El ejemplo 4) nos muestra que una función continua en un intervalo acotado ($(0,1]$ en el ejemplo) puede no ser uniformemente continua. Como veremos a continuación, si el intervalo es cerrado y acotado, entonces la continuidad implica la continuidad uniforme.

Teorema 21 *(Cantor) f continua en $[a,b] \Rightarrow$ f uniformemente continua en $[a,b]$.*

Demostración. Supongamos por absurdo que f no es uniformemente continua. La negación lógica de la Definición 171 nos conduce a que $\exists\varepsilon : \forall\delta, \exists x_\delta, x_{\delta'} \in I$ con $|x_\delta - x_{\delta'}| < \delta$ y $|f(x_\delta) - f(x_{\delta'})| \geq \varepsilon$. En otras palabras, para un ε particular, no existe δ uniforme y puedo encontrar puntos tan cercanos como quiera con imágenes que distan más que ε.
Particularmente con cada $\delta = 1/n$ podemos construir sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(x_{n'})_{n\in\mathbb{N}}$ tales que:

$$|x_n - x_{n'}| < \frac{1}{n}, |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon\ (*)$$

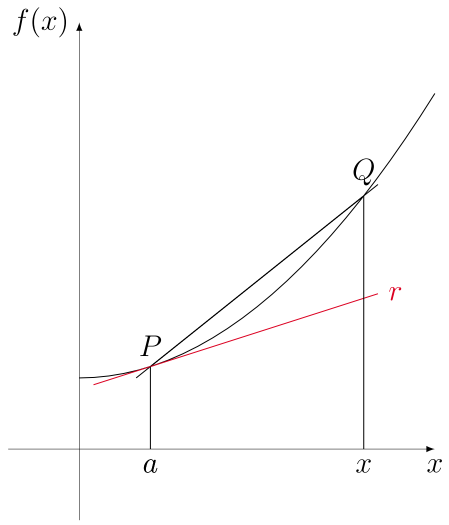
Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, tiene (Teorema 5) una subsucesión convergente $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, y $\lim_k x_{n_k} = L \in [a,b]$. Como $|x_{n_k} - x'_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \xrightarrow{k} 0 \Rightarrow \lim_k x'_{n_k} = L$.
Como f es continua en L sabemos que $\lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k f(x'_{n_k}) = f(L)$. Pero entonces $f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k}) \xrightarrow{k} 0$, lo que es absurdo por $(*)$.

♠

3.4. Derivadas

La noción de derivada responde a la idea de la "velocidad con que cambia" la función $f(x)$. En un intervalo, esta velocidad puede expresarse por la razón: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, llamado cociente incremental. Si buscamos una versión local, es decir la velocidad con que está variando $f(x)$ en el punto a, lo natural es tomar límite con $x \to a$.
Geométricamente, esto equivale a considerar la pendiente de la recta por los puntos $P = (a, f(a))$ y $Q = (x, f(x))$ y al tomar límite, si éste existe, obtener la pendiente de la recta r, tangente en el punto P.
Llegamos a la siguiente definición:

Definición 174 *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ función, a tal que existe $E(a,r) \subset D$. f es derivable en a si y solo si existe $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.*
En ese caso, al límite se le llama derivada de f en el punto a *y se lo denota $f'(a)$ (o también $\frac{df}{dx}(a)$).*



Obsérvese que esta definición es eqivalente a la existencia de un número A tal que

$$f(x) = f(a) + (x - a)A + (x - a)\varepsilon(x) \text{ tal que } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Naturalmente $A = f'(a)$. Esta manera de definir la derivabilidad es la que se generaliza para funciones de más variables.

Una consecuencia inmediata de la Definición 174 es que toda función derivable es continua. En efecto:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f(a) \Rightarrow \lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

De hecho, la derivabilidad es una condición más exigente que la continuidad, como lo muestra el ejemplo $f(x) = |x|$ en el punto $x = 0$. En ese caso, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = sg(x)$, que no tiene límite en $x = 0$.

Ejemplo 175

5)

$$f(x) = e^x \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a \frac{(e^{x-a} - 1)}{(x - a)} \xrightarrow{x \to a} e^a \Rightarrow f'(a) = e^a.$$

La función exponencial tiene derivada en cualquier punto y $(e^x)' = e^x$.

