Sistemas y control

Hoja de ejercicios N° 2

Clase 1

Hoja 2. Ejercicio 1.a

1) El amplificador operacional del circuito de la **figura 1a** es semi-ideal, es decir:

- Impedancia de entrada infinita.
- Impedancia de salida nula.
- Ganancia en tensión finita **A.**

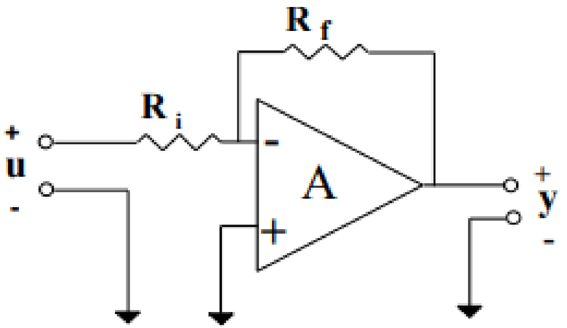


Figura 1a

a) Demostrar que la ganancia en tensión del sistema realimentado es:

$$G = \frac{y}{u} = -A\frac{R_f}{R_i} \cdot \frac{1}{\frac{R_f}{R_i} + A + 1}$$

Hoja 2. Ejercicio 1.a

- La impedancia de entrada de A es infinita

$$\frac{u^+ - e^-}{R_i} = \frac{e^- - y^+}{R_f}$$

- La ganancia de A es finita

$$A.e^- = y^+$$

- Operando

$$\frac{u^+ - \frac{y^+}{A}}{R_i} = \frac{\frac{y^+}{A} - y^+}{R_f}$$

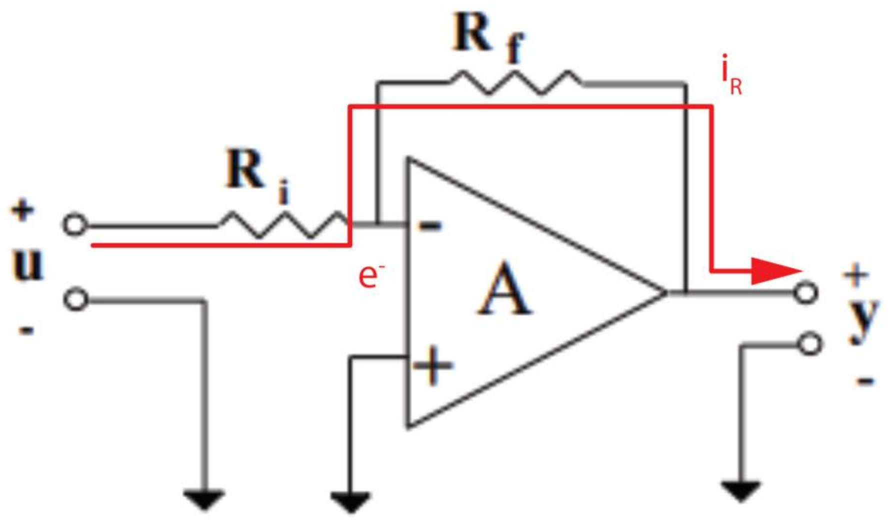


Figura 1a

Hoja 2. Ejercicio 1.a

- Operando un poco más

$$\frac{u}{y} = -A.\frac{R_f}{R_i}.\frac{1}{1 + A + R_f/R_i}$$

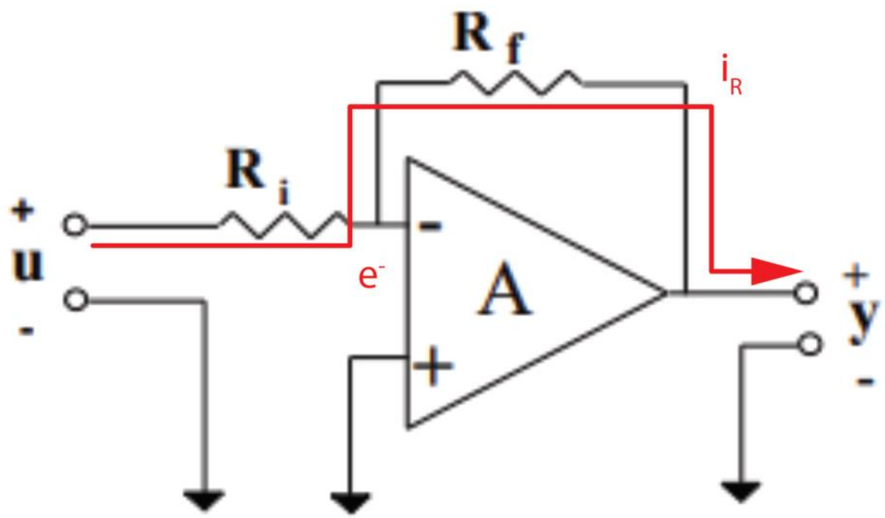


