Notas sobre funciones generatrices
Material para el curso de Matemática Discreta 1

Setiembre 2020

Estas notas sobre funciones generatrices fueron elaboradas con el fin de justificar un poco mejor algunas identidades y manipulaciones algebraicas que son utilizadas al trabajar con funciones generatrices consideradas como serie formales de potencia. Usualmente en el curso de Matemática Discreta 1 utilizamos las secciones 9.1 y 9.2 del libro de Grimaldi como referencia que tiene como ventaja la cantidad de ejemplos resueltos que ayudan al lector a ganar cierta intuición sobre el tema (recomiendo ver esos ejemplos para complementar estas notas). Sin embargo en reiteradas ocasiones se realizan manipulaciones y se utilizan identidades sin justificar rigurosamente, esto tiene el inconveniente de que no queda claro que cosas son lícitas de hacer y que no y puede inducir al estudiante a realizar manipulaciones incorrectas y llegar a resultados falsos. Ya desde el comienzo se consideran expresiones de la forma $f(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} x)^4$ o identidades del tipo $(\sum_{n=0}^{\infty} x^n)(1-x) = 1$ sin definir formalmente que significa elevar una función generatriz a una potencia o multiplicar dos funciones generatrices. Esto podría llevar a alguien a malinterpretar igualdades de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (*) pensando que significa que tanto $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ como $\frac{1}{1-x}$ están definidas para los mismos valores de x y para esos valores coinciden lo cuál es erroneo. De hecho veremos que existen funciones generatrices que convergen para los mismos valores de x y para esos valores coinciden, sin embargo son diferentes como funciones generatrices ya que lo que las definen son sus coeficientes (ese es el significado del adjetivo "formal" cuando definimos funciones generatrices como serie formales de potencia), o sea no deben ser consideradas como funciones de x. Luego se derivan de ambos lados identidades como (*) sin mencionar que la derivación es formal y que para la derivación formal valen las reglas clásicas usuales de cálculo. Por ejemplo, la función generatriz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2^n} x^n$ no es derivable en ningún punto como función pero eso no impide que la podamos derivar formalmente, sin embargo al utilizar las propiedades de la derivada aqui no podemos realizar las mismas justificaciones que en cálculo. Antes de utilizar desarrollo de Taylor para probar identidades como $(1+x)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} x^n$ con $m \in \mathbb{Z}^+$ se debería en primer lugar dejar en claro que se entiende por la inversa de una función generatriz (para darle sentido a la expresión $\frac{1}{(1+x)^m}$), luego mencionar que la derivada formal de un cociente de funciones generatrices verifica $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g(x)^2}$ y antes de eso explicar cuando se puede dividir una función generatriz $f(x)$ entre otra $g(x)$ y que sentido tiene esta división, etc. También es delicado el tema de la substitución. Por ejemplo, en el Ejemplo 9.8. del libro de Grimaldi parte de la identidad $(1-x)^{-7} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-7}{n} x^n$ y substituyendo en esa ecuación x por $2x$ (lo cual es equivalente a hacer cambio de variable) obteniendo $(1-2x)^{-7} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-7}{n} 2^n x^n$ que en este caso es correcto pero pareciera que siempre podemos hacer substitución lo cuál es falso. Por ejemplo si realizaramos la substitución x por $1-x$ obtendríamos la identidad falsa $x^{-7} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-7}{n} (1-x)^n$.

Estas notas fueron elaboradas en el 2020 y corregida en 2021. Agradezco mucho a la prof. Débora Stalker quién colaboró con el pasaje a latex de estas notas. He agregado un apéndice que es interesante para profundizar en el tema aunque esas cosas no serán evaluadas en los parciales. Quisiera aclarar que el enfoque de definir las funciones generatrices como serie formales se debe al tipo de problemas combinatorios que se abordan en el curso y no porque esté mal o sea inútil utilizar análisis. De hecho existe una área muy importante de combinatoria llamada combinatoria analítica en donde se estudian las funciones generatrices desde un punto de vista analítico (restringiendose a aquellas con radio de convergencia positivo), donde entendiendo el comportamiento de estas cerca de las singularidades es posible obtener información asintótica de cantidades combinatorias; no abordaremos ese tema aqui. Espero que disfruten estas notas y toda sugerencia o comentario es bienvenido.

Claudio Qureshi

Índice

1. Definición y motivación **3**
  1.1. Deducción de nuevas identidades a partir de otras 4
  1.2. Relación con problemas de distribuciones 4

2. Suma, producto y cociente de funciones generatrices **5**

3. ¿Cuándo podemos hacer substitución? **9**

4. Método de las fracciones simples **11**

5. Derivación formal de funciones generatrices **12**

6. Método de las sumas parciales **13**

7. Apéndice A: Derivada formal y fórmula de Taylor formal **14**

8. Apéndice B: Topología de las funciones generatrices **14**
  8.1. Series de funciones generatrices 14

1. Definición y motivación

Definición 1.1. La función generatriz de la sucesión $(a_n) = a_0, a_1, a_2, a_3 \cdots$ es la serie de potencias formal ("polinomio infinito ") dado por

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Comentario. El adjetivo "formal" se refiere a que la función generatriz queda univocamente determinada a partir de la sucesión que la genera, sin importar cuestiones de convergencia. Por ejemplo las funciones generatrices $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2^n} x^n = 2 + 4x + 16x^2 + 256x^3 + \cdots$ y $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{3^n} x^n = 2 + 8x + 512x^2 + 134217728x^3 + \cdots$ convergen solo para $x = 0$ (ejercicio 1 del práctico 5) y $A(0) = B(0) = 2$. Sin embargo como funciones generatrices son distintas pues las sucesiones $(2^{2^n})_{n\geq 1}$ y $(3^{3^n})_{n\geq 1}$ lo son.

