

Ingeniería de ontologías

Lógica Descriptiva

Sintaxis y semántica

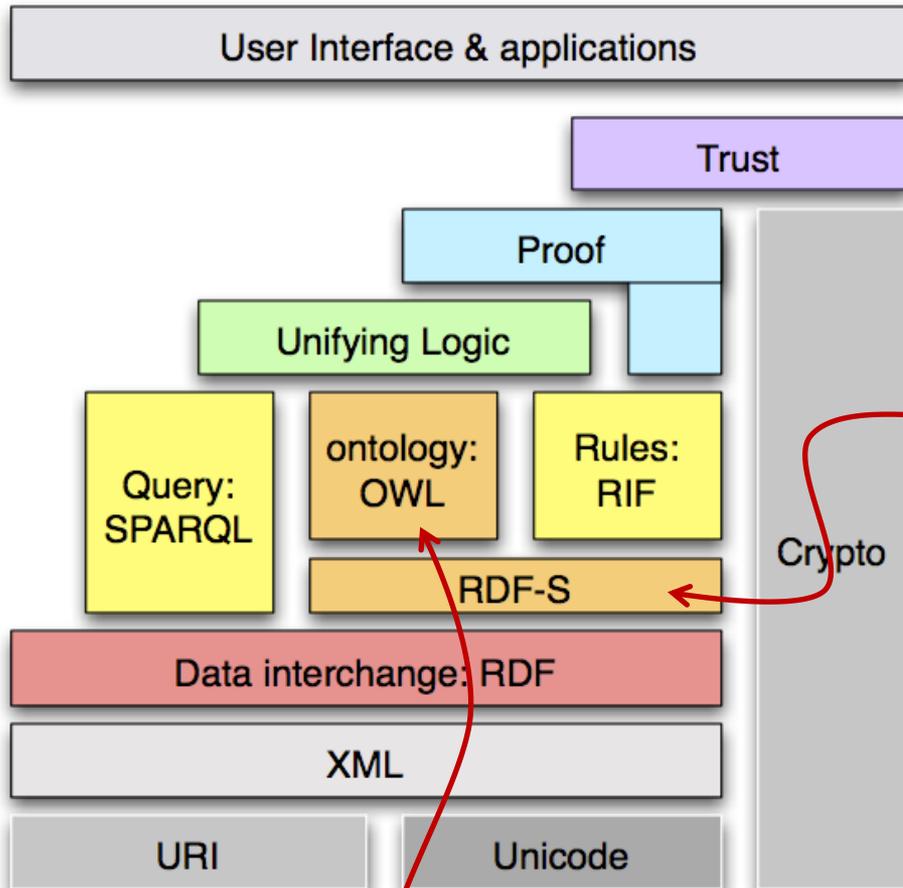
Setiembre 2021



Agenda

- **Lógica descriptiva**
 - **Introducción**
 - **Sintaxis**
 - **Semántica**
 - **Mundo abierto y mundo cerrado.**

Arquitectura de la Web Semántica



Para modelar un dominio de interés o una aplicación:

Se necesita un modelo que permita **clasificar los recursos** descritos en RDF.



Ontologías: mayor expresividad

“Livianas”: **RDF-Schema**

(jerarquías de clases de recursos, jerarquías de propiedades, dominio y rango)

“Pesadas”: **OWL**

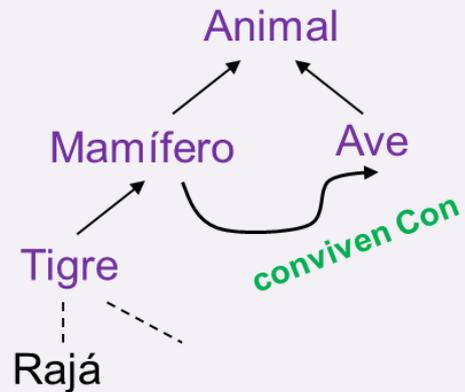
(imponer restricciones, chequeos de consistencia, inferencias) → **Lógica**

Lógica Descriptiva: un poco de historia

Redes semánticas:

Red que representa relaciones semánticas entre entidades.

Significado de entidades y relaciones vago.



Frame logic:

Modelo de representación de conocimiento orientado a objetos, basado en lógica, que sigue el paradigma de mundo cerrado.

$\forall ?X \forall ?Y (?X[\text{son} \rightarrow ?Y] \leftarrow ?Y:\text{man}[\text{father} \rightarrow ?X])$

Lógica Descriptiva

Redes semánticas

Lógica de primer orden

Frame logic

Predicados unarios: $P(x)$

Predicados binarios: $R(x, y)$



Lógica Descriptiva (DL)

Fragmentos decidibles de la lógica de primer orden

Representar las nociones fundamentales de un dominio a través de *descripciones de conceptos*

Bloques de construcción de lógica descriptiva

- **Instancias o individuos:** constantes

Elementos, objetos atómicos del dominio

María, Uruguay

- **Conceptos ó clases:** predicados unarios

Conjuntos de elementos del dominio

Persona, Estudiante, País

- **Relaciones ó roles:** predicados binarios

Conjuntos de pares de elementos del dominio

Ej.: $vive \subseteq Persona \times País$ **dominio:** Persona, **rango:** País

- **Axiomas:** sentencias que son siempre verdaderas

Afirmaciones sobre individuos, conceptos y roles

Estudiante es una subclase de Persona

Estudiante \sqsubseteq Persona

María es una instancia de Persona

Persona(María)

