

# Ejercicio resuelto: variante GS

jueves, 5 de agosto de 2021 08:00

$P_1$ : Una vez que  $w \in W$  está en pareja, nunca deja de estarlo, y sus parejas solo pueden mejorar.

$P_2$ : A lo largo de una ejecución del alg., nadie está en pareja con más de una persona.

Ind: Inicialmente se cumple (Paso 2).  
Ningún paso del alg. hace que  $P_2$  deje de cumplirse si se cumple hasta ese momento

## Parte a:

Si existe  $m \in M$  libre, como  $|M| = |W|$ ,  $P_2$  implica que existe  $w \in W$  libre.  $P_1$  además implica que tal  $w$  nunca recibió una propuesta.

## Parte b:

Como  $m$  está libre, por la parte a, existe  $w'$  libre.

Sea  $j$  la posición de  $w'$  en la lista de pref. de  $m$ .

En cada iteración del ciclo del Paso 5 pueden pasar dos cosas:

- 1)  $m$  se pone en pareja en el paso 8 o en el 12, en cuyo caso el ciclo termina.
- 2)  $w$  rechaza a  $m$ , en cuyo caso la variable  $i$  es incrementada.

Como  $i$  se inicializa en 1 en el paso 4 y nunca se decrementa, a lo sumo en  $j$  iteraciones el ciclo se termina, porque para  $i = j$  tenemos  $w = w'$ , que está libre, y por lo tanto se ejecuta el paso 8.

## Parte c

$P_3$ : Sea  $m \in M$  elegido en una ejecución del Paso 4 y sea  $w$  su pareja al final de la ejecución del ciclo del Paso 5 que le sigue inmediatamente después. La propuesta de  $m$  a  $w$  nunca habrá sido realizada antes durante la ejecución del algoritmo.

Dem: Si  $m$  ya se hubiera propuesto a  $w$  antes, entonces  $w$  (por  $P_1$ ) no está libre al momento de iniciarse la ejecución del ciclo del Paso 5.

Por lo tanto la pareja  $(m, w)$  se forma en el Paso 12.

Pero como  $m$  sí está libre,  $w$  debe haberlo rechazado en favor de otro  $m' \in M$  con anterioridad, ya sea en la propuesta original o en un reemplazo posterior.

En cualquier caso, por  $P_1$ ,  $w$  prefiere a su actual pareja antes que a  $m$ , lo cual contradice la condición del Paso 11 necesaria para que se ejecute el Paso 12.

Esto es absurdo, por lo cual  $P_3$  se cumple.

Como en cada iteración del ciclo del Paso 3 se realiza una propuesta que nunca había sido realizada antes (por  $P_3$ ) y no hay más de  $n^2$  posibles propuestas distintas, a algún momento el algoritmo se detiene.

## Parte d

Hay que probar:

- es un emparejamiento (por  $P_2$ )
- es perfecto, porque termino cuando no existe  $m \in M$  libre, y eso implica, por  $P_2$ , que no hay  $w \in W$  libre
- no hay inestabilidades:

Sea  $m \in M$  arbitrario y sea  $w$  su pareja.

En la ejecución del ciclo del Paso 5 en la cual se formó  $(m, w)$ , todas las  $w' \in W$  a las que  $m$  prefiere antes que a  $w$  lo rechazaron en favor de otro al que prefiere.

Por lo tanto, por  $P_1$ , todas estas  $w'$  prefieren a sus parejas definitivas antes que a  $m$ .

Entonces  $m$  no puede participar en ninguna inestabilidad.