Ejemplo 1.2. *Para las siguientes sucesiones tenemos las siguientes funciones generatrices:*
$(a_n) = 1, 1, 1, 1, 1, 1, \cdots \mapsto A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots;$
$(b_n) = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots \mapsto B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots;$
$(c_n) = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots \mapsto C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots.$

La gran ventaja de trabajar con funciones generatrices es que nos permite manipular sucesiones como un todo, por ejemplo para obtener fórmulas cerradas u obtener nuevas identidades a partir de otras.

Observemos que cuando la sucesión es finita (o vale cero a partir de un cierto término), la función generatriz resulta un polinomio.

Ejemplo 1.3. *Para las siguientes sucesiones tenemos las siguientes funciones generatrices:*
$(a_n) = 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \cdots \mapsto A(x) = 1 + x + x^2;$
$(b_n) : b_n = -1$ *si* $n = 10$ *y* $b_n = 0$ *si* $n \neq 10 \mapsto B(x) = -x^{10}.$

A continuación veremos como el álgebra de polinomios y la operación de derivación pueden ser aplicados en problemas combinatorios. El extender esas operaciones para funciones generatrices en general nos brinda una herramienta muy poderosa para atacar ciertos problemas en combinatoria.

1.1. Deducción de nuevas identidades a partir de otras

Consideremos la función generatriz (polinomio) $A(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ donde n es un entero positivo fijo. Observemos que:

$$\begin{aligned} A(x)(1-x) &= (1-x) + (1-x)x + (1-x)x^2 + \cdots + (1-x)x^n \\ &= 1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 + \cdots + x^n - x^{n+1} \\ &= 1 - x^{n+1}. \end{aligned}$$

Entonces[1]

$$\boxed{1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}} \tag{1}$$

A partir de (1) es posible obtener otras identidades como mostraremos a continuación.

Ejemplo 1.4. *Expresar la función generatriz de la sucesión (b_k) tal que $b_k = k$ para todo $k \le n$ y $b_k = 0$ para todo $k > n$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$ es fijo, como cociente de polinomios.*

Solución. *La sucesión es $0, 1, 2, 3, \cdots, n, 0, 0, \cdots$ por lo tanto $B(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n$. Si derivamos ambos lados de (1) tenemos que:*

$$A'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

Entonces $B(x) = xA'(x) = \dfrac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$.

Comentario. La identidad (1) es llamada "fórmula de la suma geométrica finita" y es importante recordarla para el curso.

Hemos visto como deducir nuevas identidades a partir de una dada usando suma, producto y derivada de polinomios. Lamentablemente considerar unicamente polinomios resulta muy restrictivo pues solo nos permite trabajar con sucesiones finitas (o que valen 0 a partir de un término). Para entender estas ideas para sucesiones generales el primer paso es definir estas operaciones para funciones generatrices en general que es lo que haremos en la siguiente sección.

1.2. Relación con problemas de distribuciones

Previamente en el curso nos hemos topado con el problema de distribuir n pelotitas idénticas en m cajas numeradas donde considerábamos restricciones sobre la cantidad mínima o máxima

[1] Es importante notar que si consideramos $A(x) = B(x)/C(x)$ como función de variable real entonces sería importante remarcar que esta expresión tiene sentido para los valores de x que no anulan al denominador. Sin embargo al trabajar con funciones generatrices, una igualdad $A(x) = B(x)/C(x)$ con $A(x), B(x)$ y $C(x)$ polinomios debe interpretarse como equivalente al producto polinomial $A(x)C(x) = B(x)$ (o sea, en este sentido no hace falta discutir para que valores reales de x esa expresión tiene sentido).

de pelotitas que pueden ir a cada caja. Esto es equivalente a resolver en los naturales la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ con restricciones $a_i \leq x_i \leq b_i$ $i = 1, 2, \ldots, m$ (donde los a_i y b_i son naturales fijos).