María vive en Uruguay

vive(María, Uruguay)

Lógica(s) Descriptiva(s)

- Familias de lenguajes de representación de conocimiento (fragmentos de lógica de primer orden)
- Permiten representar conocimiento conceptual de un dominio de aplicación en forma estructurada y formalmente bien entendida.

| Representación de Conocimiento | Lógica Descriptiva | Teoría de Conjuntos |
|---------------------------------------|------------------------------------|----------------------------|
| Clase | Concepto (descripción de concepto) | Conjunto |
| Relación | Rol (descripción de rol) | Relación binaria |

Lógica Descriptiva - Sintaxis

Partimos de un conjunto de **nombres de conceptos atómicos** A, B, \dots y **nombres de roles atómicos** R, S, \dots , **nombres de individuos** a, b, \dots

Cada lógica permite construir conceptos y axiomas con diferente expresividad:

\mathcal{ALC} : $\top, \perp, \sqcap, \sqcup, \exists, \forall, \neg$

\mathcal{S} : \mathcal{ALC} + **roles transitivos** $\text{Trans}(R)$

A \mathcal{S} se agregan constructores que se representan por diferentes letras:

\mathcal{H} : inclusión de roles \mathcal{O} : nominales $\{a\}$ \mathcal{I} : roles inversos

\mathcal{N} : restricciones numéricas \mathcal{Q} : restricciones numéricas calificadas

\mathcal{R} : $\text{Dis}(R, S)$ roles disjuntos $\text{Irr}(R)$ roles irreflexivos

Aserciones de negación de roles: $(\text{John}, \text{Mary}) : \neg\text{likes}$,

Axiomas de inclusión de roles complejos: $R \circ S \sqsubseteq Q$, universal role U , $\exists R.\text{Self}$

Descripción de conceptos en lógica \mathcal{ALCQ} :

$C, D ::= \perp \mid \top \mid A \mid \neg C \mid C \sqcap D \mid C \sqcup D \mid \forall R.C \mid \exists R.C \mid \geq nR.C$

Concepto vacío Todo el Universo

Lógica Descriptiva - Sintaxis

Conceptos en lógica *ALCQ*:

$C, D := \perp | T | A | \neg C | C \sqcap D | C \sqcup D | \forall R.C | \exists R.C | \geq nR.C | \leq nR.C$

Conceptos atómicos: *Persona, Madre, Padre, Mujer* Rol atómico: *tieneHijo*

\neg *Persona*: conjunto de todos los elementos que **no** satisfacen el predicado *Persona* (no pertenecen a ese conjunto)

Persona \sqcap *Mujer*: conjunto de todos los elementos que satisfacen el predicado *Persona* y satisfacen el predicado *Mujer* (pertenecen a ambos conjuntos)

Padre \sqcup *Madre*: conjunto de todos los elementos que satisfacen el predicado *Padre* (pertenecen a ese conjunto) ó satisfacen el predicado *Madre*

\exists *tieneHijo.Persona*: conjunto de todos los elementos que **están vinculados** a algún elemento del concepto *Persona* a través del rol *tieneHijo*

\forall *tieneHijo.Persona*: conjunto de todos los elementos que, **si están vinculados** a algún elemento a través del rol *tieneHijo*, este elemento **debe pertenecer al concepto *Persona***. Si NO está vinculado a ningún elemento a través de *tieneHijo*, también satisface la condición.

≥ 2 *tieneHijo.Persona*: conjunto de todos los elementos que **están vinculados a por lo menos 2 elementos** del concepto *Persona* a través del rol *tieneHijo*

Lógica Descriptiva - Sintaxis

Conceptos complejos en lógica \mathcal{ALCQ} :

$C, D := \perp | T | A | \neg C | C \sqcap D | C \sqcup D | \forall R.C | \exists R.C | \geq nR.C | \leq nR.C$

Conceptos atómicos: *Persona, Madre, Padre*

Rol atómico: *tieneHijo*

Ejercicio:

Describir el conjunto de todos los elementos que son personas y no tienen ningún hijo que sea una persona.

Lógica Descriptiva - Sintaxis

Conceptos complejos en lógica \mathcal{ALCQ} :

$C, D := \perp | T | A | \neg C | C \sqcap D | C \sqcup D | \forall R.C | \exists R.C | \geq nR.C | \leq nR.C$

Conceptos atómicos: *Persona, Madre, Padre*

Rol atómico: *tieneHijo*

Ejercicio:

Describir el conjunto de todos los elementos que son personas y no tienen ningún hijo que sea una persona.

$Persona \sqcap \neg \exists \text{tieneHijo}.Persona$



$Persona \sqcap \forall \text{tieneHijo}.\neg Persona$

Lógica Descriptiva - Sintaxis

Conceptos complejos en lógica \mathcal{ALCQ} :

$C, D := \perp | T | A | \neg C | C \sqcap D | C \sqcup D | \forall R.C | \exists R.C | \geq nR.C | \leq nR.C$

Conceptos atómicos: *Persona, Madre, Padre*

Rol atómico: *tieneHijo*

Ejercicio:

Describir el conjunto de todos los elementos que son personas y tienen como máximo 3 hijos.