Figura 1a

Hoja 2. Ejercicio 1.b

b) Para estudiar el mecanismo de la realimentación se puede descomponer el circuito en dos partes cuyos diagramas de bloques se indican (**figuras 1b y 1c**). Aplíquese el resultado de la parte c) del problema 1 de la hoja 1, para obtener la ganancia del sistema realimentado. Verificar que el resultado coincide con el de la parte a).

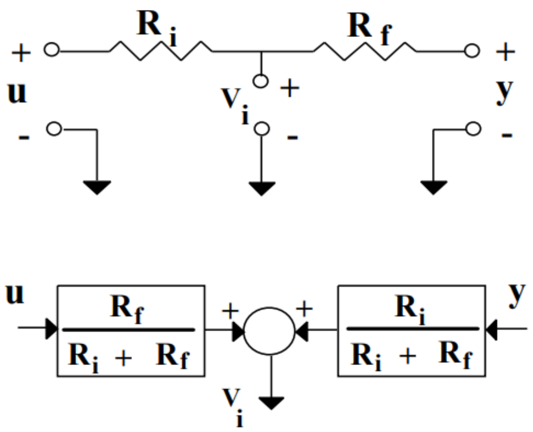


Figura 1b

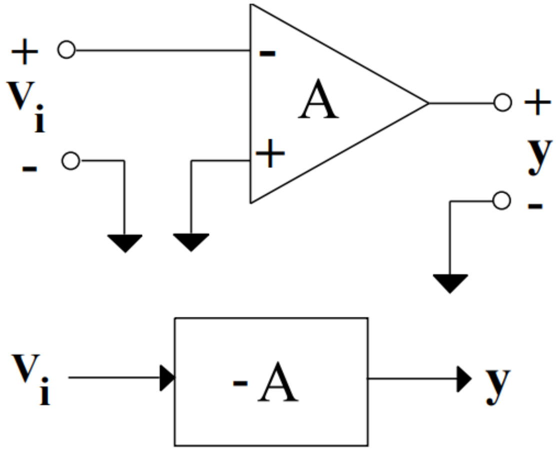
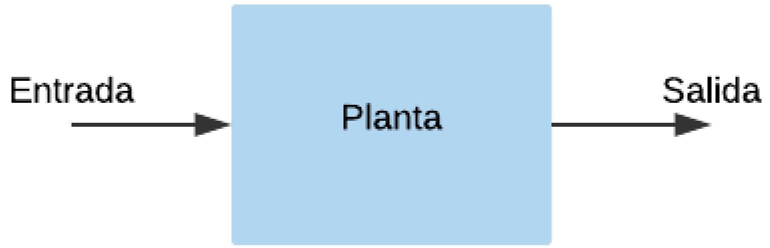


Figura 1c

Concepto de realimentación

- Intrínsecamente relacionado a los conceptos de entrada, salida y planta
  - Entrada: Puede ser modificada
  - Salida: Tiene ciertas características deseables
  - Planta: No puede ser modificada, relaciona la entrada con la salida
- Problema de control

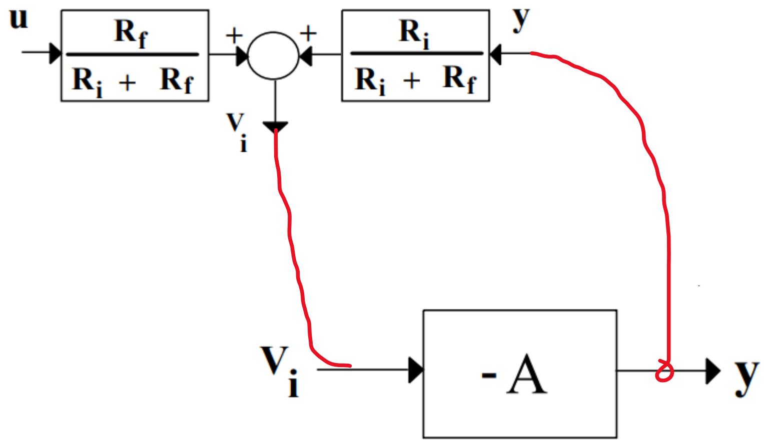
"Dada una planta, seleccionar la entrada para que la salida tenga ciertas características"



