ELECTROMAGNETISMO
PRÁCTICO 2
ELECTROSTÁTICA II
ELECTROSTÁTICA EN PRESENCIA DE MEDIOS MATERIALES. CONDICIONES DE BORDE.

Problema Nº 1

Dos placas planas infinitas paralelas y conductoras, que están separadas una distancia d, son mantenidas a una diferencia de potencial V_0. Se introduce una tercera placa, no conductora, de espesor despreciable, con una densidad superficial de carga σ_0, en un plano paralelo a las otras dos. La placa no conductora se ubica a una distancia a de la placa de mayor potencial y b de la otra, de forma que: $a + b = d$.

a) Halle el campo eléctrico en el espacio entre las placas en función de la posición.

b) Suponiendo que las placas tienen un pequeño espesor, halle las densidades de carga en las superficies internas de las placas conductoras.

c) Si ahora la tercera placa que se introduce fuese conductora con densidad de carga total σ_0, ¿qué cambia respecto al caso anterior?

Halle las densidades de carga en ambas caras de dicha placa.

Problema Nº 2

Hallar, resolviendo la ecuación de Laplace $\nabla^2\phi = 0$, el potencial electrostático en el exterior de una esfera conductora de radio R con carga total Q (en el vacío).

Problema Nº 3

a) Calcule la capacidad de un sistema formado por dos superficies esféricas conductoras concéntricas de radios R_1 y R_2.

b) Halle la capacidad por unidad de longitud de los siguientes sistemas:

i. Cable coaxial: Dos superficies cilíndricas conductoras concéntricas de radios R_1 y R_2.

ii. Cables paralelos: Dos cilindros conductores paralelos de radios R_1 y R_2 cuyos ejes están separados una distancia *d* grande respecto a R_1 y R_2.

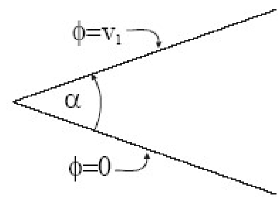
Sugerencia: Considere si se puede suponer, que el campo generado por uno de los cilindros no altera la distribución de carga del otro.

Nota: Recuerde que para el cálculo de capacidades en un sistema formado por dos conductores, ambos deben tener cargas netas iguales y opuestas.

Problema Nº 4

En la figura se muestra la sección transversal de dos placas planas conductoras infinitas que forman un ángulo α (sus bordes están separados por una distancia infinitesimal, de manera que se puede suponer que no se tocan). Una de ellas se encuentra conectada a tierra, $\phi = 0$, y la otra a un potencial fijo, V_1. Suponga que el campo eléctrico no tiene componente radial.

a) Halle la forma funcional del campo entre las placas usando la expresión diferencial de la ley de Gauss y la irrotacionalidad del mismo.

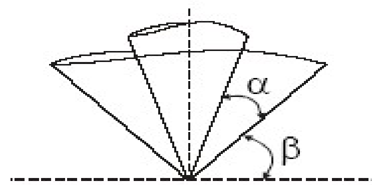


b) Halle el potencial electrostático imponiendo condiciones de borde.

c) En este problema, ¿Por qué la solución determinada a partir de la sugerencia es correcta?

d) Halle las densidades superficiales de carga sobre las placas.

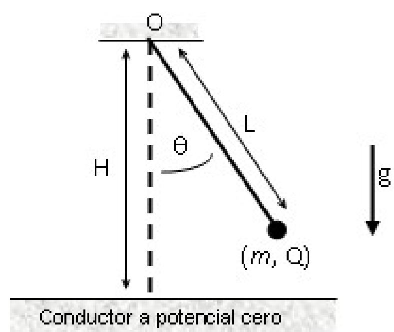
Problema Nº 5



Calcule la capacidad de un condensador cónico. Se supondrá que el campo eléctrico entre las placas es según $\hat{e}_\theta$ y que las puntas de los conos están separadas una distancia infinitesimal.