Lógica Descriptiva - Sintaxis

Conceptos complejos en lógica \mathcal{ALCQ} :

$C, D := \perp | T | A | \neg C | C \sqcap D | C \sqcup D | \forall R.C | \exists R.C | \geq nR.C | \leq nR.C$

Conceptos atómicos: *Persona, Madre, Padre*

Rol atómico: *tieneHijo*

Ejercicio:

Describir el conjunto de todos los elementos que son personas y tienen como máximo 3 hijos.

$Persona \sqcap \leq 3 \text{ tieneHijo}. T$

Lógica Descriptiva - Sintaxis

Conceptos complejos en lógica \mathcal{ALCQ} :

$C, D := \perp | T | A | \neg C | C \sqcap D | C \sqcup D | \forall R.C | \exists R.C | \geq nR.C | \leq nR.C$

Conceptos atómicos: *Persona, Madre, Padre, Mujer*

Rol atómico: *tieneHijo*

Ejercicio:

Describir el conjunto de todos los elementos que son padres o son mujeres que no tienen hijas mujeres.

Lógica Descriptiva - Sintaxis

Conceptos complejos en lógica \mathcal{ALCQ} :

$C, D := \perp | T | A | \neg C | C \sqcap D | C \sqcup D | \forall R.C | \exists R.C | \geq nR.C | \leq nR.C$

Conceptos atómicos: *Persona, Madre, Padre, Mujer*

Rol atómico: *tieneHijo*

Ejercicio:

Describir el conjunto de todos los elementos que son padres o son mujeres que no tienen hijas mujeres.

$Padre \sqcup (Mujer \sqcap \neg \exists \text{tieneHijo.Mujer})$

Lógica Descriptiva - Sintaxis

Base de conocimiento $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$

TBox \mathcal{T} : Conocimiento básico, descripción intensional sobre el dominio de un problema. $C \sqsubseteq D$

ABox \mathcal{A} : Conocimiento sobre individuos, descripción extensional sobre el dominio de un problema.

$C(a) \quad R(a, b) \quad a = b \quad a \neq b$

$\mathcal{T} = \{Mujer \sqsubseteq Persona, Persona \equiv Mujer \sqcup Hombre,$

$Madre \equiv Mujer \sqcap \exists tieneHijo. Persona\}$

$C \equiv D \rightarrow C \sqsubseteq D \text{ y } D \sqsubseteq C$

$\mathcal{A} = \{Mujer(maria), tieneHijo(maria, diego)\}$

Lógica Descriptiva - Sintaxis

Base de conocimiento $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$

TBox \mathcal{T} : Conocimiento básico, descripción intensional sobre el dominio de un problema. $C \sqsubseteq D$

ABox \mathcal{A} : Conocimiento sobre individuos, descripción extensional, sobre el dominio de un problema. $C(a) \quad R(a, b) \quad a = b \quad a \neq b$

$Mujer \sqsubseteq Persona$

$Persona \equiv Mujer \sqcup Hombre$

$Madre \equiv Mujer \sqcap \exists tieneHijo. Persona$

$Padre \equiv Hombre \sqcap \exists tieneHijo. Persona$

$Mujer(maria)$

$tieneHijo(maria, diego)$

Ejercicio:

Una “abuela” es una madre que tiene al menos un hijo que es padre ó madre.

Lógica Descriptiva - Sintaxis

Base de conocimiento $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$

TBox \mathcal{T} : Conocimiento básico, descripción intensional sobre el dominio de un problema. $C \sqsubseteq D$

ABox \mathcal{A} : Conocimiento sobre individuos, descripción extensional, sobre el dominio de un problema. $C(a)$ $R(a, b)$ $a = b$ $a \neq b$

$Mujer \sqsubseteq Persona$

$Persona \equiv Mujer \sqcup Hombre$

$Madre \equiv Mujer \sqcap \exists tieneHijo. Persona$

$Padre \equiv Hombre \sqcap \exists tieneHijo. Persona$

$Mujer(maria)$

$tieneHijo(maria, diego)$

Ejercicio:

Una “abuela” es una madre que tiene al menos un hijo que es padre ó madre.

$Abuela \equiv Madre \sqcap \exists tieneHijo. (Padre \sqcup Madre)$

Lógica Descriptiva - Sintaxis

Base de conocimiento $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$

TBox \mathcal{T} : Conocimiento básico, descripción intensional sobre el dominio de un problema. $C \sqsubseteq D$

ABox \mathcal{A} : Conocimiento sobre individuos, descripción extensional, sobre el dominio de un problema. $C(a)$ $R(a, b)$ $a = b$ $a \neq b$

$Mujer \sqsubseteq Persona$

$Persona \equiv Mujer \sqcup Hombre$

$Madre \equiv Mujer \sqcap \exists tieneHijo. Persona$

$Padre \equiv Hombre \sqcap \exists tieneHijo. Persona$

$Mujer(maria)$

$tieneHijo(maria, diego)$

Ejercicio:

Todas las madres son personas que tienen al menos un hijo.

