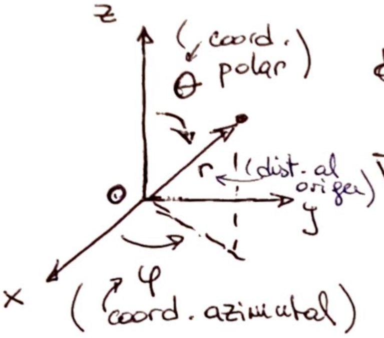
(ver Cap 3 Reitz)

Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas: (r, θ, φ)

(r,θ,φ) determinan un punto en el espacio



$\phi = \phi(r,\theta,\varphi)$ ← potencial electrostático

$\nabla^2 \phi = 0$ laplaciano en coords. esféricas

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

Obs: en los casos en que tenemos simetría de revolución en torno al eje $\hat{z}$, el potencial ϕ resulta independiente del ángulo azimutal φ $\Rightarrow$ $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$ en la expresión anterior.
(Después vemos un ejemplo de ésto: esfera conductora en $\vec{E}$ unif.)

Entonces la ec. de Laplace en coords. esféricas, cuando hay simetría de revolución en torno al eje $\hat{z}$, se reduce a:

$$(I)\quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) = 0 \qquad \text{con } \phi = \phi(r,\theta)$$

Intentaremos buscar una solución a la ecuación (I) por medio de la técnica de separación de variables. Una combinación lineal de esas soluciones L.I. será solución general y si imponemos que se verifiquen las condiciones de frontera del problema particular, tendremos la solución correcta (teorema de unicidad de la solución de la ec. de Laplace)

$\phi(r,\theta) = R(r)\,P(\theta)$ ← separación de variables

sustituyendo en la ec. (I) resulta:

$$\frac{1}{r^2} P(\theta) \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR(r)}{dr}\right) + R(r)\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) = 0$$

Obs: las derivadas parciales pasan a ser totales ya que R y P son funciones de 1 sola variable.

Dividiendo entre $\phi(r,\theta) = R(r)P(\theta)$ a ambos lados y separando los términos en r de un lado de la igualdad y los términos en θ del otro lado llegamos a:

$$\text{(i)} \quad \underbrace{\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}_{\text{esta expresión sólo depende de } r} = \underbrace{-\frac{1}{P(\theta)\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right)}_{\text{esta expresión sólo depende de } \theta} = k \quad \text{(ii)}$$

$\| \; k$

Obs: la única forma en que una función de r (sólo r) y una función de θ (sólo θ) sean iguales entre sí $\forall r$ y $\forall\theta$ es que c/u de ellas sea igual a la misma constante k (cte. de separación)

* Vamos a asumir que $k = n(n+1)$ con n entero positivo ($n=0,1,2,\ldots$) y que las posibles soluciones de (ii) son de la forma $P_n(\cos\theta)$ (llamadas polinomios de Legendre) y que las posibles soluciones de (i) son de la forma $R_n(r) = Ar^n + \frac{B_n}{r^{(n+1)}}$ (la deducción detallada para llegar a ésto se escapa del alcance del curso)

n	$P_n(\cos\theta)$	
0	1	$\leftarrow P_0(\cos\theta)$
1	$\cos\theta$	$\leftarrow P_1(\cos\theta)$
2	$\frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$	$\leftarrow P_2(\cos\theta)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

La solución general, para el laplaciano en coords. esféricas cuando tenemos simetría azimutal es una combinación lineal de las soluciones separables:

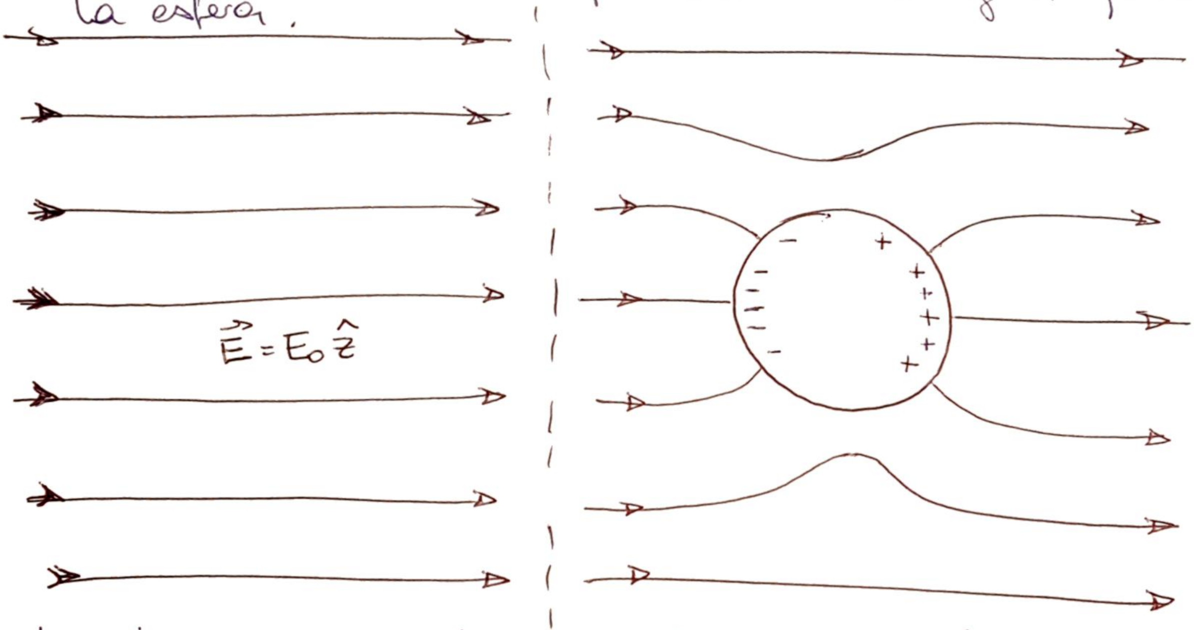
$$\boxed{\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r)P_n(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n r^n + \frac{B_n}{r^{(n+1)}}\right]P_n(\cos\theta)} \quad \text{(II)}$$

$$= A_0 + \frac{B_0}{r} + A_1 r\cos\theta + \frac{B_1}{r^2}\cos\theta + \ldots$$

Obs: los valores de los coeficientes A_n y B_n (con $n=0,1,2,\ldots$) se deben determinar de modo que $\phi(r,\theta)$ verifique las condiciones de frontera del problema particular a resolver.

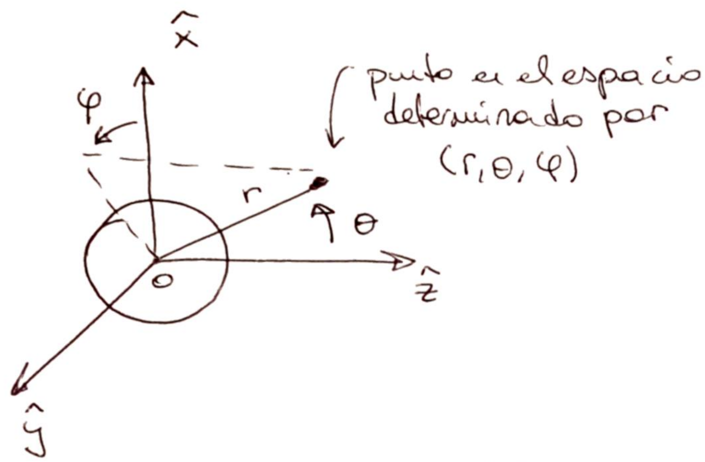
Ejemplo: Esfera conductora en un campo eléctrico uniforme

Consideremos una esfera conductora de radio a que es colocada en una región con un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = E_0\,\hat{z}$. Queremos determinar el potencial en la región fuera de la esfera.



antes de colocar la esfera las líneas de campo uniforme son paralelas

al colocar la esfera, el campo externo atrae cargas positivas hacia un hemisferio de la esfera, dejando el otro hemisferio cargado negativamente. Esa carga inducida, a su vez, distorciona las líneas de campo en la vecindad de la esfera. En particular, la esfera conductora es una equipotencial por lo que las líneas de campo deben ser perpendiculares a la superficie de la esfera.



Elegimos $\hat{z}$ en la dirección y sentido del campo externo y el origen de coordenadas en el centro de la esfera. Entonces vemos que la configuración de carga tiene simetría de revolución en torno al eje $\hat{z}$ y por lo tanto el potencial eléctrico será independiente del ángulo azimutal φ.

Podemos entonces aplicar, en la región externa a la esfera que nos interesa, que la solución a la ecuación de Laplace tendrá la forma:

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n r^n + \frac{B_n}{r^{(n+1)}} \right] P_n(\cos\theta) \quad (1) \text{, para } r \geq a$$

donde debemos ~~de~~ determinar el valor de los coeficientes A_n y B_n imponiendo que se verifiquen ciertas condiciones en la frontera de la región de interés.

Condición de borde en el infinito

muy lejos de donde está la esfera, el campo eléctrico sigue teniendo el valor del campo externo:

$$\vec{E}(r,\theta)\Big|_{r\to\infty} = E_0 \hat{z}$$

$$\Rightarrow \phi(r,\theta)\Big|_{r\to\infty} = -E_0 \underbrace{z}_{r\cos\theta} + \overset{\text{cte}}{C} = -E_0 r\cos\theta + C \quad (2)$$

En (1) vemos que en el límite $r \to \infty$, los términos de la forma $\frac{B_n}{r^{(n+1)}} P_n(\cos\theta)$ se van a cero, por lo que no podemos sacar de aquí ninguna condición sobre los B_n.

