$$

o también:

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u \end{bmatrix} \\ z(t_0) = 0 \\ y = Cz + \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u \end{bmatrix} \end{cases}$$

SyC - Hoja 3 - Ej. 4

Parte b

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(t_0) = x_0 \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad \begin{cases} sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{AX(s) + BU(s)}{s} + \frac{x_0}{s} \qquad \text{(comparar con diag. de bloq.)}$$

Despejando $X(s)$ e $Y(s)$:

$$\begin{cases} X(s) = (s\mathrm{I} - A)^{-1} x_0 + (s\mathrm{I} - A)^{-1} BU(s) \\ Y(s) = \underbrace{C(s\mathrm{I} - A)^{-1} x_0}_{\text{Transf. de la resp. natural}} + \underbrace{\left[C(s\mathrm{I} - A)^{-1} B + D\right] U(s)}_{\text{Transf. de la resp. forzada}} \end{cases}$$

Matriz de transferencia:

$$C(s\mathrm{I} - A)^{-1} B + D$$

SyC - Hoja 3 - Ej. 4

Parte b - Condiciones iniciales como entradas

Aplicando lo anterior a

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u \end{bmatrix} \\ z\left(t_0\right) = 0 \\ y = Cz + \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u \end{bmatrix} \end{cases}$$

se tiene

$$\begin{cases} Z(s) = (s\mathrm{I} - A)^{-1} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_0}{s} \\ U(s) \end{bmatrix} \\ Y(s) = \begin{bmatrix} C\left(s\mathrm{I} - A\right)^{-1} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_0}{s} \\ U(s) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Matriz de transferencia:

$$C\left(s\mathrm{I} - A\right)^{-1} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}$$

SyC - Hoja 3 - Ej. 4

Parte b - Condiciones iniciales como entradas - Verificación para $Y(s)$

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \left[C\,(s\mathrm{I}-A)^{-1}\begin{bmatrix}A & B\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}C & D\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}\frac{x_0}{s}\\ U(s)\end{bmatrix}\\
&= C\,(s\mathrm{I}-A)^{-1}A\frac{x_0}{s} + C\frac{x_0}{s} + \left[C\,(s\mathrm{I}-A)^{-1}B + D\right]U(s)\\
&= C\underbrace{\left[(s\mathrm{I}-A)^{-1}A + \mathrm{I}\right]}_{*}\frac{x_0}{s} + \left[C\,(s\mathrm{I}-A)^{-1}B + D\right]U(s),
\end{aligned}
$$

pero

$$
\begin{aligned}
* = (s\mathrm{I}-A)^{-1}A + \mathrm{I} &= (s\mathrm{I}-A)^{-1}(s\mathrm{I}-A)\left[(s\mathrm{I}-A)^{-1}A + \mathrm{I}\right]\\
&= (s\mathrm{I}-A)^{-1}\left[A + s\mathrm{I} - A\right]\\
&= (s\mathrm{I}-A)^{-1}s\mathrm{I}.
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
Y(s) = C\,(s\mathrm{I}-A)^{-1}x_0 + \left[C\,(s\mathrm{I}-A)^{-1}B + D\right]U(s) \qquad \checkmark
$$

SyC - Hoja 3 - Ej. 4

Parte b - Condiciones iniciales como entradas - Verificación para $Z(s)$

$$
\begin{aligned}
Z(s) &= (s\mathrm{I} - A)^{-1} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_0}{s} \\ U(s) \end{bmatrix} \\
&= (s\mathrm{I} - A)^{-1} \left(A\frac{x_0}{s} + BU(s) \right) \\
&= (s\mathrm{I} - A)^{-1} A\frac{x_0}{s} + (s\mathrm{I} - A)^{-1} BU(s)
\end{aligned}
$$

pero $(s\mathrm{I} - A)^{-1} A = (s\mathrm{I} - A)^{-1} s\mathrm{I} - \mathrm{I}$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
Z(s) &= \left[(s\mathrm{I} - A)^{-1} x_0 - \frac{x_0}{s} \right] + (s\mathrm{I} - A)^{-1} BU(s) \\
&= (s\mathrm{I} - A)^{-1} x_0 + (s\mathrm{I} - A)^{-1} BU(s) - \frac{x_0}{s} \\
&= X(s) - \frac{x_0}{s} \qquad \checkmark
\end{aligned}
$$