Si consideramos los subconjuntos $A_i = \{n \in \mathbb{N} : a_i \leq x_i \leq b_i\} \subseteq \mathbb{N}$ entonces la ecuación toma la forma: $x_1+x_2+\cdots+x_m = n$ con restricciones $x_i \in A_i$. Ahora consideremos restricciones mucho más generales, es decir, consideremos subconjunto finitos cualesquiera $A_i \subseteq \mathbb{N}$ y la ecuación en los naturales $x_1+x_2+\cdots+x_m = n$ con restricciones $x_i \in A_i$. Para simplificar supondremos que $m = 3$ y consideremos $x_1 + x_2 + x_3 = n$ con restricciones $x_1 \in A, x_2 \in B, x_3 \in C$ donde A, B, C son ciertos subconjuntos finitos de los naturales. La siguiente observación es clave: consideramos el producto de polinomios:

$$F(x) = \left(\sum_{a \in A} x^a\right)\left(\sum_{b \in B} x^b\right)\left(\sum_{c \in C} x^c\right)$$

luego de aplicar la propiedad distributiva de polinomios varias veces obtenemos una suma donde cada sumando es de la forma $x^a x^b x^c = x^{a+b+c}$ (donde elegimos un x^a de la primer sumatoria, un x^b de la segunda y un x^c de la tercera de todas las formas posibles). Cada vez que seleccionemos $a \in A$, $b \in B$ y $c \in C$ tales que $a + b + c = n$ obtendremos un sumando x^n. Esto quiere decir que el coeficiente de x^n en el producto $F(x)$ es exactamente el número de soluciones en los naturales de la ecuación $x_1+x_2+x_3 = n$ con restricciones $x_1 \in A, x_2 \in B, x_3 \in C$.

Por supuesto, este método resulta eficiente solo si tenemos una forma simple de obtener el coeficiente de x^n en $F(x)$ que no sea haciendo todas las distributivas. Esto no es posible si nos restringimos únicamente a polinomios. La idea clave es que es posible extender la suma y producto de polinomios para funciones generatrices en general. Al considerar problemas de distribuciones nos toparemos, al igual que ahora, con una función generatriz $F(x)$ que es producto de otras funciones generatrices. Si tenemos la suerte de poder expresar $F(x)$ como cociente de polinomios (eso va a depender de las condiciones impuestas) entonces podemos expresar $F(x)$ como suma de fracciones simples (como las que se utilizan en cálculo para resolver integrales!) las cuales son fáciles de obtener el coeficiente de x^n.

En vista de lo anterior resulta claro que el primer paso es conseguir extender las operaciones de suma, producto, cociente y derivada de polinomios para funciones generatrices en general.

2. Suma, producto y cociente de funciones generatrices

Definimos las operaciones de forma que coincidan con las usuales en el caso de que las funciones generatrices sean polinomios. Sean $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ dos funciones generatrices. Definimos la suma y producto de la siguiente manera:

- **Suma:** $A(x) + B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ donde $c_n = a_n + b_n$ $\forall n \geq 0$.
- **Multiplicación:** $A(x)B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ donde $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$.

Comentario. La suma de funciones generatrices es término a término pero el producto no (cuando multiplicamos dos polinomios tampoco lo hacemos término a término). La multiplicación está definida de modo que valga la distributiva y que $x^i x^j = x^{i+j}$. O sea, para obtener el coeficiente de x^n de $A(x)B(x)$ se combinan de todas las maneras posibles los términos $a_i x^i$ de $A(x)$ con los términos $b_j x^j$ de $B(x)$ tales que $i + j = n$.

Definición 2.1. Dadas dos sucesiones $(a_n)_{n\geq 0}$ y $(b_n)_{n\geq 0}$, a la secuencia $(c_n)_{n\geq 0}$ definida como $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$ se le llama convolución de (a_n) y (b_n) y se la denota por $(a_n) * (b_n)$.

Ejemplo 2.2. *La convolución de las sucesiones* $(a_n) : a_n = 1, \forall n \geq 0$ *y* $(b_n) : b_n = 2^n, \forall n \geq 0$ *es la sucesión* $(c_n) : c_n = 2^{n+1} - 1, \forall n \geq 0$. *En efecto:*

$$\begin{aligned} c_n &= a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \cdots + a_0 b_n \\ &= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n \\ &= \frac{1 - 2^{n+1}}{1-2} \quad \textit{(por la fórmula de la suma geométrica)} \\ &= 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

En otras palabras: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - 1) x^n$.

Comentario. Es fácil observar que $f(x) = 0$ es el neutro de la suma (i.e. la función generatriz cuyos coeficientes son todos ceros) y $f(x) = 1$ es el neutro del producto (i.e. la función generatriz cuyos coeficientes son todos ceros salvo el término independiente que es 1). Si consideramos el conjunto de todas las funciones generatrices con coeficientes reales no es dificil probar que la suma es asociativa, conmutativa y todo elemento tiene opuesto, que el producto es asociativo y conmutativo y que vale la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma. Todo lo anterior se resume diciendo que las funciones generatrices con coeficientes reales con la suma y producto definidos como antes forman un anillo conmutativo (al igual que los polinomios con coeficientes reales con la suma y producto usual).

- **Multiplicación de varias funciones generatrices:** La multiplicación se extiende de forma natural para varios factores. Por ejemplo:

  $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

  donde $d_n = \sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k$ (i, j, k recorren todos los naturales tales que $i + j + k = n$).

  De esta identidad se desprende facilmente la propiedad asociativa del producto, es decir: $(A(x)B(x))C(x) = A(x)(B(x)C(x))$.