Concepto de realimentación

- Existen dos maneras de resolver el problema planteado
  - Seleccionar una función de entrada $u_{[t_0,\infty)}$ que, al ser transformada por la Planta, genere la función de salida deseada, $y_{[t_0,\infty)}$
    - Muy sencilla, pero (lamentablemente) no funciona bien
  - Generar una estructura que *fabrique* la entrada en función de los valores que adquiere la salida

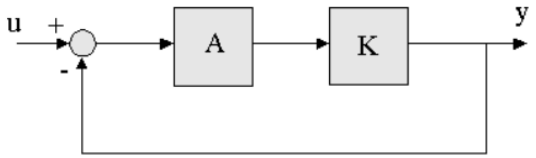
Hoja 2. Ejercicio 1.b



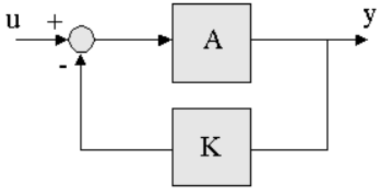
Hoja 1. Ejercicio 1

1) Calcule la transferencia **G** entre la señal de entrada **U** y la de salida **Y**, de los siguientes sistemas, donde **A**, **H** y **K** representan las funciones de transferencia de los bloques componentes:

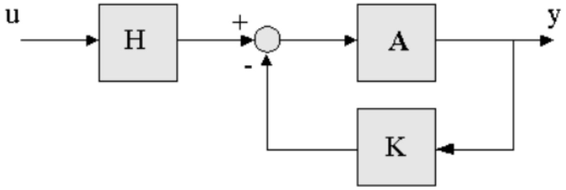
a)



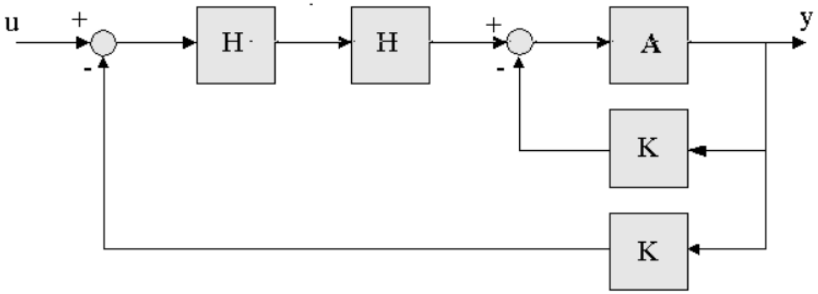
b)



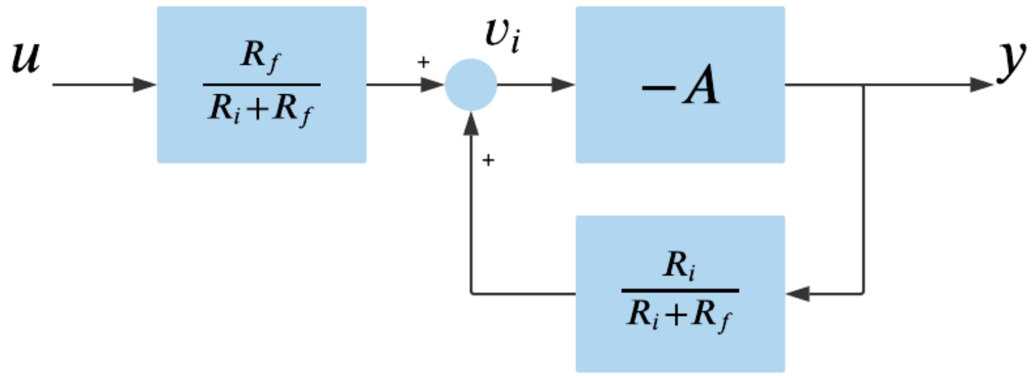
c)



d)



