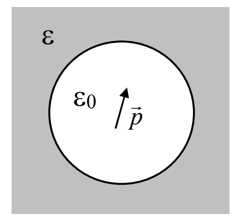
ELECTROMAGNETISMO
PRÁCTICO 3
ELECTROSTÁTICA III
CONDICIONES DE BORDE, ENERGÍA ELECTROSTÁTICA Y CAPACITORES.

Problema Nº 1

Un dipolo eléctrico puntual $\vec{p}$ se encuentra en el centro de una cavidad esférica vacía de radio R, inmersa en un material dieléctrico lineal de permitividad ε(ver figura). Calcule:



a) el potencial eléctrico en todo el espacio.

b) la densidad de carga superficial inducida.

c) la carga total inducida.

Sugerencia: Considere soluciones para los potenciales en la cavidad y en el dieléctrico incluyendo términos hasta $n = 1$ en la solución general: $\phi(r,\theta) = (A + Br^{-1}) + (Cr + Dr^{-2})cos\theta$, con constantes a determinar para cada región.

Problema Nº 2

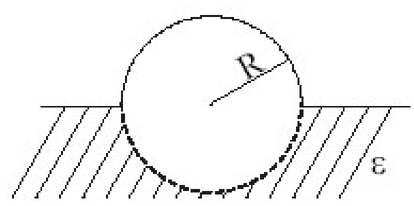
Se deposita una densidad superficial de carga $\sigma = \sigma_0 sen(5\theta)$ sobre la superficie de un cascarón cilíndrico infinito de radio R que se encuentra aislado.

a) Calcule el potencial eléctrico en todo el espacio.

b) Calcule el potencial eléctrico en todo el espacio si ahora se coloca al cilindro en un campo eléctrico uniforme (perpendicular al eje del cilindro y en la dirección de $\theta = 0$).

Problema Nº 3

Una esfera conductora de radio R flota, sumergida hasta la mitad, en un medio dieléctrico líquido de permitividad $\varepsilon = K\varepsilon_0$. Se puede suponer que la región por encima del dieléctrico está vacía. Si la esfera tiene una carga neta Q, hallar el campo eléctrico y las densidades de carga libre, de polarización y total sobre la superficie de la esfera.



Sugerencia: Buscar un campo radial adecuado que satisfaga todas las condiciones de borde. ¿Es un método válido?

Problema Nº 4

Dos medios dieléctricos de permitividades ε_1 y ε_2 están separados por una interfase plana sin carga libre. Halle la relación entre θ_1 y θ_2, siendo éstos los ángulos que forma el vector desplazamiento eléctrico con la normal a la interfase en cada uno de los medios.

Problema Nº 5

a) Calcule la energía electrostática de una esfera conductora de radio R y carga total Q colocada en el vacío.

b) Demuestre que el resultado anterior puede hallarse como la energía almacenada por un condensador esférico, donde uno de los electrodos es la esfera conductora y el otro electrodo es una esfera cuyo radio tiende a infinito.

Problema Nº 6

Considere una carga puntual q ubicada en el centro de un cascarón conductor esférico descargado de radio interno a y radio externo b. ¿Cuál es la diferencia entre la energía electrostática de este sistema y la de una carga q en el vacío?

Problema Nº 7

a) Halle la densidad volumétrica de energía electrostática en el interior de un cable coaxial, en que la diferencia de potencial entre el conductor interior y el exterior es V_0.

b) Halle, por integración directa del resultado de la parte anterior, la energía electrostática total almacenada en un trozo de cable coaxial de largo L.

c) Halle, utilizando el resultado de la parte anterior, la capacidad por unidad de longitud del cable coaxial.

Problema Nº 8

a) Considere dos superficies esféricas conductoras concéntricas de radios R_1 y R_2, sometidas a los potenciales ϕ_1 y ϕ_2. Calcule, por integración directa de la densidad volumétrica de energía electrostática, la energía total de este capacitor y verifique que se cumple: $U = C(\phi_2 - \phi_1)^2/2$

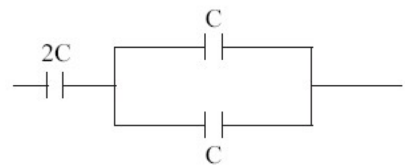
b) Dadas tres superficies esféricas conductoras concéntricas de radios R_1, R_2 y R_3:

i. Halle la capacidad del sistema si la superficie interior y exterior se encuentran conectadas por un alambre conductor suficientemente fino como para no alterar al sistema.

ii. Verifique que dicha capacidad puede calcularse como el paralelo de dos condensadores como los de la parte a).