Problema Nº 6

Considere una masa puntual m que posee una carga eléctrica Q. La masa oscila (en el vacío) alrededor del punto O, a una altura $H = 2L$ sobre el nivel del piso, sujeta de un hilo sin masa de largo L. Sobre el piso se halla un plano conductor infinito conectado a potencial cero. (Nota: Suponga que el movimiento de la carga es suficientemente lento, de modo que pueda considerarse válida la condición electrostática).



a) Halle el potencial electrostático instantáneo en el espacio alrededor de la carga. (Considere que la influencia del hilo y del soporte que lo sostiene, son despreciables a los efectos de calcular el potencial electrostático).

b) Halle la frecuencia de oscilación del péndulo en la aproximación de pequeñas oscilaciones ($\theta \ll 1$). (Sugerencia: Utilice la 2da Ley de Newton)

Problema Nº 7 – Examen febrero 2005

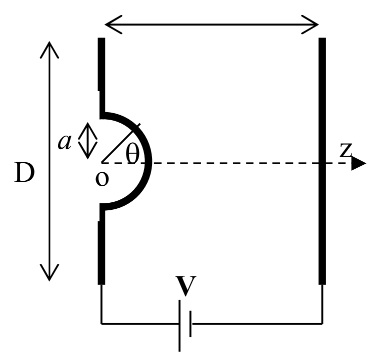
a) Halle el potencial eléctrico $\phi(r,\theta)$ en torno a una esfera conductora descargada de radio a colocada en una región del espacio donde (en ausencia de la esfera) existe un campo eléctrico constante $\vec{E}_0$ orientado en la dirección $\theta = 0$. *Sugerencia*: tenga en cuenta la solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas en problemas con simetría de revolución.

b) Calcule el campo eléctrico en todo el espacio a partir del potencial. En particular, evaluar el campo eléctrico en:

i. la superficie de la esfera.

*ii.*el plano $\theta = \pi/2$ para $r > a$.

Considere ahora un condensador que tiene una placa circular plana perpendicular al eje z de diámetro D y una segunda placa cuya superficie es paralela a la anterior a no ser por una saliente en forma de hemisferio de radio $a$centrada en el origen de coordenadas (ver figura). El condensador está cargado al potencial V, y la separación entre las placas es l.



c) Halle la densidad de carga en todos los puntos de la placa con la saliente hemisférica suponiendo que $D, l \gg a$ y despreciando efectos de borde.

Problema Nº 8

Una esfera de radio R, que tiene una carga libre q uniformemente distribuida en todo el volumen, se encuentra sumergida en un dieléctrico de permitividad $\varepsilon = k\varepsilon_0$.

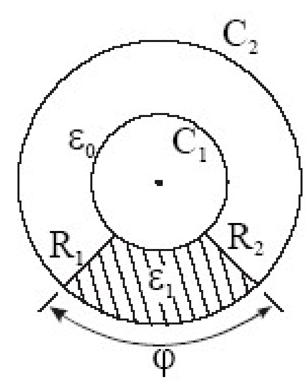
a) Halle los vectores $\vec{D}, \vec{E}$ y $\vec{P}$ en el dieléctrico.

b) Halle las densidades de carga de polarización y la carga total sobre la esfera. Determine el límite de la misma cuando R tiende a cero.

c) Compare los resultados anteriores con los que se tendrían en el vacío.

Problema Nº 9

El sistema de la figura está formado por dos cilindros conductores C_1 y C_2, coaxiales de longitud L y radios A y B respectivamente. Entre los dos cilindros se coloca un dieléctrico de permitividad ε_1 que ocupa un volumen limitado por los radios R_1 y R_2 que forman entre si un ángulo φ. El resto del espacio entre los cilindros es vacío. Calcule la capacidad del sistema, despreciando los efectos de borde.



Problema Nº 10

Considere una varilla cilíndrica de sección A, a lo largo del eje z, que se extiende desde $z = 0$ hasta $z = L$, y que tiene una polarización según su eje $\vec{P} = (az^2 + b)\hat{k}$, con ay $b$constantes.

a) ¿Qué unidades tienen a y b?

b) Halle las densidades de carga de polarización ρ_p y σ_p.

c) Demuestre explícitamente que la carga ligada total es nula.

d) *(opcional)* Halle el potencial electrostático alejado de la varilla ($r \gg a$), conservando hasta el término dipolar inclusive. Deducir el campo eléctrico en esta aproximación.

Problema Nº 11

Considere un cubo de lado L, centrado en el origen de coordenadas, con polarización $\vec{P} = B\vec{r}$, siendo B una constante.

a) ¿Qué unidades tiene B?

b) Halle las densidades de carga de polarización ρ_p y σ_p.

c) Demuestre explícitamente que la carga ligada total es nula.

d) *(opcional)* ¿Se puede hallar el potencial electrostático en puntos lejanos mediante un desarrollo multipolar conservando sólo hasta el orden dipolar (inclusive)?