- **División:** No siempre el cociente de dos funciones generatrices nos da una función generatriz así como tampoco el cociente de dos enteros nos tiene porque dar entero. Además no se puede dividir entre la función generatriz nula (al igual que en los enteros o reales no se puede dividir entre 0).

Definición 2.3. Una función generatriz (siempre consideradas con coeficientes reales) $A(x)$ se dice invertible si existe otra función generatriz $B(x)$ tal que $A(x)B(x) = 1$. En este caso definimos $\dfrac{1}{A(x)} = B(x)$.

Notación. Si $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ se define $A(0) = a_0$.

Teorema 2.4. *Una función generatriz $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es invertible si y sólo si $A(0) \neq 0$. Si $A(0) = a_0 \neq 0$ entonces $\dfrac{1}{A(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ donde la sucesión (b_n) viene dada por:*

$$\begin{cases} b_0 = a_0^{-1}; \\ b_n = \left(-\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} b_i\right) \cdot a_0^{-1} \quad \text{para } n \geq 1. \end{cases}$$

Demostración. Sea $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Como $A(x)B(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} b_i)x^n$ entonces la ecuación $A(x)B(x) = 1$ equivale a las siguientes condiciones:

i) $a_0 b_0 = 1$

ii) $a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = 0$ para todo $n \geq 1$.

Si $A(0) \neq 0$ entonces $a_0 \neq 0$ y por i) tenemos que $b_0 = \dfrac{1}{a_0}$, luego podemos usar ii) para despejar b_n (en función de todos los términos anteriores) obteniendo $b_n = \dfrac{-\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} b_i}{a_0}$ $\forall n \geq 1$.

Definición 2.5. Si $B(0) \neq 0$ se define $\dfrac{A(x)}{B(x)} := A(x) \cdot \dfrac{1}{B(x)}$ (es decir, dividir entre una función generatriz invertible es multiplicar por su inversa).

Observar que si $B(0) \neq 0$, la ecuación $\dfrac{A(x)}{B(x)} = C(x)$ es equivalente a $A(x) = B(x)C(x)$ que se obtiene usando la fórmula del producto.

Ejemplo 2.6. *Hallar los cuatro primeros términos de la función generatriz $A(x) = \dfrac{2-x}{1-x-x^2}$.*

Solución. *Sea $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. A partir de $A(x)(1-x-x^2) = 2-x$ obtenemos*

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)(1-x-x^2) = 2-x$$

$$a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1 - a_0)x^2 + (a_3 - a_2 - a_1)x^3 + \cdots = 2-x$$

Igualando coeficientes: $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 - a_0 = -1 \to a_1 = a_0 - 1 = 2 - 1 = 1 \\ a_2 - a_1 - a_0 = 0 \to a_2 = a_0 + a_1 = 2 + 1 = 3 \\ a_3 - a_2 - a_1 = 0 \to a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 3 = 4 \end{cases}$

Luego $A(x) = \dfrac{2-x}{1-x-x^2} = 2 + x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$

Ejemplo 2.7. *Sea $F(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$. Probar que $F(x)$ es la función generatriz asociada a la sucesión de Fibonacci, definida por $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ y $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geq 2$.*

Solución. *Tenemos $F(x)(1-x-x^2) = x$ donde $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$. Luego*

$$(f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + f_4 x^4 + \cdots)(1-x-x^2) = x$$

$$f_0 + (f_1 - f_0)x + (f_2 - f_1 - f_0)x^2 + (f_3 - f_2 - f_1)x^3 + (f_4 - f_3 - f_2)x^4 + \cdots = x$$

Igualando coeficientes: $\begin{cases} f_0 = 0; \\ f_1 - f_0 = 1 \to f_1 = f_0 + 1 = 1; \\ f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0, \forall n \geq 2 \to f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall n \geq 2. \end{cases}$

Comentario. La sucesión de Fibonacci aparece en muchísimas aplicaciones, recomiendo buscar información en sitios web (wikipedia por ejemplo). Ver también la sección 10,7 del Grimaldi. Cada término es la suma de los dos anteriores, comenzando con $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ por lo tanto $(f_n) : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$.

Ejemplo 2.8. *Probar que la función generatriz $A(x) = 1 - x$ es invertible y hallar su inversa.*

Solución. *$A(x)$ es invertible porque $A(0) = 1 \neq 0$. Si denotamos por $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ a la inversa de $1 - x$ tenemos que $(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \cdots)(1 - x) = 1$. Luego $b_0 + (b_1 - b_0)x + (b_2 - b_1)x^2 + (b_3 - b_2)x^3 + \cdots = 1$.*

Igualando coeficientes $\begin{cases} b_0 = 1; \\ b_n - b_{n-1} = 0, \forall n \geq 1 \to b_n = b_{n-1}, \forall n \geq 1. \end{cases}$

Por lo tanto (b_n) comienza en $b_0 = 1$ y cada término es igual al anterior de donde concluimos que $b_n = 1, \forall n \geq 0$ y que $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

En este ejemplo hemos probado el resultado que enunciamos a continuación.

Proposición 2.9. *La función generatriz $B(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$ es invertible y su inversa es $1 - x$. En otras palabras*

$$\boxed{(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots} \tag{2}$$

Comentario. La identidad (2) es llamada "fórmula de la suma geométrica infinita" y es importante recordarla para el curso.