En cambio sí podemos sacar conclusiones sobre los A_n.

Igualando (2) a (1) en el límite $r \to \infty$ tenemos:

$$-E_0 r\cos\theta + C = A_0 + A_1 r \underbrace{\cos\theta}_{=P_1(\cos\theta)} + A_2 r^2 P_2(\cos\theta) + \dots$$

Igualando término a término vemos que:

$$\boxed{A_0 = C}$$

$$\boxed{A_1 = -E_0}$$

$$\boxed{A_n = 0} \quad \forall n \geq 2$$

Condición de borde sobre la esfera

Para $r=a$ el potencial es constante ya que la esfera conductora es una equipotencial

$$\phi(a,\theta) = \phi_0 = cte \quad \forall\theta \qquad (3)$$

y usando los valores de los A_n ya determinados

Igualando (3) a (1) en ~~...~~ $r=a$ tenemos:

$$\phi_0 = A_0 + \frac{B_0}{a} + A_1 a\cos\theta + \frac{B_1}{a^2}\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\underbrace{A_n}_{=0 \text{ para } n\geq 2} r^n + \frac{B_n}{r^{(n+1)}}\right]P_n(\cos\theta)$$

término a término:

$$\phi_0 = \underbrace{A_0}_{=C} + \frac{B_0}{a} \rightarrow B_0 = a(\phi_0 - C) \; (*)$$

$$\underbrace{A_1}_{=-E_0} a + \frac{B_1}{a^2} = 0 \rightarrow \boxed{B_1 = E_0 a^3}$$

$$\boxed{0 = B_n} \quad n \geq 2$$

(*) Podemos además imponer aquí que $\boxed{B_0 = 0}$ ya que el término de la forma $\frac{B_0}{r}$ correspondería a $\frac{Q_{esf}}{4\pi\varepsilon_0 r}$ siendo Q_{esf} la carga neta de la esfera, que sabemos es cero.
Alternativamente, ~~también~~ podemos arrastrarlo y una vez hallado $\sigma(\theta)$ en la superficie de la esfera, hallar la carga total integrando y luego imponer que $Q_{esf} = 0$ y vamos a llegar a $B_0 = 0$ ~~también~~ también.

Como $B_0 = 0 \Rightarrow \boxed{C = \phi_0}$

Por lo que (1) resulta:

$$\boxed{\phi(r,\theta) = \phi_0 - E_0 r\cos\theta + E_0 \frac{a^3}{r^2}\cos\theta}$$

- ϕ_0: valor del potencial en la superficie de la esfera (podríamos elegirlo cero, no es dato)
- $-E_0 r\cos\theta$: contribución debida al campo externo
- $E_0 \frac{a^3}{r^2}\cos\theta$: contribución debida a la carga inducida en la superficie de la esfera

Obs: Para terminar, podemos hallar la densidad de carga sobre la superficie. Sabemos que en la superficie de un conductor $\vec{E}\big|_{r=a} \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$\underbrace{-\nabla\phi\big|_{r=a} \cdot \hat{e}_r}_{= -\frac{\partial\phi}{\partial r}\big|_{r=a}} = \frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\sigma(\theta) = -\varepsilon_0 \frac{\partial\phi}{\partial r}\bigg|_{r=a}}$$

$$\sigma(\theta) = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial \phi}{\partial r}\right|_{r=a}$$

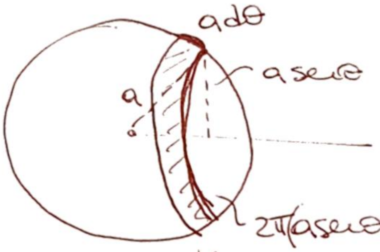
$$= -\varepsilon_0 \left[-E_0 \cos\theta + E_0 \cancel{a}^3 \cos\theta \left(\frac{-2}{\cancel{a^3}} \right) \right]$$

$$\boxed{\sigma(\theta) = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta}$$

→ vemos que el hemisferio entre 0 y $\pi/2$ es positivo, el hemisferio para θ entre $\pi/2$ y π es negativo.
El "ecuador" ($\theta = \pi/2$) no tiene carga.

Se puede verificar que $Q_{esf} = 0$ (tal como lo impusimos al hacer $B_0 = 0$) ya que

$$Q_{esf} = \int_0^{\pi} \sigma(\theta) \underbrace{dA}_{= 2\pi a^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta}$$



$dA = 2\pi(a \operatorname{sen}\theta)(a\,d\theta)$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$= \pi a^2 \underbrace{\operatorname{sen}^2(\theta) \Big|_0^{\pi}}_{=0} = 0 \checkmark$$