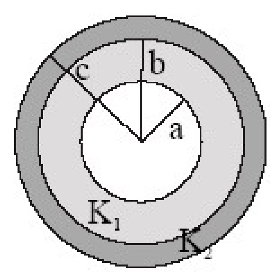
Problema Nº 12

Un cable coaxial de sección circular tiene un dieléctrico compuesto. El conductor interno tiene un radio exterior a; éste está rodeado por una cubierta de dieléctrico de constante dieléctrica K_1, y radio exterior b. A continuación hay otra cubierta de dieléctrico de constante dieléctrica K_2 y radio externo c.

a) Halle la capacidad por unidad de longitud.

b) Si el conductor externo se mantiene a un potencial $\phi = 0$ y el interno a $\phi = V_0$, calcule las polarizaciones en cada uno de los medios dieléctricos.

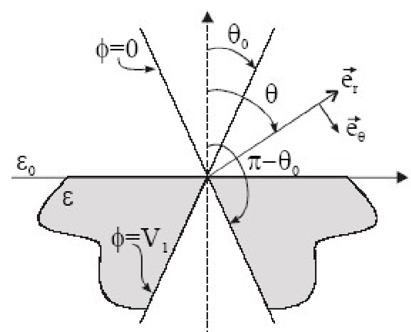
c) Halle todas las densidades de carga (ligada y libre) en cada superficie.



Problema Nº 13

Dos conos idénticos opuestos por el vértice y de eje común se encuentran a potenciales $\phi = 0$ y $\phi = V$, como se muestra en la figura. Llenando la mitad del espacio entre ellos, hay un material dieléctrico de permeabilidad ε.

a) Halle los campos $\vec{D}$, $\vec{E}$ y $\vec{P}$ en la región entre los conos.



b) Halle todas las densidades de carga.

Nota: Se supondrá que los campos están dirigidos según $\hat{e}_\theta$ como se indica en la figura.

Problema Nº 14 – Examen febrero 2007

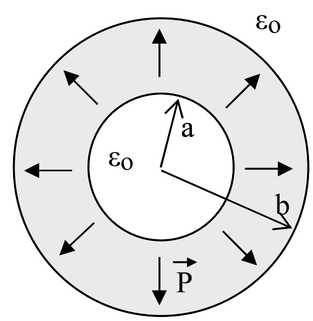
Considere un material no conductor, polarizado, con forma de esfera hueca de radio interno a y radio externo b, que posee una polarización $\vec{P} = P_0 \hat{e}_r$ (referida a un sistema de coordenadas esféricas con origen en el centro de la esfera). P_0 es una constante positiva. El hueco y el exterior se encuentran vacíos.

a) Calcule las densidades de carga de polarización en el material.

b) Calcule el campo eléctrico y el vector desplazamiento eléctrico en todos los puntos del espacio.

c) Discuta si es posible generar el mismo campo eléctrico en la región $a < r < b$, sustituyendo el material polarizado por un capacitor esférico vacío, formado por dos placas conductoras delgadas concéntricas de radios a y b.

d) Halle el potencial eléctrico en todos los puntos del espacio, suponiendo que el potencial se anula en el infinito).



Problema Nº 15

Un plano separa al espacio en dos medios dieléctricos semi-infinitos, isótropos, homogéneos y lineales con permitividades ε_1 y ε_2. En el medio 1, se coloca a una distancia$d$ una carga puntual Q_1. Probar que el potencial electrostático en los medios 1 y 2 se puede escribir como:

$$\phi_1 = \frac{A}{4\pi\varepsilon_1\sqrt{(z+d)^2 + x^2 + y^2}} + \frac{B}{4\pi\varepsilon_1\sqrt{(z-d)^2 + x^2 + y^2}},$$

$$\phi_2 = \frac{C}{4\pi\varepsilon_2\sqrt{(z+d)^2 + x^2 + y^2}}$$

Donde A, B y C son constantes que se deben determinar y z está orientada desde el medio 1 al 2, con $z = 0$ en la interfase.

RESULTADOS

Se agradece comunicar a los docentes de práctico si se detectan errores.