Utilizando la fórmula de producto de varias funciones generatrices junto con la fórmula de la suma geométrica infinita podemos obtener la inversa de $(1 - x)^m$ con $m \in \mathbb{Z}$.

Proposición 2.10. *Si $m \in \mathbb{Z}^+$ entonces $(1 - x)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} x^n$.*

Demostración. *Procedemos como en la deducción de la fórmula de potencia de multinomio. Como $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ entonces*

$$(1 - x)^{-m} = \underbrace{(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots) \cdots (1 + x + x^2 + \cdots)}_{m \text{ factores}}$$

Para obtener el coeficiente de x^n, debemos ver de cuantas formas podemos elegir x^{α_1} del primer factor, x^{α_2} del segundo factor, $\cdots$, x^{α_m} del m-ésimo factor de modo que $x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} \cdots x^{\alpha_m} = x^n$, o equivalentemente $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = n$ con $\alpha_i \in \mathbb{N}$ que tiene $\mathrm{CR}_n^m = \binom{n+m-1}{m-1}$ soluciones. Entonces:

$$(1 - x)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n + m - 1}{m - 1} x^n. \tag{3}$$

Comentario. Recordemos que para $n, m \in \mathbb{N}$ tenemos $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$. En general podemos definir $\binom{x}{m} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)}{m!}$ para $x \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$. Usando esta expresión no es dificil probar que $\binom{-m}{n} = (-1)^n \binom{n+m-1}{m-1}$ para $m \in \mathbb{Z}^+$ y $n \in \mathbb{N}$ (pág. 438 del libro de Grimaldi). Luego la ecuación (3), para $m \in \mathbb{Z}^+$, puede expresarse también como

$$(1 - x)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-m}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} (-x)^n, \tag{4}$$

que es muy similar a la ya conocida fórmula $(1-x)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n}(-x)^n$ para $m \in \mathbb{Z}^+$.

3. ¿Cuándo podemos hacer substitución?

Una forma de obtener nuevas identidades a partir de otras es a través de substitución (o más formalmente por composición). Por ejemplo, si partimos de la ecuación (2) y substituimos x por x^2 obtenemos $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ que es la función generatriz de la sucesión $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$. Si subtituimos en (2) x por $2x$ obtenemos $\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ que es la función generatriz de la sucesión $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$. Sin embargo si substituimos en (2) x por $1-x$ obtenemos $x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$ que no tiene sentido pues x ni siquiera es invertible; o si substituimos en (2) x por $x-1$ obtenemos $(2-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n$ que no es obvio que se le pueda dar algún sentido. La cuestión aqui es como definir una suma $\sum_{m=0}^{\infty} F(x)^m$ cuando $F(x)$ es una función generatriz, o más general, si $A(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ cuando y como podemos definir la composición $A(F(x)) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m F(x)^m$. Para ello basta con indicar, para cada $n \in \mathbb{N}$ cual es el coeficiente de x^n en $\sum_{m=0}^{\infty} a_m F(x)^m$. La siguiente notación nos será de utilidad.

Notación. Si $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es una función generatriz y $k \in \mathbb{N}$, entonces se define $[x^k]A(x) := a_k$, el k-ésimo coeficiente de $A(x)$.

Una propiedad que queremos es $[x^n]\sum_{m=0}^{\infty} a_m F(x)^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \; [x^n]F(x)^m$. Supongamos que $F(x)$ sea una función generatriz sin término independiente, o sea tal que $F(0) = 0$, entonces resulta que $[x^m]F(x)^n = 0$ para $n > m$. Eso nos lleva a la siguiente definición.

Definición 3.1. Sea $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una función generatriz cualquiera y $F(x)$ una función generatriz con $F(0) = 0$ entonces $A(F(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n F(x)^n$ es la función generatriz definida por $[x^m]A(F(x)) := [x^m]\sum_{n=0}^{m} a_n F(x)^n = \sum_{n=0}^{m} a_n \; [x^m]F(x)^n$, para cada $m \geq 0$.

Con esto ya es suficiente para nuestros propósitos. Para ir más alla y poder darle sentido a una composición $A(F(x))$ con $F(0) \neq 0$ ya debemos considerar convergencias de series reales y esto nos alejaría un poco de nuestro foco. También podemos considerar el problema más general de darle sentido a una serie (suma infinita) de funciones generatrices $\sum_{m=0}^{\infty} F_m(x)$, esto se puede hacer de forma casi similar pero lo dejaremos en el apéndice para el lector curioso (no será tema de evaluación del curso).

Observar que si $F(0) = 0$ tenemos que $[x^n]\sum_{m=0}^{\infty} a_m F(x)^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m [x^n]F(x)^m$.

Definición 3.2. Llamamos fracción simple a una función generatriz de la forma $F(x) = a \cdot (1-bx)^{-m}$ con $ab \neq 0$ y $m \in \mathbb{Z}^+$.