Lógica Descriptiva - Sintaxis

Base de conocimiento $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$

TBox \mathcal{T} : Conocimiento básico, descripción intensional sobre el dominio de un problema. $C \sqsubseteq D$

ABox \mathcal{A} : Conocimiento sobre individuos, descripción extensional, sobre el dominio de un problema. $C(a)$ $R(a, b)$ $a = b$ $a \neq b$

$Mujer \sqsubseteq Persona$

$Persona \equiv Mujer \sqcup Hombre$

$Madre \equiv Mujer \sqcap \exists tieneHijo. Persona$

$Padre \equiv Hombre \sqcap \exists tieneHijo. Persona$

$Mujer(maria)$

$tieneHijo(maria, diego)$

Ejercicio:

Todas las madres son personas que tienen al menos un hijo.

$Madre \sqsubseteq Persona \sqcap \exists tieneHijo. T$

Lógica Descriptiva - Sintaxis

Base de conocimiento $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$

TBox \mathcal{T} : Conocimiento básico, descripción intensional sobre el dominio de un problema. $C \sqsubseteq D$

ABox \mathcal{A} : Conocimiento sobre individuos, descripción extensional, sobre el dominio de un problema. $C(a)$ $R(a, b)$ $a = b$ $a \neq b$

$Mujer \sqsubseteq Persona$

$Persona \equiv Mujer \sqcup Hombre$

$Madre \equiv Mujer \sqcap \exists tieneHijo. Persona$

$Padre \equiv Hombre \sqcap \exists tieneHijo. Persona$

$Mujer(maria)$

$tieneHijo(maria, diego)$

Ejercicio:

Todas las mujeres que no tienen hijos no son hombres.

Lógica Descriptiva - Sintaxis

Base de conocimiento $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$

TBox \mathcal{T} : Conocimiento básico, descripción intensional sobre el dominio de un problema. $C \sqsubseteq D$

ABox \mathcal{A} : Conocimiento sobre individuos, descripción extensional, sobre el dominio de un problema. $C(a)$ $R(a, b)$ $a = b$ $a \neq b$

$Mujer \sqsubseteq Persona$

$Persona \equiv Mujer \sqcup Hombre$

$Madre \equiv Mujer \sqcap \exists tieneHijo. Persona$

$Padre \equiv Hombre \sqcap \exists tieneHijo. Persona$

$Mujer(maria)$

$tieneHijo(maria, diego)$

Ejercicio:

Todas las mujeres que no tienen hijos no son hombres.

$Mujer \sqcap \neg \exists tieneHijo. T \sqsubseteq \neg Hombre$

Lógica Descriptiva - Sintaxis

Base de conocimiento $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$

TBox \mathcal{T} : Conocimiento básico, descripción intensional sobre el dominio de un problema. $C \sqsubseteq D$

ABox \mathcal{A} : Conocimiento sobre individuos, descripción extensional, sobre el dominio de un problema. $C(a)$ $R(a, b)$ $a = b$ $a \neq b$

Rol tiene Pareja

Ejercicio:

Todos los elementos del dominio tienen como máximo una pareja.

Lógica Descriptiva - Sintaxis

Base de conocimiento $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$

TBox \mathcal{T} : Conocimiento básico, descripción intensional sobre el dominio de un problema. $C \sqsubseteq D$

ABox \mathcal{A} : Conocimiento sobre individuos, descripción extensional, sobre el dominio de un problema. $C(a)$ $R(a, b)$ $a = b$ $a \neq b$

Rol tienePareja

Ejercicio:

Todos los elementos del dominio tienen como máximo una pareja.

$T \sqsubseteq \leq 1 \text{tienePareja}.T$



Rol o propiedad **funcional**

Lógica Descriptiva - Sintaxis

Base de conocimiento $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$

TBox \mathcal{T} : Conocimiento básico, descripción intensional sobre el dominio de un problema. $C \sqsubseteq D$

ABox \mathcal{A} : Conocimiento sobre individuos, descripción extensional, sobre el dominio de un problema. $C(a)$ $R(a, b)$ $a = b$ $a \neq b$

Rol tiene Pareja

Ejercicio:

Todo elemento que es pareja, lo es de un único elemento.

Lógica Descriptiva - Sintaxis

Base de conocimiento $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$

TBox \mathcal{T} : Conocimiento básico, descripción intensional sobre el dominio de un problema. $C \sqsubseteq D$

ABox \mathcal{A} : Conocimiento sobre individuos, descripción extensional, sobre el dominio de un problema. $C(a)$ $R(a, b)$ $a = b$ $a \neq b$

Rol tiene Pareja

Ejercicio:

Todo elemento que es pareja, lo es de un único elemento.

$T \sqsubseteq \leq 1 \text{tiene Pareja} . T$



Rol o propiedad **inversa funcional**

Lógica Descriptiva - Sintaxis

Base de conocimiento $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{A} \rangle$

TBox \mathcal{T} : Conocimiento básico, descripción intensional sobre el dominio de un problema. $C \sqsubseteq D$

ABox \mathcal{A} : Conocimiento sobre individuos, descripción extensional, sobre el dominio de un problema. $C(a)$ $R(a, b)$ $a = b$ $a \neq b$

RBox \mathcal{R} : Conocimiento básico, descripción intensional sobre el conjunto de pares de elementos del dominio. $R \sqsubseteq S$ $\text{Dis}(R, S)$ $R \circ S \sqsubseteq Q$

Mujer \sqsubseteq *Persona*

tieneHijo(maria, diego)

mariajose = majo

esPadre \circ *esPadre* \sqsubseteq *esAbuelo*

Lógica Descriptiva – Sintaxis - Rbox

ALC: $\top, \perp, \sqcap, \sqcup, \exists, \forall, \neg$

S: **ALC** + roles transitivos $\text{Trans}(R)$

A **S** se agregan constructores que se representan por diferentes letras:

H: inclusión de roles **O**: nominales $\{a\}$ **I**: roles inversos

N: restricciones numéricas **Q**: restricciones numéricas calificadas

R: $\text{Dis}(R, S)$ roles disjuntos $\text{Irr}(R)$ roles irreflexivos

Aserciones de negación de roles: $(John, Mary) : \neg\text{likes}$,

Axiomas de inclusión de roles complejos: $R \circ S \sqsubseteq Q$, universal role U , $\exists R.\text{Self}$

H: $R \sqsubseteq S$ **tieneHijo** \sqsubseteq **tieneDescendiente**

O: $\{a\}$ $\{Uruguay\}$ **I**: $S = R^{-}$ **Hijo = Padre**

N: $\geq nR.T$ $\geq 2\text{tieneHijo}.T$

R: $\text{Dis}(R, S)$ **Dis(esAmigoDe, esEnemigoDe)** $\text{Irr}(R)$ **Irr(tieneHijo)**

$R \circ S \sqsubseteq Q$ **esHermano** \circ **esPadre** \sqsubseteq **esTio**

Roles transitivos: $\text{Trans}(R) \rightarrow R \circ R \sqsubseteq R$

Lógica Descriptiva - Semántica

Interpretación

Sea $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ tal que:

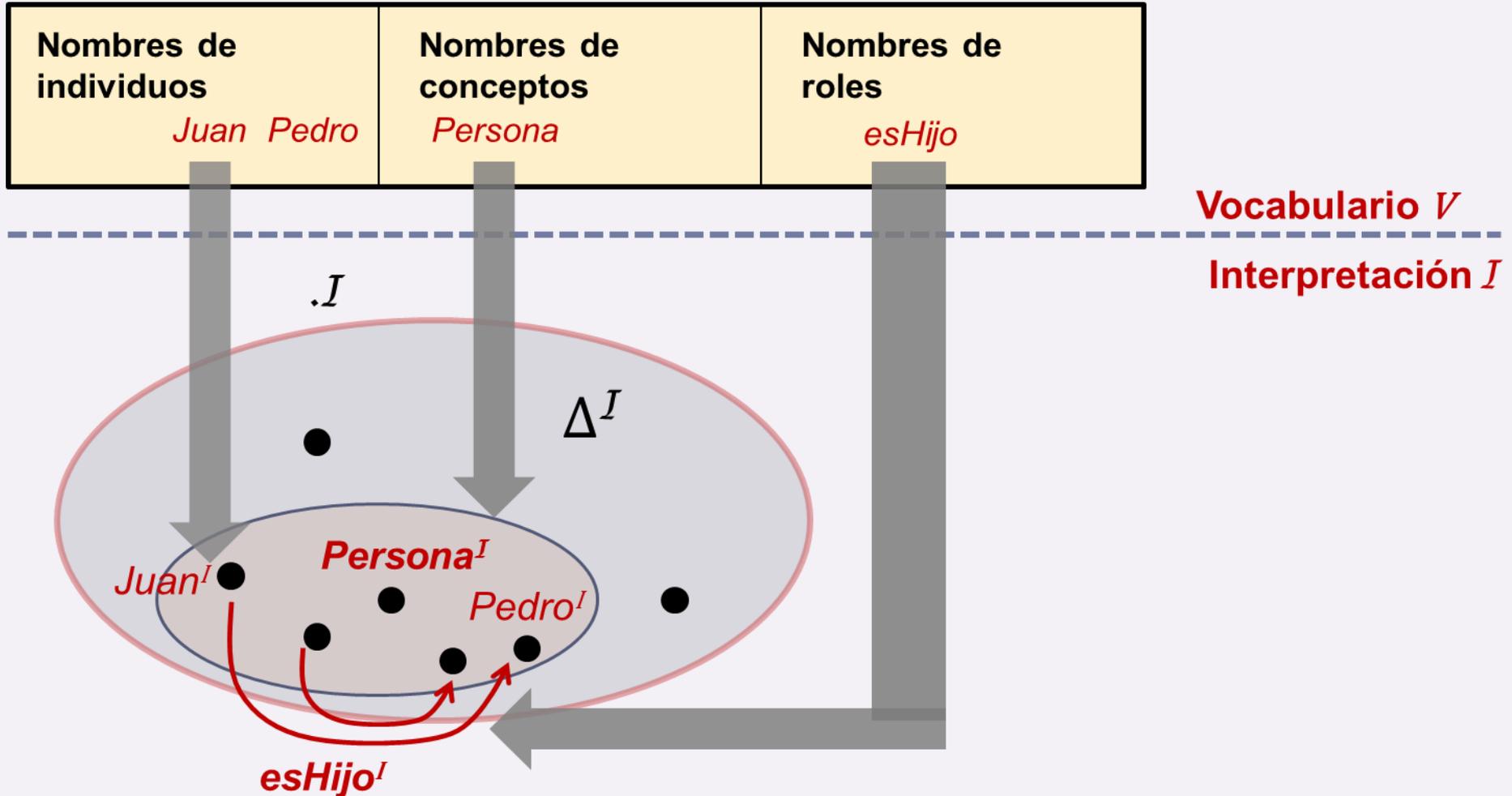
$\Delta^{\mathcal{I}}$: dominio de interpretación, conjunto no vacío