En forma similar se puede probar que:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1};\ (\log|x|)' = \frac{1}{x};\ (\text{sen}(x))' = \cos(x);\ (\cos(x))' = -\text{sen}(x).$$

Proposición 176 *Si f, g son derivables en a, también lo son $f+g$, $f-g$, fg y f/g si $g(a) \neq 0$, y se cumple:*

(i) $(f \pm g)' = f' \pm g'$.

(ii) $(fg)' = f'g + fg'$.

(iii) $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Demostración. Veamos por ejemplo (ii), los otros son similares:

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = (f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a))$$
$$\Rightarrow \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} g(x) + f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x-a}$$

Tomando límite con $x \to a$, el segundo miembro tiende a $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

♠

3.4.1. Derivada de la función compuesta (regla de la cadena)

Teorema 22 *Sean f derivable en a y g derivable en $b = f(a)$. Entonces, $g \circ f$ es derivable en a, y $(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a)$.*

Demostración. Una primera aproximación a la prueba es la siguiente:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}.$$

Cuando $x \to a$, $f(x) \to f(a)$ y los dos factores del segundo miembro tienden respectivamente a $g'(b)$ y $f'(a)$.
Un inconveniente de este argumento es que $f(x) - f(a)$ podría anularse para x arbitrariamente cerca de a, en el caso $f'(a) = 0$.
Sea $\varepsilon(y) = \frac{g(y)-g(b)}{y-b} - g'(b)$ definido para y en un entorno reducido. Por definición de derivada, $\lim_{y \to b} \varepsilon(y) = 0$. Si definimos $\varepsilon(b) = 0$ ($\varepsilon(y)$ continua en b), la igualdad $g(y) - g(b) = (y-b)(g'(b) + \varepsilon(y))$ vale para y en un entorno de b, incluso en el punto b. Ponemos $y = f(x)$, y dividimos por $x - a$:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a}(g'(b) + \varepsilon(f(x)))$$

Tomando límite con $x \to a$, se prueba la tesis.

♠

Deducimos del teorema que $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

Ejemplo 177

6) $(e^{\operatorname{sen}(x)})' = e^{\operatorname{sen}(x)} \cos(x)$.

3.4.2. Extremos relativos y derivadas

Definición 178 *f tiene un máximo (mínimo) relativo en el punto a si y solo si existe un entorno $E(a,\delta)$ en el dominio de f tal que $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$), $\forall x \in E(a,\delta)$.*

Ejemplo 179 *$f(x) = |x|$ tiene un mínimo relativo e $x = 0$.*

Proposición 180 *Si existe derivada en un extremo relativo, debe valer 0.*

Demostración. Supongamos que $f'(a) > 0$. Entonces para todo x en un entorno $E(a,\delta)$ se cumple $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$, y por lo tanto $f(x) - f(a)$ es del mismo signo que $x - a$. Esto significa que $f(x) > f(a)$ si $x \in (a, a+\delta)$, mientras que $f(x) - f(a)$ si $x \in (a-\delta, a)$. Pero entonces a no es extremo relativo.
Si $f'(a) < 0$, se cumple análogamente que a no es extremo relativo.

♠

Nota 181 *La condición $f'(a) = 0$ no alcanza para asegurar que f tiene extremo en a, como lo muestra el ejemplo $f(x) = x^3$ en el punto $x = 0$.*

Teorema 23 (Teorema del valor medio o de Lagrange)
Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demostración.

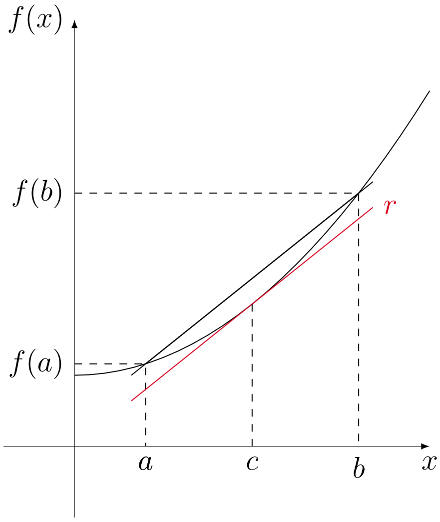
i) Veamos en primer lugar el caso $f(b) = f(a)$ (Teorema de Rolle). Por el Teorema 20 de Weierstrass, existen máximo M y mínimo m de f en $[a,b]$. Si ambos ocurren en los extremos a y b del intervalo, como $f(a) = f(b)$ tendríamos $m = M$, y por lo tanto la función sería constante en $[a,b]$. En ese caso $f'(c) = 0 \forall c \in (a,b)$.