Observamos que aplicando la fórmula de la potencia negativa de binomio (3) substituyendo x por bx obtenemos $(1-bx)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} b^n x^n$. Esta es la ventaja principal de las fracciones simples, obtener muy sencillo obtener explícitamente cualquier coeficiente.

Ejemplo 3.3. *Sea $F(x) = a \cdot (x-b)^{-m}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $ab \neq 0$ y $m \in \mathbb{Z}^+$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Queremos obtener el n-ésimo coeficiente de $F(x)$, es decir $[x^n]F(x)$. Observar primero que si utilizamos la factorización $x - b = -b(1 - b^{-1}x)$ resulta que $F(x) = a(-b)^{-m} \cdot (1 - b^{-1}x)^{-m}$ es una fracción simple. Luego $[x^n]F(x) = a(-b)^{-m}\binom{n+m-1}{m-1} b^{-n} = (-1)^m ab^{-(m+n)}\binom{n+m-1}{m-1}$.*

Si $A(x)$ es una función generatriz tal que $A(0) = 0$ entonces podemos aplicar substitución en la fórmula de potencia negativa de binomio (Ecuación (3)) para obtener:

$$\boxed{(1 - A(x))^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} A^n(x), \quad \text{si } A(0) = 0} \tag{5}$$

En particular, con $A(x) = -x$, tenemos

$$(1+x)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+m-1}{m-1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} x^n.$$

Ejemplo 3.4. *Determine la secuencia generada por la función generatriz* $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$

Solución. *Tenemos que determinar la secuencia* (a_n) *tal que* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Tenemos que* $\dfrac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$ *(usando (5) con* $A(x) = x^2$*). Luego* $\dfrac{x^3}{1-x^2} = x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} + \cdots$. *Por lo tanto la secuencia generada por* $f(x)$ *es* $(a_n) = 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots$ *. También podemos escribir* $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par ó } n = 1; \\ 1 & \text{si } n \text{ es impar ó } n \geq 3. \end{cases}$

En el siguiente ejemplo utilizamos (5) con $A(x) = x^2$.

Ejemplo 3.5. *¿De cuántas formas podemos repartir 20 pelotitas idénticas en 4 cajas numeradas de forma que, las primeras dos cajas contengan una cantidad par de pelotitas; las dos últimas contengan una cantidad impar de pelotitas y que la primer caja contenga al menos una pelotita?*

Solución. *La respuesta es el coeficiente de* x^{20} *de lafunción generatriz*

$$F(x) = (x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots)^2$$

donde cada factor corresponde a las posibles elecciones para cada caja. Entonces:

$$F(x) = \frac{x^2}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \left(\frac{x}{1-x^2} \right)^2 = x^4 \cdot (1-x^2)^{-4} = x^4 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} (x^2)^n$$

Por lo tanto $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} x^{2n+4}$. *El coeficiente de* x^{20} *se obtiene cuando* $2n + 4 = 20 \Rightarrow n = 8$ *obteniendo* $\binom{3+8}{3} = \binom{11}{3}$ *formas posibles de distribuir las* 20 *pelotitas.*

Ejemplo 3.6. *Encontrar una función generatriz y el coeficiente que resuelve el siguiente problema: ¿De cuántas formas podemos distribuir* 20 *pelotitas idénticas en tres recipientes numerados tal que el tercer recipiente contenga una cantidad par de pelotitas?*

Solución. *La respuesta es el coeficiente de* x^{20} *de la función generatriz:*

$$\begin{aligned} F(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^2 (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) = \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{1-x^2} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2 (1-x)(1+x)} = \frac{1}{(1-x)^3 (1+x)}. \end{aligned}$$

Es posible obtener una respuesta explícita para este problema si conseguimos expresar la función generatriz $F(x) = \dfrac{1}{(1-x)^3(1+x)}$ como una suma de fracciones simples. En la siguiente sección veremos como hacerlo.

4. Método de las fracciones simples

Recordemos de la sección anterior que una fracción simple es una función generatriz de la forma $a \cdot (1 - bx)^{-m}$ donde a y b son reales no nulos y $m \in \mathbb{Z}^+$. El método de las fracciones simples consiste en expresar una función generatriz de la forma $F(x) = P(x)/Q(x)$ con $P(x), Q(x)$ polinomios (generalmente provenientes de un producto como en el ejercicio 3.6) como suma de fracciones simples. Dado que sabemos como hallar el coeficiente n-ésimo de una fracción simple (ver Ejemplo 3.3) y tenemos $F(x)$ expresado como suma de fracciones simples entonces podemos hallar también el coeficiente n-ésimo de $F(x)$.

Tenemos la siguiente proposición que vamos a enunciar sin demostración.