$\cdot^{\mathcal{I}}$: función de interpretación que asigna

- A cada **concepto** A un conjunto $A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$
- A cada **rol** R una relación binaria $R^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$
- A cada **individuo** a un elemento $a^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$

Lógica Descriptiva - Semántica

Interpretación



Lógica Descriptiva - Semántica

Interpretación de conceptos complejos *ALCQ*

| Constructor | DL | Semántica |
|-----------------------------|---------------|------------------------------------------------------------|
| bottom | \perp | \emptyset |
| top | \top | Δ^I |
| negación | $\neg C$ | $\Delta^I \setminus C^I$ |
| conjunción | $C \sqcap D$ | $C^I \cap D^I$ |
| disjunción | $C \sqcup D$ | $C^I \cup D^I$ |
| restricción existencial | $\exists R.C$ | $\{x \mid \exists y.(x,y) \in R^I \wedge y \in C^I\}$ |
| restricción universal | $\forall R.C$ | $\{x \mid \forall y.(x,y) \in R^I \rightarrow y \in C^I\}$ |
| restricción de cardinalidad | $\geq n R.C$ | $\{x \mid \#\{y.(x,y) \in R^I \wedge y \in C^I\} \geq n\}$ |

Lógica Descriptiva - Semántica

Ejemplo de Interpretación

Conceptos atómicos: *Persona, Madre, Padre*

Rol atómico: *tieneHijo*

$$I = (\Delta^I, \cdot^I)$$

$$\Delta^I = \{a, b, c, d, e\}$$

$$Persona^I = \{a, b, c, d\}$$

$$Madre^I = \{a\}$$

$$Padre^I = \{b\}$$

$$tieneHijo^I = \{\langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, a \rangle, \langle a, e \rangle, \langle d, e \rangle\}$$

$$(Padre \sqcup Madre)^I = \{a, b\}$$

$$(\exists tieneHijo. Persona)^I = \{a, b, c\}$$

Lógica Descriptiva - Semántica

Ejemplo de Interpretación

Conceptos atómicos: *Persona, Madre, Padre*

Rol atómico: *tieneHijo*

$$I = (\Delta^I, \cdot^I)$$

$$\Delta^I = \{María, Juan, Pedro, Ana, José\}$$

$$Persona^I = \{María, Juan, Pedro, Ana\}$$

$$Madre^I = \{María\}$$

$$Padre^I = \{Juan, Pedro\}$$

$$tieneHijo^I = \{<María, Ana>, <Juan, Ana>\}$$

$$(Padre \sqcup Madre)^I = \{María, Juan, Pedro\}$$

$$(\exists tieneHijo. Persona)^I = \{María, Juan\}$$

Lógica Descriptiva - Semántica

Ejemplo de Interpretación

Conceptos atómicos: *Persona, Madre, Padre*

Rol atómico: *tieneHijo*

$$I = (\Delta^I, \cdot^I)$$

$$\Delta^I = \{María, Juan, Pedro, Ana, José\}$$

$$Persona^I = \{María, Juan, Pedro, Ana\}$$

$$Madre^I = \{María, José\}$$

$$Padre^I = \{Juan, Pedro, \}$$

$$tieneHijo^I = \{<María, Ana>, <Juan, Ana>, <Ana, José>, <Pedro, José>\}$$

$$(Padre \sqcup Madre)^I = \{María, José, Juan, Pedro\}$$

$$(\exists tieneHijo. Persona)^I = \{María, Juan, Ana, Pedro\}$$

Lógica Descriptiva – Semántica

Interpretación

Sea $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$

\mathcal{I} satisface el axioma de TBox $C \sqsubseteq D$ si $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$. Notación: $\mathcal{I} \models C \sqsubseteq D$

\mathcal{I} satisface los axiomas de Abox:

$C(a)$ si $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$. $\mathcal{I} \models C(a)$

$R(a, b)$ si $\langle a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}} \rangle \in R^{\mathcal{I}}$. $\mathcal{I} \models R(a, b)$

$a = b$ si $a^{\mathcal{I}} = b^{\mathcal{I}}$. $\mathcal{I} \models a = b$

$a \neq b$ si $a^{\mathcal{I}} \neq b^{\mathcal{I}}$. $\mathcal{I} \models a \neq b$

Lógica Descriptiva - Semántica

Modelo de una base de conocimiento

Sea $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ una interpretación y $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$ una base de conocimiento,

\mathcal{I} es un modelo de \mathcal{K} si:

- $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$ para todo $C \sqsubseteq D$ en \mathcal{T}
- $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$ para todo $C(a)$ en \mathcal{A}
- $\langle a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}} \rangle \in R^{\mathcal{I}}$ para todo $R(a, b)$ en \mathcal{A}
- $a^{\mathcal{I}} = b^{\mathcal{I}}$ para todo $a = b$ en \mathcal{A}
- $a^{\mathcal{I}} \neq b^{\mathcal{I}}$ para todo $a \neq b$ en \mathcal{A}

\mathcal{K} es consistente si existe \mathcal{I} modelo de \mathcal{K}

Semántica - Ejemplos

$\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ es un **modelo** de $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$ si:

- $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$ para todo $C \sqsubseteq D$ en \mathcal{T}
- $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$ para todo $C(a)$ en \mathcal{A}
- $\langle a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}} \rangle \in R^{\mathcal{I}}$ para todo $R(a, b)$ en \mathcal{A}
- $a^{\mathcal{I}} = b^{\mathcal{I}}$ para todo $a = b$ en \mathcal{A}
- $a^{\mathcal{I}} \neq b^{\mathcal{I}}$ para todo $a \neq b$ en \mathcal{A}

\mathcal{K} es consistente si existe \mathcal{I} modelo de \mathcal{K}

$\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$:

$\mathcal{T} = \{ \text{Madre} \sqsubseteq \text{Persona}, \text{Padre} \sqsubseteq \text{Persona}, \text{Padre} \sqcap \text{Madre} \sqsubseteq \perp \}$

$\mathcal{A} = \{ \text{Persona}(\text{maría}), \text{Persona}(\text{juana}), \text{Persona}(\text{pedro}), \text{Madre}(\text{maría}), \text{Padre}(\text{pedro}) \}$

$\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$

$\Delta^{\mathcal{I}} = \{a, b, c\}$

$\text{Persona}^{\mathcal{I}} = \{a, b, c\}$

$\text{Madre}^{\mathcal{I}} = \{a\}$

$\text{Padre}^{\mathcal{I}} = \{b\}$

$\text{maría}^{\mathcal{I}} = a$

$\text{juana}^{\mathcal{I}} = c$

$\text{pedro}^{\mathcal{I}} = b$

Semántica - Ejemplos

$I = (\Delta^I, \cdot^I)$ es un **modelo** de $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$ si:

- $C^I \subseteq D^I$ para todo $C \sqsubseteq D$ en \mathcal{T}
- $a^I \in C^I$ para todo $C(a)$ en \mathcal{A}
- $\langle a^I, b^I \rangle \in R^I$ para todo $R(a, b)$ en \mathcal{A}
- $a^I = b^I$ para todo $a = b$ en \mathcal{A}
- $a^I \neq b^I$ para todo $a \neq b$ en \mathcal{A}

\mathcal{K} es consistente si existe I modelo de \mathcal{K}

$\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$:

$\mathcal{T} = \{Madre \sqsubseteq Persona, Padre \sqsubseteq Persona, Padre \sqcap Madre \sqsubseteq \perp\}$

$\mathcal{A} = \{Persona(maría), Persona(juana), Persona(pedro), Madre(maría), Padre(pedro)\}$

$I = (\Delta^I, \cdot^I)$

$\Delta^I = \{a, b, c\}$

$Persona^I = \{a, b, c\}$

$Madre^I = \{a\}$

$Padre^I = \{b\}$

$maría^I = a$

$juana^I = c$

$pedro^I = b$

$\{a\} \subseteq \{a, b, c\}, \{b\} \subseteq \{a, b, c\}, \{a\} \sqcap \{b\} \sqsubseteq \perp$

I es un modelo de \mathcal{K} , por lo que \mathcal{K} es consistente.

Semántica - Ejemplos

$I = (\Delta^I, \cdot^I)$ es un **modelo** de $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$ si:

- $C^I \subseteq D^I$ para todo $C \sqsubseteq D$ en \mathcal{T}
- $a^I \in C^I$ para todo $C(a)$ en \mathcal{A}
- $\langle a^I, b^I \rangle \in R^I$ para todo $R(a, b)$ en \mathcal{A}
- $a^I = b^I$ para todo $a = b$ en \mathcal{A}
- $a^I \neq b^I$ para todo $a \neq b$ en \mathcal{A}

\mathcal{K} es consistente si existe I modelo de \mathcal{K}

$\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$:

$\mathcal{T} = \{Madre \sqsubseteq Persona, Padre \sqsubseteq Persona, Padre \sqcap Madre \sqsubseteq \perp\}$

$\mathcal{A} = \{Persona(maría), Persona(juana), Persona(pedro), Madre(maría), Padre(pedro)\}$

$I = (\Delta^I, \cdot^I)$

$\Delta^I = \{a, b, c\}$

$Persona^I = \{a, b\}$

$Madre^I = \{a\}$

$Padre^I = \{a\}$

$maría^I = a$

$juana^I = b$

$pedro^I = a$

Semántica - Ejemplos

$I = (\Delta^I, \cdot^I)$ es un **modelo** de $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$ si:

- $C^I \subseteq D^I$ para todo $C \sqsubseteq D$ en \mathcal{T}
- $a^I \in C^I$ para todo $C(a)$ en \mathcal{A}
- $\langle a^I, b^I \rangle \in R^I$ para todo $R(a, b)$ en \mathcal{A}
- $a^I = b^I$ para todo $a = b$ en \mathcal{A}
- $a^I \neq b^I$ para todo $a \neq b$ en \mathcal{A}

\mathcal{K} es consistente si existe I modelo de \mathcal{K}

$\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$:

$\mathcal{T} = \{Madre \sqsubseteq Persona, Padre \sqsubseteq Persona, Padre \sqcap Madre \sqsubseteq \perp\}$

$\mathcal{A} = \{Persona(maría), Persona(juana), Persona(pedro), Madre(maría), Padre(pedro)\}$

$I = (\Delta^I, \cdot^I)$

$\Delta^I = \{a, b, c\}$

$Persona^I = \{a, b\}$

$Madre^I = \{a\}$

$Padre^I = \{a\}$

$maría^I = a$

$juana^I = b$

$pedro^I = a$

$\{a\} \subseteq \{a, b\}, \{a\} \subseteq \{a, b\}$, pero $\{a\} \sqcap \{a\} \sqsubseteq \perp$ no es verdadero.