   Supongamos ahora que uno de ellos (por ejemplo el máximo) se da en un punto de (a,b): es decir, $f(c) = M, c \in (a,b)$. Entonces f tiene un máximo relativo en c y por lo tanto $f'(c) = 0$.
   En cualquier caso, existe $c \in (a,b) : f'(c) = 0 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

ii) En el caso general, sea $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. La función g así definida cumple las hipótesis del caso i), ya que $g(a) = g(b) = f(a)$.
   Entonces, $\exists\, c \in (a,b) : f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$.

♠

Un corolario útil del Teorema 23 es que el signo de la derivada en un intervalo determina el crecimiento de la función.



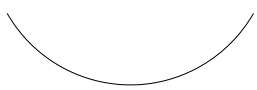
Proposición 182 *Si f es derivable en un intervalo (a,b), $f'(x) > 0$ en (a,b), entonces f es estrictamente creciente en (a,b), es decir $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$.*

Demostración. Sean $x, x' \in (a,b)$, $x < x'$. Si fuese $f(x) \geq f(x')$, se deduce que $\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \leq 0$. Por el Teorema de Lagrange, existe $c \in (x,x')$ tal que $f'(c) \leq 0$, lo que es absurdo por hipótesis.

♠

Nota 183 *En forma análoga, si $f'(x) < 0$ en (a,b), f es estrictamente decreciente en (a,b).*

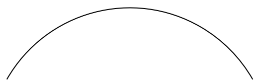
De lo anterior surge que estudiando el signo de $f'(x)$ se puede bosquejar el crecimiento de la función $f(x)$. Para una representación gráfica más completa de una función, es usual estudiar la *concavidad*, que nos indica si la pendiente de la curva está creciendo o decreciendo con x.



Concavidad positiva

Como la pendiente es $f'(x)$, su crecimiento está dado por el signo de la derivada de $f'(x)$, si ésta existe. A la derivada de $f'(x)$ se le llama derivada segunda de f, y se denota f'' o también $\frac{d^2f}{dx^2}$.

Concavidad negativa



No entremos aquí en más detalles (asíntotas, etc.) del estudio analítico y representación gráfica de funciones, que es un tema usual en los cursos de secundaria. Terminamos la sección con dos resultados que serán empleados en la Sección 3.6.

Teorema 24 (Cauchy)
Si f, g son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b),

$$\Rightarrow \exists\, c \in (a, b) : f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$$

.

Demostración. Sea $h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$. Luego $h(a) = h(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$. Por el Teorema 23, existe $c \in (a, b) : h'(c) = 0$.

♠

Teorema 25 (Regla de L'Hópital)
Si f y g son continuas en $E(a, \delta)$, $f(a) = g(a) = 0$, y derivables en $E'(a, \delta)$, $g'(x) \neq 0$ en $E'(a, \delta)$ entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

Demostración. Sea $x > a$. Aplicando el Teorema 24 de Cauchy a f y g en $[a, b]$, tenemos para algún $c \in (a, x)$: $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$.
Si $x \to a^+$, $c \to a^+$, y por tanto $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda$.

$$\Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

Puede procederse igual para $x \to a^-$.

♠

Ejemplo 184 *Buscamos* $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

Derivando, se tiene $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

3.5. Funciones inversas

Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva ($f(x) \neq f(x')$ para $x \neq x'$) y $D' = f(D)$ es el recorrido, puede definirse una función inversa $f^{-1} : D' \to D$ tal que $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$: o en otras palabras, $f^{-1} \circ f = id_x$; $f \circ f^{-1} = id_y$, donde id es la función identidad ($id_x(x) = x, id_y(y) = y$).

Un caso particular en que la inyectividad está asegurada es el de una función estrictamente monótona (creciente o decreciente). Una pregunta natural es la siguiente: si f es continua o derivable, ¿lo será también f^{-1}? Los Teoremas 26 y 27 dan resultados sobre este punto.