Proposición 4.1. *Sea $G(x) = (x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \cdots (x - a_t)^{m_t}$ un polinomio de grado $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_t$ con $G(0) \neq 0$. Sea $F(x)$ un polinomio con $\mathrm{gr}(F) < m$. Entonces existen coeficientes $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1m_1}, a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2m_2}, \cdots, a_{t1}, a_{t2}, \cdots, a_{tm_t} \in \mathbb{R}$ tales que:*

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{a_{11}}{1 - \frac{x}{a_1}} + \frac{a_{12}}{\left(1 - \frac{x}{a_1}\right)^2} + \cdots + \frac{a_{1m_1}}{\left(1 - \frac{x}{a_1}\right)^{m_1}} + \cdots + \frac{a_{t1}}{1 - \frac{x}{a_t}} + \frac{a_{t2}}{\left(1 - \frac{x}{a_t}\right)^2} + \cdots + \frac{a_{tm_t}}{\left(1 - \frac{x}{a_t}\right)^{m_t}}. \quad (6)$$

Comentario. Lo importante en la práctica es como obtener esos coeficientes. El primer paso es obtener $a_1, a_2, \cdots, a_t \in \mathbb{R}$ que son las raíces de $G(x)$ y así factorizarlo (a veces esta factorización viene "de regalo" como en el ejercicio 2). Los coeficientes a_{ij} se pueden obtener de dos formas:

- Multiplicando ambos lados de (6) por $G(x)$, luego agrupando el lado derecho por potencias de x^i y comparando coeficientes (ver Ej 9.14, pág 441 de Grimaldi).
- El método más rápido es evaluando en $x = a_1, a_2, \cdots, a_t$.
  Con $F(a_1), F(a_2), \cdots, F(a_t)$ obtenemos $a_{1m_1}, a_{2m_2}, \cdots, a_{tm_t}$.
  Con $F'(a_1), F'(a_2), \cdots, F'(a_t)$ obtenemos $a_{1m_1-1}, a_{2m_2-1}, \cdots, a_{tm_t-1}$.
  Con $F''(a_1), F''(a_2), \cdots, F''(a_t)$ obtenemos $a_{1m_1-2}, a_{2m_2-2}, \cdots, a_{tm_t-2}$, etc...

Ejemplo 4.2. *Resolver el problema del ejemplo 3.6, que se resume a calcular $[x^{20}]F(x)$ para la función generatriz $F(x) = \dfrac{1}{(1-x)^3(1+x)}$.*

Solución. *Aplicamos el método de las fracciones simples para escribir*

$$\frac{1}{(1-x)^3(1+x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{c}{(1-x)^3} + \frac{d}{1+x}$$

Multiplicando ambos lados por $(1-x)^3(1+x)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
1 =& a(1-x)^2(1+x) + b(1-x)(1+x) + c(1+x) + d(1-x)^3;\\
1 =& a(1-2x+x^2)(1+x) + b(1-x)(1+x) + c(1+x) + d(1-3x+3x^2-x^3);\\
1 =& a(1-x-x^2+x^3) + b(1-x^2) + c(1+x) + d(1-3x+3x^2-x^3) \qquad (7)
\end{aligned}$$

Vamos a mostrar ambos métodos para hallar a, b, c, d.

Método 1 *(igualando coeficientes): Agrupamos el lado derecho de (7) en $1, x, x^2, x^3$ obteniendo $1 = (a-d)x^3 - (a+b-3d)x^2 - (a-c+3d)x + (a+b+c+d)$. Por igualación de coeficientes* *tenemos que resolver el sistema:*

$$\begin{cases} a - d = 0 \\ a + b - 3d = 0 \\ a - c + 3d = 0 \\ a + b + c + d = 1 \end{cases}$$

De donde $d = a \Rightarrow b = 3d - a = 2a \Rightarrow c = a + 3d = 4a \Rightarrow a + 2a + 4a + a = 1$, *obteniendo* $a = \frac{1}{8}, b = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{2}, d = \frac{1}{8}$.

Método 2 *(evaluando):*

- *Con* $x = 1$ *en (7) tenemos que* $1 = 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2}$.
- *Con* $x = -1$ *en (7) tenemos* $1 = 8d \Rightarrow d = \frac{1}{8}$.
- *Derivando ambos lados de (7):* $0 = a(-1 - 2x + 3x^2) + b(-2x) + c + d(-3 + 6x - 3x^2)$ *y haciendo* $x = 1$ *tenemos* $0 = -2b + c \Rightarrow b = \frac{c}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{4}$.
- *Derivando nuevamente:* $0 = a(-2 + 6x) - 2b + d(6 - 6x)$ *y haciendo* $x = 1$ *obtenemos* $0 = 4a - 2b \Rightarrow a = \frac{b}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \frac{1}{8}$.

Sea cual sea el método empleado llegamos a:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\frac{1}{8}}{1-x} + \frac{\frac{1}{4}}{(1-x)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{(1-x)^3} + \frac{\frac{1}{8}}{1+x} \\ &= \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1+n}{1}x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2+n}{2}x^n + \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}(1+n) + \frac{1}{2}\binom{2+n}{2} + (-1)^n\frac{1}{8}\right)x^n \end{aligned}$$

Luego $[x^{20}]F(x) = \frac{1}{8} + \frac{21}{4} + \frac{1}{2}.\binom{22}{2} + \frac{1}{8} = \frac{22}{4} + \frac{22{,}21}{4} = 121.$

Comentario. En el método 2 hemos evaluado una vez en $x = -1$ y tres veces en $x = 1$; esto corresponde a las multiplicidades de $x = -1$ y $x = 1$ en $(1-x)^3(1+x)$.