Hoja 2. Ejercicio 1.b

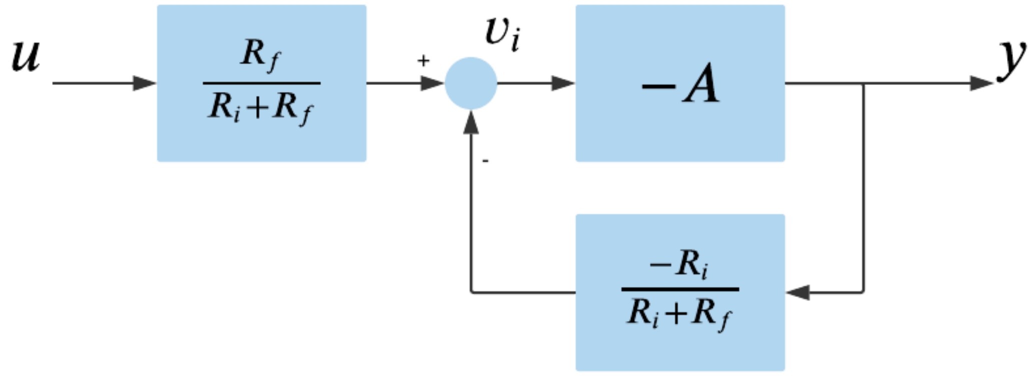


Hoja 2. Ejercicio 1.b

- Tomando la estructura de 1c)

$$y = \frac{A}{1+AK} Hu$$

$$y = \frac{-A}{\dfrac{-A}{1+\dfrac{R_f}{R_i}+A}\dfrac{R_f}{R_i}} \frac{R_f}{R_i+R_f} u$$



Hoja 2. Ejercicio 1.b

$$y = \frac{-A}{R_i + R_f + A.R_i} R_f u$$

$$y = \frac{-A}{1 + \frac{R_f}{R_i} + A} \frac{R_f}{R_i} u$$

Hoja 2. Ejercicio 1.c

c) Calcular la sensibilidad de **G** con respecto a **A**, $\mathbf{G_a}$, si se cumple que **A** >> **Rf / Ri** >> **1**.
¿Qué diferencias se encuentran en la ganancia y en la sensibilidad a cambios en **A** con y sin la realimentación?

Que es la sensibilidad?

- Para entender el concepto de sensibilidad, debemos tomar en consideración que los sistemas de control representan sistemas reales
  - Los elementos físicos cambian sus propiedades con el tiempo, la temperatura, la humedad, etc.
  - Un buen sistema de control debe ser insensible a la variación de sus parámetros, pero sensible a la variación de su entrada

Que es la sensibilidad?

- Para entender el concepto de sensibilidad, debemos tomar en consideración que los sistemas de control representan sistemas reales
  - Los elementos físicos cambian sus propiedades con el tiempo, la temperatura, la humedad, etc.
  - Un buen sistema de control debe ser insensible a la variación de sus parámetros, pero sensible a la variación de su entrada
  - Como medida de esta performance, se define la sensibilidad
    - ¿Cuánto cambia G (porcentual/por unidad) frente a un cambio de A (porcentual/por unidad)?

$$S_A^G = \frac{\delta G}{\delta A} . \frac{A}{G}$$

Hoja 2. Ejercicio 1.c

$$S_A^G = \frac{\delta\left(\dfrac{-A}{1+\dfrac{R_f}{R_i}+A}\dfrac{R_f}{R_i}\right)}{\delta A} \cdot \frac{A}{\dfrac{-A}{1+\dfrac{R_f}{R_i}+A}\dfrac{R_f}{R_i}}$$

$$S_A^G = \frac{-R_f}{R_i} \cdot \frac{-\left(1+\dfrac{R_f}{R_i}+A\right)+A}{\left(1+\dfrac{R_f}{R_i}+A\right)^2} \cdot \frac{R_i}{R_f}\left(1+\frac{R_f}{R_i}+A\right)$$