P1) Tomando Ox normal a las placas, orientado desde la placa de mayor potencial V_0, a la de menor potencial $V = 0$:

$$\text{a)}\begin{cases} \vec{E}_1 = \dfrac{\varepsilon_0 V_0 - b\sigma_0}{\varepsilon_0 d}\hat{\mathrm{i}} & 0 < x < a \\ \vec{E}_2 = \dfrac{\varepsilon_0 V_0 + a\sigma_0}{\varepsilon_0 d}\hat{\mathrm{i}} & a < x < d \end{cases} \qquad \text{b)}\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{\varepsilon_0 V_0 - b\sigma_0}{d} \\ \sigma_2 = -\dfrac{\varepsilon_0 V_0 + a\sigma_0}{d} \end{cases}$$

c) Si σ_L y σ_R son las densidades de carga en las caras izquierda y derecha de la placa respectivamente, $\sigma_L = \dfrac{\sigma_0 b - V_0\varepsilon_0}{d}$, $\quad \sigma_R = \dfrac{\sigma_0 a + V_0\varepsilon_0}{d}$

P2) $\varphi(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}$

P3) a) $C = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ b) i) $\dfrac{C}{L} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\mathrm{Ln}\left(R_2/R_1\right)}$ ii) $\dfrac{C}{L} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\mathrm{Ln}\left(d^2/R_1R_2\right)}$

P4) *a)* En coordenadas cilíndricas: $\vec{E} = \dfrac{1}{r}C_\theta \hat{e}_\theta$ *,b)* $\varphi(\theta) = \dfrac{V_1}{\alpha}\theta$ *, c)* $\begin{cases} \sigma_1 = -\dfrac{\varepsilon_0 V_1}{\alpha}\dfrac{1}{r} \\ \sigma_2 = \dfrac{\varepsilon_0 V_1}{\alpha}\dfrac{1}{r} \end{cases}$

P5) La capacidad por unidad de longitud es:

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\log\left(\dfrac{\tan(\theta_2/2)}{\tan(\theta_1/2)}\right)}, \text{ con } \theta_1 = \pi/2 - \alpha - \beta \text{ y } \theta_2 = \pi/2 - \beta .$$

P6) a) y está medida desde O en la dirección y sentido de g, z desde O, perpendicular y entrante al dibujo:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x - L\,\mathrm{sen}\theta)^2 + (y - L\cos\theta)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - L\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 + (y - 4L + L\cos\theta)^2 + z^2}}\right]$$

b) $U(\theta) = -\dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{2L(2-\cos\theta)} + mgL(1-\cos\theta)$

c) $\omega^2 = \dfrac{g}{L} + \dfrac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 m L^3}$

P7) a) $\varphi(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + E_0 a^3 \dfrac{\cos\theta}{r^2}$

b) $\vec{E}(r,\theta) = E_0\cos\theta\left(1+\dfrac{2a^3}{r^3}\right)\hat{e}_r + E_0\sin\theta\left(\dfrac{a^3}{r^3}-1\right)\hat{e}_\theta$

b.i) $\vec{E}(r=a,\theta) = 3E_0\cos\theta\,\hat{e}_r$, b.ii) $\vec{E}(r>a,\theta=\pi/2) = -E_0\left(1-\dfrac{a^3}{r^3}\right)\hat{e}_\theta$

c) $\begin{cases} \sigma_{P|r=a,-\pi/2<\theta<\pi/2} = 3\varepsilon_0 \dfrac{V}{l}\cos\theta \\ \sigma_{P|r>a,\theta=\pm\pi/2} = \varepsilon_0 \dfrac{V}{l}\left(1-\dfrac{a^3}{r^3}\right) \end{cases}$

P8) a) $\vec{D} = \dfrac{q}{4\pi}\dfrac{1}{r^2}\hat{e}_r \quad \vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon}\dfrac{1}{r^2}\hat{e}_r \quad \vec{P} = \dfrac{K-1}{K}\dfrac{q}{4\pi}\dfrac{1}{r^2}\hat{e}_r$

b) $\rho_p = 0 \quad \sigma_p\big|_R = -\dfrac{K-1}{K}\dfrac{q}{4\pi R^2} \quad Q = \dfrac{q}{K} \quad \lim\limits_{R\to 0} Q = \dfrac{q}{K}$

P9) $\dfrac{C}{L} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 + (\varepsilon-\varepsilon_0)\varphi}{\mathrm{Ln}(B/A)}$

P10)a) $[a] = C/m^4$, $[b] = C/m^2$ b) $\rho_P = -2az$, $\begin{cases} \sigma_P(z=0) = -b \\ \sigma_P(z=L) = aL^2 + b \end{cases}$

d) $\varphi(r,\theta) = \dfrac{AL(b+aL^2/3)}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\cos\theta}{r^2}$, $\vec{E}(r,\theta) = \dfrac{AL(b+aL^2/3)}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{2\cos\theta}{r^3}\hat{e}_r + \dfrac{\sin\theta}{r^3}\hat{e}_\theta\right)$

P11)a) $[B] = C/m^3$ b) $\rho_P = -3B$, $\sigma_P = BL/2$ en las seis caras del cubo

d) No; tanto el término monopolar como el término dipolar son cero. Se deberían considerar los términos de órdenes superiores.