5. Derivación formal de funciones generatrices

Definición 5.1. La derivada (formal) de $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es $A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$.

Observamos que la derivada de una función generatriz siempre existe (incluso cuando esta no es derivable como función, como en el caso de $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2^n} x^n$).

La derivada formal tiene las mismas propiedades que la derivada clásica del curso de cálculo: linealidad, regla de Leibniz y la regla del cociente (dejaremos una prueba en el apéndice para el lector interesado). Más concretamente, si $A(x)$ y $B(x)$ son dos funciones generatrices y $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos:

1. (Linealidad) $(A(x) + B(x))' = A'(x) + B'(x)$ y $(\alpha A(x))' = \alpha A'(x)$;

2. (Regla de Leibniz) $(A(x)B(x))' = A'(x)B(x) + A(x)B'(x)$;

3. (Regla del cociente) Si $B(0) \neq 0$ entonces $\left(\dfrac{A(x)}{B(x)}\right)' = \dfrac{A'(x)B(x) - B'(x)A(x)}{B(x)^2}$.

La prueba no involucra límites ni nociones de convergencia como en cálculo, solo la definición de derivada formal.

A efectos de conteo, resulta útil expresar una función generatriz $A(x)$ como cociente de polinomios $A(x) = P(x)/Q(x)$ (por ejemplo para aplicar el método de fraccones simples). No toda función generatriz es de esta forma[2]. Partiendo de la fórmula $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}$ y derivando varias veces podemos expresar cualquier función generatriz de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$ donde $p(x)$ es un polinomio, como cociente de polinomios.

Ejemplo 5.2. *Expresar $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ como cociente de polinomios.*

Solución: *Partimos de la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Derivando de ambos lados obtenemos $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Multiplicando por x de ambos lados obtenemos:*

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Ejemplo 5.3. *Expresar $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n^2 - 3n)x^n$ como cociente de polinomios.*

Solución. *En el ejemplo anterior, partiendo de la serie geométrica obtuvimos $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$. Derivando nuevamente $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \dfrac{(1-x)^2 + 2(1-x)x}{(1-x)^4} = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$. Luego:*

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n - 3\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} - \frac{3x}{(1-x)^2} = \frac{x(1+x) - 3x(1-x)}{(1-x)^3} \Rightarrow A(x) = \frac{2x(2x-1)}{(1-x)^3}.$$

6. Método de las sumas parciales

Definición 6.1. Si $(a_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión, entonces la sucesión de las sumas parciales es otra sucesión $(s_n)_{n\geq 0}$ definida como $s_0 = a_0$, $s_1 = a_0 + a_1, s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \cdots, s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ para $n \geq 0$.

Proposición 6.2. *Si $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ es la función generatriz de (a_n) y $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_nx^n$ es la función generatriz de las sumas parciales, entonces $S(x) = \dfrac{A(x)}{1-x}$.*

Demostración. Sabemos que $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ donde $b_n = 1$, $\forall n \geq 0$. Luego recordando que el producto de funciones generatrices se corresponde con la convolución de las sucesiones tenemos

[2] Se puede probar por ejemplo que $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2^n}x^n$ no puede expresarse como cociente de polinomios usando que toda función racional definida en el origen está definida en un entorno del origen.

$A(x)\cdot\dfrac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$.

Ejemplo. Obtenga una expresión para $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

Solución. La sucesión $(s_n) : s_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ es la sucesión de sumas parciales de $(a_n) : a_n = n^2$. El primer paso es expresar la función generatriz de (a_n) como cociente de polinomios. Procediendo como en el ejemplo anterior (parteindo de la serie geométrica y derivando) obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Por la Proposición 6.2 tenemos $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \dfrac{x(1+x)}{(1-x)^4}$ y aplicamos fracciones simples:

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^4} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{c}{(1-x)^3} + \frac{d}{(1-x)^4} \Leftrightarrow x(1+x) = a(1-x)^3 + b(1-x)^2 + c(1-x) + d$$

Con $x = 1$: $d = 2$.

- Derivando: $1 + 2x = -3a(1-x)^2 - 2b(1-x) - c$, con $x = 1 : 3 = -c \Rightarrow c = -3$
- Derivando: $2 = 6a(1-x) + 2b$, con $x = 1 : 2 = 2b \Rightarrow b = 1$
- Derivando: $0 = -6a \Rightarrow a = 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n &= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{3}{(1-x)^3} + \frac{2}{(1-x)^4} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1+n}{1}x^n - 3\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2+n}{2}x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3+n}{3}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\binom{1+n}{1} - 3\binom{2+n}{2} + 2\binom{3+n}{3}\right)x^n
\end{aligned}$$

Entonces

$$s_n = \binom{1+n}{1} - 3\binom{2+n}{2} + 2\binom{3+n}{3}, \forall n \geq 0.$$

7. Apéndice A: Derivada formal y fórmula de Taylor formal

Proximamente (no será parte de la evaluación del curso)

8. Apéndice B: Topología de las funciones generatrices

Proximamente (no será parte de la evaluación del curso)

8.1. Series de funciones generatrices

Proximamente (no será parte de la evaluación del curso)