Teorema 26 *Si f es continua y estrictamente monótona en un intervalo I. Entonces, el recorrido de f es un intervalo J, y $f^{-1} : J \to I$ es continua y estrictamente monótona.*

Demostración. $J = f(I)$ es un intervalo por el Corolario 168, que asegura que si f (continua) toma dos valores distintos entonces toma todos los valores intermedios. La monotonía es también sencilla. Sea por ejemplo f estrictamente creciente. Consideramos $y < y'$. Si fuese $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$ tendríamos a partir de la monotonía de f que $f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(y'))$, o que $y \geq y'$, lo que es absurdo. Entonces, $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$.

Veamos ahora la continuidad. Sea $y_0 \in J$, estudiamos $\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y)$. Como para $y < y_0$ se tiene que $f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0)$, y además $f^{-1}(y)$ crece con y, se deduce fácilmente que existe $\lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y) = L$, y además $L \leq f^{-1}(y_0)$. Si fuese $L < f^{-1}(y_0)$ entonces se tendría que $f^{-1}(y) \leq L < f^{-1}(y_0)\, \forall y < y_0$, y aplicando f que $y \leq f(L) < y_0\, \forall y < y_0$, lo que es absurdo. Entonces $\lim\limits_{y \to y_0^-} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$.

Análogamente, $\lim\limits_{y \to y_0^+} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$.

♠

Teorema 27 *Sea f derivable en $I = (a, b)$, $f'(x) > 0$ en I, y $J = f(I)$. Entonces f^{-1} es derivable en J, y $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.*

Demostración. Por la Proposición 182, f es estrictamente creciente (de donde se deduce además que J es un intervalo abierto). Por el Teorema 26, existe f^{-1} continua. Sea $x = f^{-1}(y)$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$:

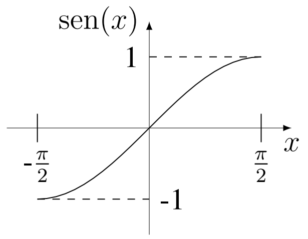
$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

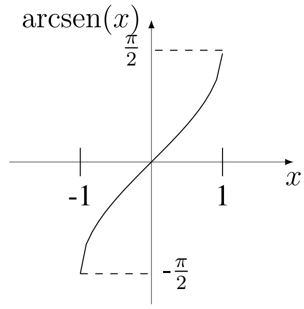
Por la continuidad de f^{-1}, cuando $y \to y_0$ entonces $x \to x_0$ y el segundo miembro tiene límite $\frac{1}{f'(x_0)}$. Entonces $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

$\spadesuit$

Nota 185 *La expresión* $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ *permite deducir que si* f *tiene derivadas de mayor orden (derivadas segunda, tercera, etc.), también las tiene* f^{-1}*, y pueden obtenerse derivando la fórmula anterior por la regla de la cadena.*

Ejemplo 186 $f(x) = \mathrm{sen}(x), x \in (-\pi/2, \pi/2)$.
$f^{-1}(y) = \mathrm{arcsen}(y), y \in (-1, 1)$.
$(x = \mathrm{arcsen}(y)) \Leftrightarrow y = \mathrm{sen}(x)$.
$(\mathrm{arcsen}(y))' = \frac{1}{\cos(\mathrm{arcsen}(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, *donde la última igualdad se deduce del hecho que si* $x = \mathrm{arcsen}(y)$*,* $y = \mathrm{sen}(x)$ *y* $\sqrt{1-y^2} = \cos(x) = \cos(\mathrm{arcsen}(y))$.





3.6. Desarrollo de Taylor

Comenzamos con la siguiente reinterpretación de la noción de derivada: si f es derivable en a, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to f'(a)$, y podemos escribir $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)$, donde se verifica que $\frac{r(x)}{x-a} \xrightarrow{x\to a} 0$. Se dice que $r(x)$ es un infinitésimo de mayor orden que $(x-a)$, lo que implica que para x suficientemente próximo a a, $r(x)$ será despreciable frente a $(x-a)$.

En otras palabras, la recta tangente $y_t(x) = f(a)+f'(a)(x-a)$ aproxima a $f(x)$ de tal modo que el error cometido $r(x)$ resulta, cerca de a, despreciable frente a $(x-a)$. El desarrollo de Taylor permite extender las ideas anteriores para obtener aproximaciones mejores.

3.6.1. Órdenes de infinitésimos

Definición 187 *Sean* $f(x), g(x)$ *con límite* 0 *cuando* $x \to a$*. Se dice que* $f(x)$ *es de mayor orden que* $g(x)$ *(y se denota* $f(x) = o(g(x))$*) si y solo si* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.