P12) a) $\dfrac{C}{L} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 K_1 K_2}{K_2\mathrm{Ln}(b/a) + K_1\mathrm{Ln}(c/b)}$ b) $\vec{P}_1 = \dfrac{\varepsilon_0(K_1-1)K_2V_0}{K_2\mathrm{Ln}(b/a)+K_1\mathrm{Ln}(c/b)}\dfrac{1}{r}\hat{e}_r$, $\vec{P}_2 = \dfrac{\varepsilon_0(K_2-1)K_1V_0}{K_2\mathrm{Ln}(b/a)+K_1\mathrm{Ln}(c/b)}\dfrac{1}{r}\hat{e}_r$

c)

$$\rho_p^1 = \rho_p^2 = 0 \qquad \sigma_p\Big|_a = -\frac{\varepsilon_0 (K_1 - 1) K_2 V_0}{K_2 \mathrm{Ln}(b/a) + K_1 \mathrm{Ln}(c/b)} \frac{1}{a}$$

$$\sigma_p\Big|_b = \frac{\varepsilon_0 (K_1 - K_2) V_0}{K_2 \mathrm{Ln}(b/a) + K_1 \mathrm{Ln}(c/b)} \frac{1}{b} \qquad \sigma_p\Big|_c = \frac{\varepsilon_0 (K_2 - 1) K_1 V_0}{K_2 \mathrm{Ln}(b/a) + K_1 \mathrm{Ln}(c/b)} \frac{1}{c}$$

P13)a)

$$\vec{D}_1 = \frac{K}{K+1} \frac{\varepsilon_0 V_1}{\mathrm{Ln}(\tan(\theta_0/2))} \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta} \hat{e}_\theta \qquad \vec{D}_2 = \frac{1}{K+1} \frac{\varepsilon V_1}{\mathrm{Ln}(\tan(\theta_0/2))} \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta} \hat{e}_\theta$$

$$\vec{E}_1 = \frac{K}{K+1} \frac{V_1}{\mathrm{Ln}(\tan(\theta_0/2))} \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta} \hat{e}_\theta \qquad \vec{E}_1 = \frac{1}{K+1} \frac{V_1}{\mathrm{Ln}(\tan(\theta_0/2))} \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta} \hat{e}_\theta$$

$$\vec{P}_1 = 0 \qquad \vec{P}_2 = \frac{K-1}{K+1} \frac{\varepsilon_0 V_1}{\mathrm{Ln}(\tan(\theta_0/2))} \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta} \hat{e}_\theta$$

b)

$$\rho_p = 0 \quad \sigma(\theta_0) = \frac{K}{K+1} \frac{\varepsilon_0 V_1}{\ln(\tan(\theta_0/2))} \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta_0} \qquad \sigma_p(\pi/2) = -\frac{K-1}{K+1} \frac{\varepsilon_0 V_1}{\ln(\tan(\theta_0/2))} \frac{1}{r}$$

$$\sigma(\pi - \theta_0) = -\frac{1}{K+1} \frac{\varepsilon\ V_1}{\ln(\tan(\theta_0/2))} \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta_0} \qquad \sigma_p(\pi - \theta_0) = \frac{K-1}{K+1} \frac{\varepsilon_0 V_1}{\ln(\tan(\theta_0/2))} \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta_0}$$

P14) a) $\rho_P(r) = -\frac{2P_0}{r}$, $\begin{cases} \sigma_{P|r=a} = -P_0 \\ \sigma_{P|r=b} = P_0 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 0 < r < a \text{ y } b < r : \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{D} = \vec{0} \\ a < r < b : \vec{E} = -\frac{P_0}{\varepsilon_0} \hat{e}_r, \vec{D} = \vec{0} \end{cases}$

c) Para un capacitor esférico con carga Q en la placa $r = a, E = Q\hat{e}_r/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$. Este campo es proporcional a $1/r^2$, entonces este sistema no puede generar el campo constante hallado en la parte anterior en el espacio de material polarizado.

Nota: la solución completa se encuentra en la sección 'Parciales y Exámenes' de la página del curso.

P15) $A = Q_1$, $B = Q_1 \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)$, $C = Q_1 \left(\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)$.