Hoja 2. Ejercicio 1.c

$$S_A^G = -\frac{\cancel{R_f}}{\cancel{R_i}} . \frac{-\left(1 + \frac{R_f}{R_i} + A\right) + A}{\left(1 + \frac{R_f}{R_i} + A\right)^{2}} . \frac{\cancel{R_i}}{\cancel{R_f}} \cancel{\left(1 + \frac{R_f}{R_i} + A\right)}$$

$$S_A^G = \frac{\left(1 + \frac{R_f}{R_i} + A\right) - A}{\left(1 + \frac{R_f}{R_i} + A\right)} = \frac{1 + \frac{R_f}{R_i}}{\left(1 + \frac{R_f}{R_i} + A\right)}$$

Hoja 2. Ejercicio 1.c

- Si $A \gg \frac{R_f}{R_i} \gg 1$, entonces
  - $S_A^G \cong \frac{R_i}{AR_f}$
  - $G = \frac{-A}{1+\frac{R_f}{R_i}+A}\frac{R_f}{R_i} \cong -A\frac{R_f}{R_i}$

Hoja 2. Ejercicio 1.d,e

- Sustituyendo los valores numéricos

$$G = -99, S_A^G = 0{,}01$$

- Si

$$A \in [12000\,, 8000]$$

$$G \in [-99.165\,, -98.753]$$

d) Calcule **G** y $\mathbf{G_a}$ para los valores numéricos:

Ri = 1 kΩ
Rf = 100 kΩ
A = 10000

e) Calcule la variación de **G** si **A** varía en un 20 %

Hoja 2. Ejercicio 2.a

2) Se considera el circuito de la **figura 2a**. Se supone que para el tipo de señales manejadas, y con **U(t)** acotado entre 1 V y Vcc, se puede representar al transistor por su modelo híbrido (**fig 2b**).