Problema Nº 9

a) Halle la capacidad equivalente del sistema de la figura. Si se aplica una diferencia de potencial E al sistema total, determine las cargas que quedarán almacenadas en cada condensador y las tensiones respectivas.

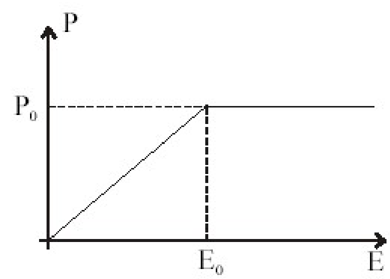


b) Se carga un condensador de capacidad C_1 hasta que queda sometido a una tensión E entre sus placas. Luego se desconecta la fuente externa de potencial y se conecta otro condensador, de capacidad C_2, inicialmente descargado, en paralelo con el anterior. Halle la tensión y la energía final del sistema compuesto por C_1y C_2; compárelas con las iniciales.

Problema Nº 10

Se tiene un material dieléctrico cuya polarización es colineal con el campo eléctrico y su módulo varía según el gráfico de la figura. Con él se rellena un condensador de placas esféricas concéntricas de radios a y $2a$.

a) Calcule la diferencia de potencial V_0 máxima que se puede aplicar sin sacar el material de la zona lineal.



b) Se aplica una diferencia de potencial:

$$V = \frac{P_0}{\varepsilon_0} a > V_0$$

Calcule:

i. El campo eléctrico en todo el material.

ii. La distancia a la cual ocurre la transición entre el comportamiento lineal y el no lineal.

iii. Las densidades de carga de polarización.

RESULTADOS

P1) a)
$$\phi_1(r,\theta)=\left[\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\frac{2(\varepsilon_0-\varepsilon)}{2\varepsilon+\varepsilon_0}r+\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\right]\cos\theta$$
$$\phi_2(r,\theta)=\frac{p}{4\pi}\frac{3}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\cos\theta$$

P2) a)
$$\phi_1(r,\theta)=\left(\frac{\sigma_0 r^5}{10R^4\varepsilon_0}\right)sen(5\theta)$$
$$\phi_2(r,\theta)=\left(\frac{\sigma_0 R^6}{10\varepsilon_0 r^5}\right)sen(5\theta)$$
, b)
$$\phi_1(r,\theta)=-E_0 r\cos\theta+\left(\frac{\sigma_0 r^5}{\varepsilon_0 10R^4}\right)sen(5\theta)$$
$$\phi_2(r,\theta)=-E_0 r\cos\theta+\left(\frac{\sigma_0 R^6}{\varepsilon_0 10r^5}\right)sen(5\theta)$$

P3) a)
$$\vec{D}(r,\theta)=\begin{cases}\dfrac{Q}{(1+k)2\pi}\dfrac{1}{r^2}\hat{e}_r & |\theta|<\dfrac{\pi}{2}\\[2ex] \dfrac{kQ}{(1+k)2\pi}\dfrac{1}{r^2}\hat{e}_r & |\theta|>\dfrac{\pi}{2}\end{cases},\quad \vec{E}(r,\theta)=\frac{Q}{(1+k)2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{e}_r$$
$$\sigma_L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{Q}{(1+k)2\pi}\dfrac{1}{R^2} & |\theta|<\dfrac{\pi}{2}\\[2ex] \dfrac{kQ}{(1+k)2\pi}\dfrac{1}{R^2} & |\theta|>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\quad \sigma_P(\theta)=\frac{(1-k)Q}{(1+k)2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\quad |\theta|>\frac{\pi}{2}$$

P4) $\varepsilon_2\tan\theta_1=\varepsilon_1\tan\theta_2$

P5) a) $U=\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

P6) $U_{sist}-U_q=\dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)$

P7)a) $u(r)=\dfrac{\varepsilon_0 V_0^2}{2\left[\mathrm{Ln}(R_2/R_1)\right]^2}\dfrac{1}{r^2}$ **, b)** $U=\dfrac{\pi\varepsilon_0 V_0^2 L}{\mathrm{Ln}(R_2/R_1)}$, **c)** $\dfrac{C}{L}=\dfrac{2U}{V_0^2 L}=\dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\mathrm{Ln}(R_2/R_1)}$

P8) a) $U=2\pi\varepsilon_0\dfrac{R_1 R_2}{R_2-R_1}V_0^2$ ($V_0=\phi_2-\phi_1$) **b) i)** $C=4\pi\varepsilon_0\dfrac{R_2^2(R_3-R_1)}{(R_2-R_1)(R_3-R_2)}$

P10) a) $V_{0Max}=\dfrac{aE_0}{2}$