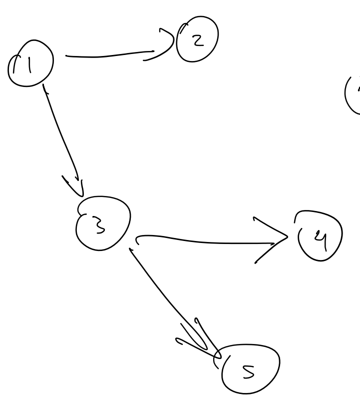
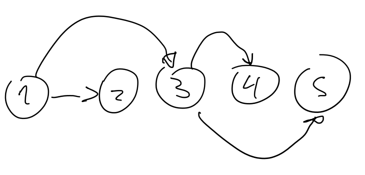
Notas ejercicio No Alcanzables

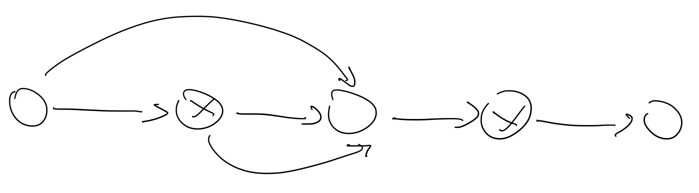
jueves, 26 de agosto de 2021 07:59

Ejemplo de instancia:

Respuesta: no existe







Algoritmo:

1) Construir un orden topológico $v_1 v_2 \dots v_n$ para G.

2) Si para todo i, $1 \leq i < n$, existe una arista (v_i, v_{i+1}) en G, responder que no existe vértices u, v como los buscados.

3) En caso contrario, devolver $u = v_i$, $v = v_{i+1}$, donde v_i y v_{i+1} son tales que no existe la arista $(v_i, v_{i+1}) \in G$.

Parte b

Como G es un DAG, sabemos que existe un orden topológico como se pide en el paso 1.

Consideremos el caso en que se responde que no existe vertices u, v, como los buscados, en el paso 2.

Sean $u, v \in V$ arbitrarios. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que u aparece antes que v en el O.T., es decir

$u = v_i$, $v = v_j$, $1 \leq i < j \leq n$

para cierto i.

Por la condición verificada en el paso 2, sabemos que

$v_i v_{i+1} \dots v_j$ es un camino

en G y por lo tanto v es alcanzable desde u.

Como u y v son arbitrarios concluimos que para todo par de vértices se cumple que uno es alcanzable a partir del otro y en consecuencia no existe vértices como los buscados.

Supongamos ahora que se devuelve un par (v_i, v_{i+1}) que no es una arista en el paso 3.

(*) Ningún camino que parte de un vértice v_j puede alcanzar un vértice v_k con $k < j$, porque los índices de los vértices visitados debe ser creciente, por la def. de O.T..

En particular, (*) implica que no existe camino de v_{i+1} a v_i.

Por otra parte, como no existe la arista (v_i, v_{i+1}), todo camino que parte de v_i es de la forma

$v_i v_r \dots v_\ell$,

donde $r > i+1$, y sabemos que $v_r \dots v_\ell$ no puede alcanzar v_{i+1} (también por *). Por lo tanto, para $u = v_i$, $v = v_{i+1}$ se cumple que ninguno es alcanzable a partir del otro.

Parte C

- El paso 1 requiere tiempo $O(n+m)$ usando el algoritmo de Kahn.

- El paso 2 implica recorrer las listas de adyacencia de no más de $n-1$ vértices, lo cual requiere tiempo $O(n+m)$

- El paso 3 se resuelve en realidad junto con el paso 2. En el momento en que para cierto i no se encuentra a v_{i+1} en la lista de adyacencia de v_i, se devuelve inmediatamente (v_i, v_{i+1}) en tiempo $O(1)$

- En total tenemos una cantidad finita de pasos, cada uno de los cuales requiere tiempo $O(n+m)$, por lo cual el tiempo total es $O(n+m)$.