I no es un modelo de \mathcal{K} , pero \mathcal{K} es consistente porque existen interpretaciones que son modelos de \mathcal{K}

Semántica - Ejemplos

$\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ es un **modelo** de $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$ si:

- $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$ para todo $C \sqsubseteq D$ en \mathcal{T}
- $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$ para todo $C(a)$ en \mathcal{A}
- $\langle a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}} \rangle \in R^{\mathcal{I}}$ para todo $R(a, b)$ en \mathcal{A}
- $a^{\mathcal{I}} = b^{\mathcal{I}}$ para todo $a = b$ en \mathcal{A}
- $a^{\mathcal{I}} \neq b^{\mathcal{I}}$ para todo $a \neq b$ en \mathcal{A}

\mathcal{K} es consistente si existe \mathcal{I} modelo de \mathcal{K}

$\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$:

$\mathcal{T} = \{Madre \sqsubseteq Persona, Padre \sqsubseteq Persona, Padre \sqcap Madre \sqsubseteq \perp\}$

$\mathcal{A} = \{Persona(maría), Persona(juana), Persona(pedro), Madre(maria), Padre(maria)\}$

Es consistente?

Semántica - Ejemplos

$I = (\Delta^I, \cdot^I)$ es un **modelo** de $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$ si:

- $C^I \subseteq D^I$ para todo $C \sqsubseteq D$ en \mathcal{T}
- $a^I \in C^I$ para todo $C(a)$ en \mathcal{A}
- $\langle a^I, b^I \rangle \in R^I$ para todo $R(a, b)$ en \mathcal{A}
- $a^I = b^I$ para todo $a = b$ en \mathcal{A}
- $a^I \neq b^I$ para todo $a \neq b$ en \mathcal{A}

\mathcal{K} es consistente si existe I modelo de \mathcal{K}

$\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$:

$\mathcal{T} = \{Madre \sqsubseteq Persona, Padre \sqsubseteq Persona, Padre \sqcap Madre \sqsubseteq \perp\}$

$\mathcal{A} = \{Persona(maría), Persona(juana), Persona(pedro), Madre(maria), Padre(maria)\}$

Cualquiera sea la interpretación I de \mathcal{K} , no satisface el axioma $Padre \sqcap Madre \sqsubseteq \perp$

Por los axiomas $Madre(maria)$, $Padre(maria)$, $Madre^I$ y $Padre^I$ deben tener al menos un elemento de Δ^I en común, que es $maria^I$.

\mathcal{K} es inconsistente ya que no existe ninguna interpretación que sea un modelo de \mathcal{K}

Mundo abierto y mundo cerrado

La semántica de lógica descriptiva adhiere al paradigma de

mundo abierto

**No se puede derivar que una afirmación es falsa,
porque no pueda demostrarse que es verdadera.**

Mundo abierto y mundo cerrado

$\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$.

$\mathcal{T} = \{ \text{Madre} \sqsubseteq \text{Persona}, \text{Madre} \sqsubseteq \exists \text{tieneHijo}.\text{Persona} \}$

$\mathcal{A} = \{ \text{Persona}(\text{maría}), \text{Persona}(\text{juana}), \text{Madre}(\text{maria}) \}$

\mathcal{K} es consistente?

Mundo abierto y mundo cerrado

$$\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle.$$

$$\mathcal{T} = \{ \text{Madre} \sqsubseteq \text{Persona}, \text{Madre} \sqsubseteq \exists \text{tieneHijo}.\text{Persona} \}$$

$$\mathcal{A} = \{ \text{Persona}(\text{maría}), \text{Persona}(\text{juana}), \text{Madre}(\text{maria}) \}$$

Posible modelo de \mathcal{K} :

$$I = (\Delta^I, \cdot^I)$$

$$\Delta^I = \{a, b, c\}$$

$$\text{Persona}^I = \{a, b, c\}$$

$$\text{Madre}^I = \{a\}$$

$$\text{tieneHijo}^I = \{ \langle a, c \rangle \}$$

$$\text{maria}^I = a$$

$$\text{juana}^I = b$$

Mundo abierto y mundo cerrado

La semántica de lógica descriptiva adhiere al paradigma de

mundo abierto

No se puede derivar que una afirmación es falsa,
porque no pueda demostrarse que es verdadera.

**El paradigma de mundo abierto es coherente con el hecho de que
la información en la Web está incompleta.**

Bibliografía

Franz Baader, Ian Horrocks, Ulrike Sattler: Description Logics. Handbook on Ontologies 2004: 3-28

Capítulo 2 Description Logics Handbook: Theory, Implementation, and Applications. Editores Franz Baader and Diego Calvanese and Deborah L. McGuinness and Daniele Nardi and Peter F. Patel-Schneider. 2003.

Pascal Hitzler, Markus Krötzsch, Sebastian Rudolph: Foundations of Semantic Web Technologies, Chapman & Hall/CRC, 2009.

Instalar: <http://protege.stanford.edu/>