Ideas para los cálculos de potencia de la Práctica 1

Una función periódica se puede descomponer en una serie de Fourier.
La serie de Fourier se puede escribir en forma equivalente de diferentes maneras:

- Como suma de senos y cosenos
- Como suma de sólo senos (o cosenos) con fase
- Como suma de exponenciales complejas

Serie de Fourier

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k w_0 x) + b_k \sin(k w_0 x)$$

$$w_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{x_0}$$ frec ang fundamental

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=}^{\infty} \underbrace{f_k(x)}$$ armónico de f

$$\int_0^{x_0} f(x) \cos(m w_0 x)\, dx =$$

$$\int_0^{x_0} a_0 \cos(m w_0 x)\, dx + \int_0^{x_0} \sum a_k \cos(k w_0 x) \cos(m w_0 x)\, dx$$

$$+ \int_0^{x_0} \sum b_k \sin(k w_0 x) \cos(m w_0 x)\, dx$$

$$= \begin{cases} a_0 x_0 & \text{si } m = 0 \quad \Rightarrow a_0 = \frac{1}{x_0}\int_0^{x_0} f(x)\, dx \\ \frac{a_k}{2} x_0 & \text{si } m \neq 0 \quad \Rightarrow a = \frac{2}{x_0}\int_0^{x_0} f(x)\cos(k w_0 x)\, dx \end{cases}$$

Otro tanto multiplicando por $\sin(m\omega_0 x)$

$$a_0 = \frac{1}{X_0}\int_0^{X_0} f(x)\,dx$$

$$a_k = \frac{2}{X_0}\int_0^{X_0} f(x)\cos(k\omega_0 x)\,dx$$

$$b_k = \frac{2}{X_0}\int_0^{X_0} f(x)\sin(k\omega_0 x)\,dx$$

Forma "con fase"

$$r\cos(A+\phi) = p\cos(A) + q\,\text{sen}(A)$$

$$\cos(A+\phi) = \frac{p}{r}\cos(A) + \frac{q}{r}\sin(A)$$

$$\cos(A+\phi) = \cos\phi\cos(A) - \sin\phi\sin(A)$$

$$\frac{p}{r} = \cos\phi \qquad \frac{q}{r} = -\sin\phi \qquad \text{tg}\,\phi = -\frac{q}{p}$$

$$\cos^2\phi + \sin^2\phi = \frac{p^2}{r^2} + \frac{q^2}{r^2} = 1$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{p^2+q^2} \qquad \phi = \text{arctg}\left(-\frac{q}{p}\right)$$

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos(k\omega_0 x + \phi_k)$$

$$A_0 = a_0 \qquad A_k = \sqrt{a_k^2+b_k^2} \qquad \phi_k = \text{arctg}\left(-\frac{b_k}{a_k}\right)$$

Forma compleja

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right)$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

$$f_k(x) = a_k \cos(k\omega_0 x) + b_k \sin(k\omega_0 x)$$

$$= \frac{a_k}{2}\left(e^{jk\omega_0 x} + e^{-jk\omega_0 x}\right) + \frac{b_k}{2j}\left(e^{jk\omega_0 x} - e^{-jk\omega_0 x}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{(a_k - jb_k)}{2}}_{C_k} e^{jk\omega_0 x} + \underbrace{\frac{(a_k + jb_k)}{2}}_{C_{-k}} e^{-jk\omega_0 x} \qquad k > 0$$

$$C_0 = a_0$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 x}$$

$$C_{-k} = C_k^{*}$$

Los términos en k positivo y negativo son complejos conjugados $\Rightarrow$ reconstruimos señal real

$$C_k = \frac{1}{X_0}\int_0^{X_0} f(x)\, e^{-jk\omega_0 x}\, dx$$

En resumen:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[a_k \cos(k\omega_0 x) + b_k \sin(k\omega_0 x)\right] \qquad \text{I}$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 x + \phi_k) \qquad \text{II}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 x} \qquad \text{III}$$

$$A_0 = a_0 \qquad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \phi_k = \operatorname{atan}\left(-\frac{b_k}{a_k}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} C_k &= \frac{a_k - j b_k}{2} \\ C_{-k} &= \frac{a_k + j b_k}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{con } k > 0, \quad C_0 = a_0$$

En la norma están expresadas las funciones de voltaje y tensión como:

$$v = v_1 + v_H \text{ and } i = i_1 + i_H$$

$$v_1 = \sqrt{2}V_1 \sin(\omega t - \alpha_1)$$

$$i_1 = \sqrt{2}I_1 \sin(\omega t - \beta_1)$$

$$v_H = V_0 + \sqrt{2}\sum_{h\neq 1} V_h \sin(h\omega t - \alpha_h)$$

$$i_H = I_0 + \sqrt{2}\sum_{h\neq 1} I_h \sin(h\omega t - \beta_h)$$

Están expresadas en la forma II de suma de sinusoides con fase donde por ejemplo en el voltaje los A_k serían:
$A_0 = V_0$, $A_k = \sqrt{2}V_k$ para k>=1

Los V_k son los valores RMS de cada uno de los armónicos de la señal v.

O sea, si se hallan los coeficientes de la serie se tienen los valores los necesarios para obtener todos los valores de distorsión armónica y de potencia.

En nuestro caso tenemos N muestras de la señal periódica durante un número entero de períodos. Podemos hallar los coeficientes a través de la DFT o su versión rápida la FFT.

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-\frac{i2\pi}{N}kn}$$

Como nuestras N muestras son reales, la transformada es un array de N complejos con dos mitades “espejadas” donde las elementos simétricos tienen mismo módulo y argumento opuesto (son complejos conjugados).
Se pueden obtener los C_k a partir de los X_k como: $C_k = \dfrac{X_k}{N}$ para los k correspondientes a la fundamental y sus múltiplos. Teniendo los C_k se pueden obtener las amplitudes A_k y fases ϕ_k necesarias para todas las cuentas.

En la función de cálculo de THD se usa esto. De forma similar se puede hacer para la función de cálculo de los valores de la norma.