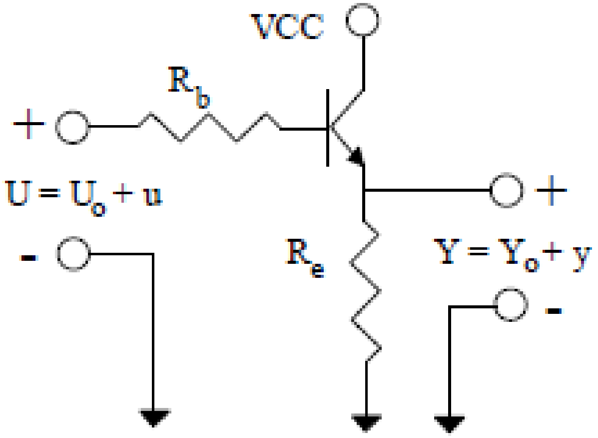


Figura 2a

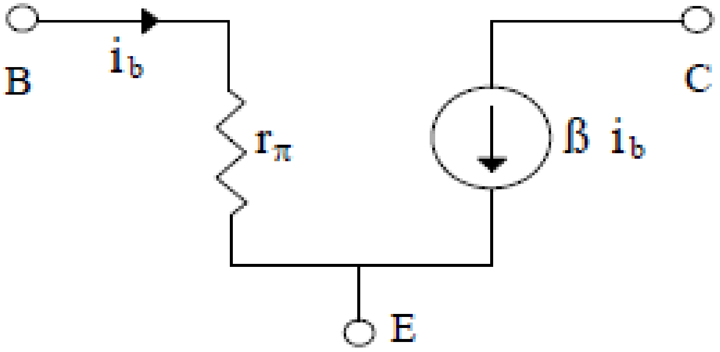


Figura 2b

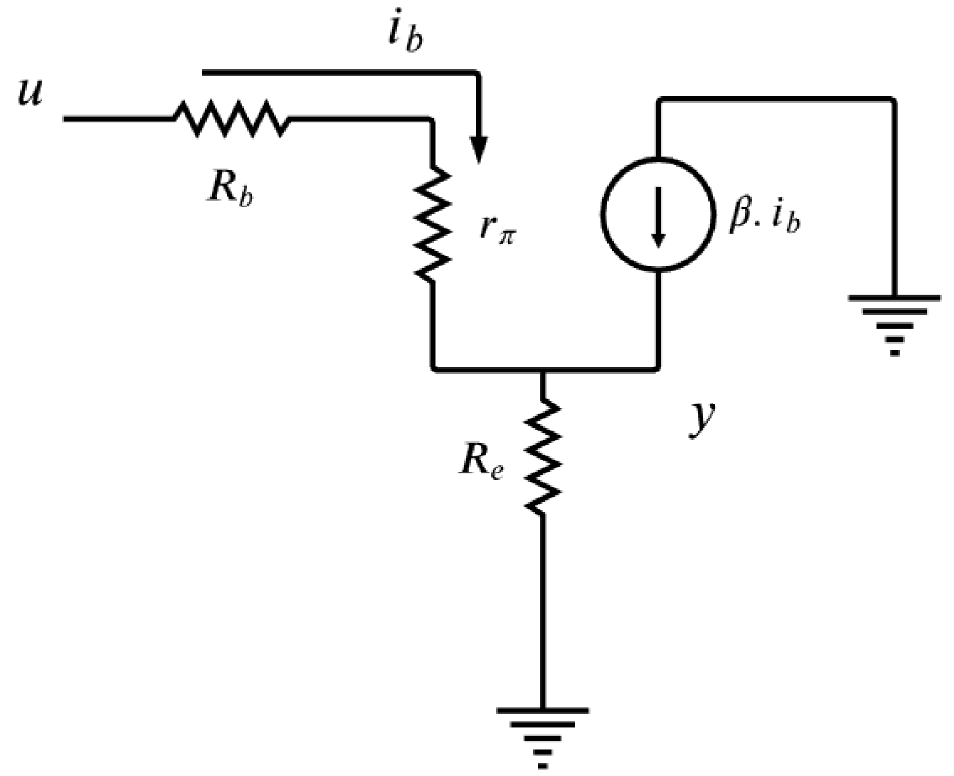
a) Calcule la ganancia del sistema **G = y/u**.

Hoja 2. Ejercicio 2.a

- Utilizando el modelo de pequeña señal del transistor obtenemos el diagrama de la derecha
- Aplicando ley de nodos

$$i_b + i_c = i_e$$

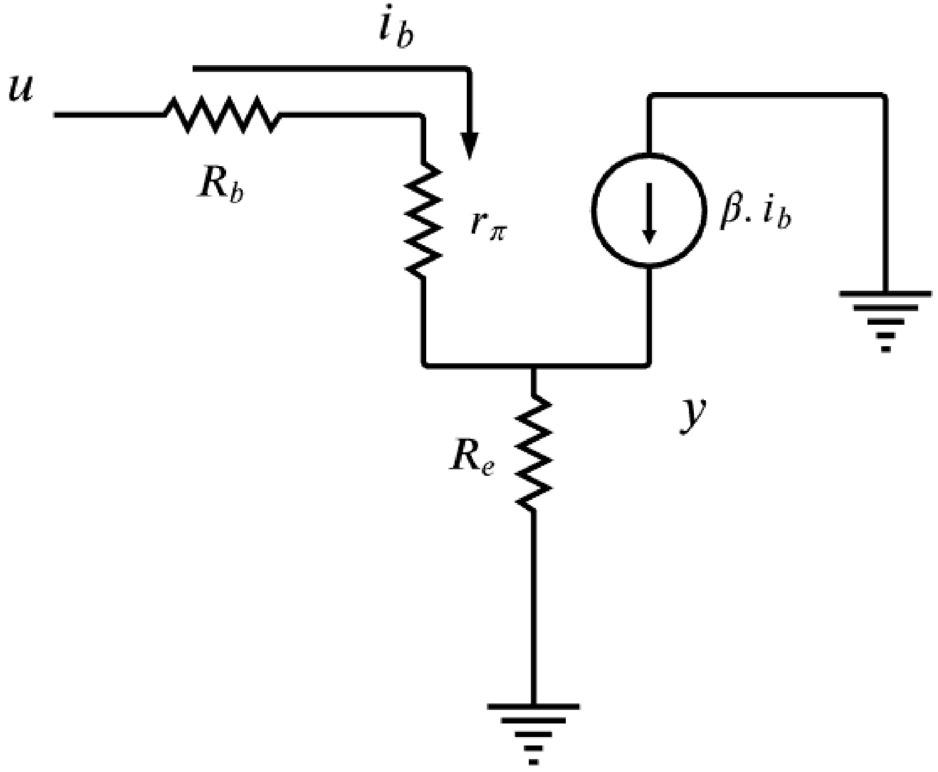
$$\frac{u-y}{R_b+r_\pi} + \beta\left(\frac{u-y}{R_b+r_\pi}\right) = \frac{y}{R_e}$$



Hoja 2. Ejercicio 2.a

- Operando llegamos a que

$$\frac{y}{u} = \frac{R_e(1+\beta)}{(1+\beta)R_e + R_b + r_\pi}$$



Hoja 2. Ejercicio 2.b

b) Represente el sistema mediante un diagrama de bloques como el de la **figura 2c** calculando α.

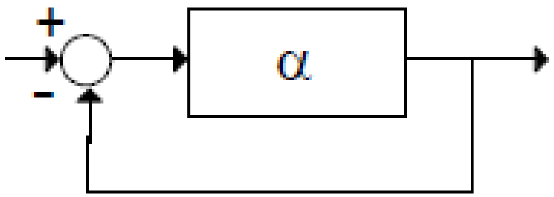
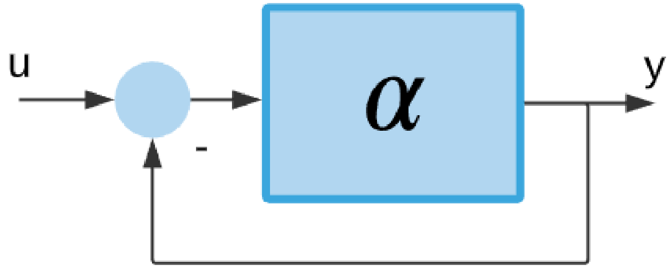


Figura 2c

Hoja 2. Ejercicio 2.b

- Según lo visto en el ejercicio anterior, sabemos que

$$G_{CL} = \frac{y}{u} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

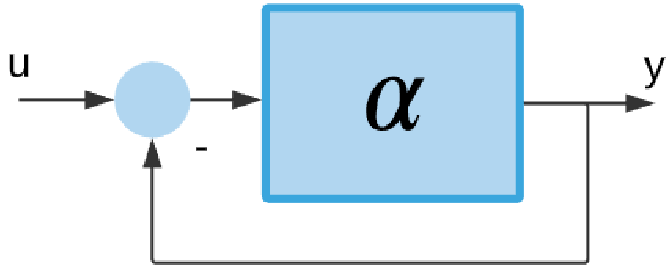


- En los ejercicios anteriores calculamos G_{CL} en función de α. Cómo podemos hacer el proceso inverso?

Hoja 2. Ejercicio 2.b

- Según lo visto en el ejercicio anterior, sabemos que

$$G_{CL} = \frac{y}{u} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

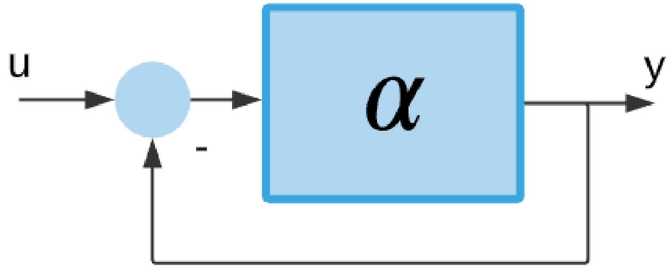


- En los ejercicios anteriores calculamos G_{CL} en función de α. Cómo podemos hacer el proceso inverso?
  - Exactamente de la misma manera!

Hoja 2. Ejercicio 2.b

$$\frac{R_e(1+\beta)}{(1+\beta)R_e+R_b+r_\pi}=\frac{\alpha}{1+\alpha}$$

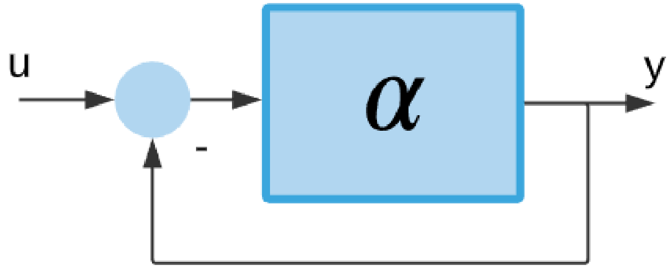
$$\frac{R_e(1+\beta)}{(1+\beta)R_e+R_b+r_\pi}(1+\alpha)=\alpha$$



$$\frac{R_e(1+\beta)}{(1+\beta)R_e+R_b+r_\pi}=\alpha\left(1-\frac{R_e(1+\beta)}{(1+\beta)R_e+R_b+r_\pi}\right)$$

Hoja 2. Ejercicio 2.b

$$\alpha = \frac{\dfrac{R_e(1+\beta)}{(1+\beta)R_e + R_b + r_\pi}}{1 - \dfrac{R_e(1+\beta)}{(1+\beta)R_e + R_b + r_\pi}}$$

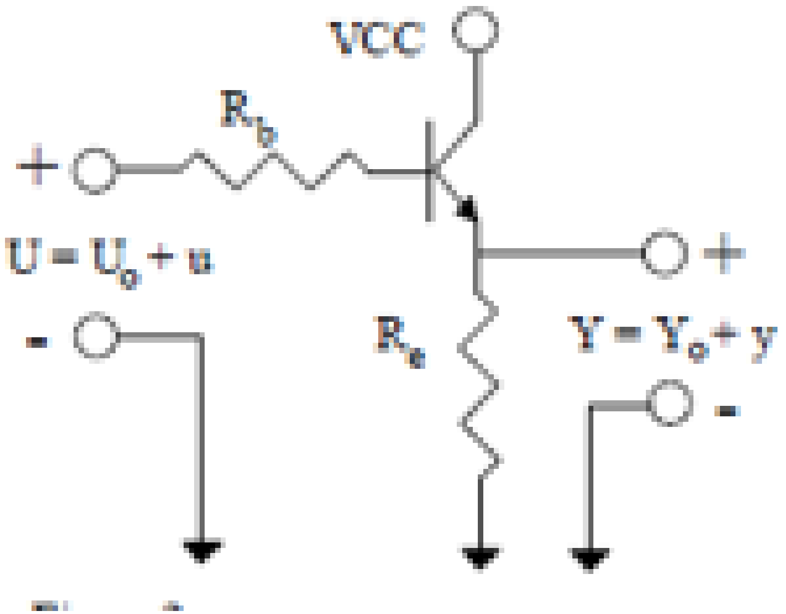


$$\alpha = \frac{\cancel{(1+\beta)R_e + R_b + r_\pi}}{R_b + r_\pi} \cdot \frac{R_e(1+\beta)}{\cancel{(1+\beta)R_e + R_b + r_\pi}}$$

$$\alpha = \frac{R_e(1+\beta)}{R_b + r_\pi}$$

Hoja 2. Ejercicio 2.b

- Este ejercicio tiene una diferencia fundamental con el anterior: la realimentación no es evidente
  - Dónde se da la realimentación?
  - Para responderlo, repasemos el concepto de entrada y salida que desarrollamos anteriormente



Hoja 2. Ejercicio 2.c,d

c) Calcule la sensibilidad de **G** respecto a cambios en **ß** (posiblemente debidos a variaciones de temperatura) y de **Re** (posiblemente debidas a cargas acopladas en la salida).

d) Si **(ß+1) Re / (r_π + Rb) >> 1**, ¿se obtiene alguna ventaja de este circuito realimentado? (Considerar variaciones posibles de **ß**, **Re** y **r_π**).

Hoja 2. Ejercicio 2.c,d

- $S_{\beta}^{G} = \frac{\delta G}{\delta \beta} . \frac{\beta}{G}$
- $S_{R_E}^{G} = \frac{\delta G}{\delta R_E} . \frac{R_E}{G}$

Operando, llegamos a que

- $S_{\beta}^{G} = \frac{\beta}{1+\beta} \frac{R_B + r_\pi}{(1+\beta)R_E + R_B + r_\pi}$
- $S_{R_E}^{G} = \frac{\delta G}{\delta R_E} . \frac{R_E}{G} = \frac{R_E + R_B + r_\pi}{(1+\beta)R_E + R_B + r_\pi}$

Hoja 2. Ejercicio 2.c,d

Aplicando $(1+\beta)R_E >> R_B + r_\pi$

- $S_\beta^G \cong \frac{\beta}{(1+\beta)^2}\frac{R_B+r_\pi}{R_E}$
- $S_{R_E}^G \cong \frac{\delta G}{\delta R_E}.\frac{R_E}{G} = \frac{R_E+R_B+r_\pi}{(1+\beta)R_E}$

Qué podemos concluir?

- Dónde se da la realimentación?
- Que significa realmente$(\beta+1)R_e >> r_\pi + R_b$