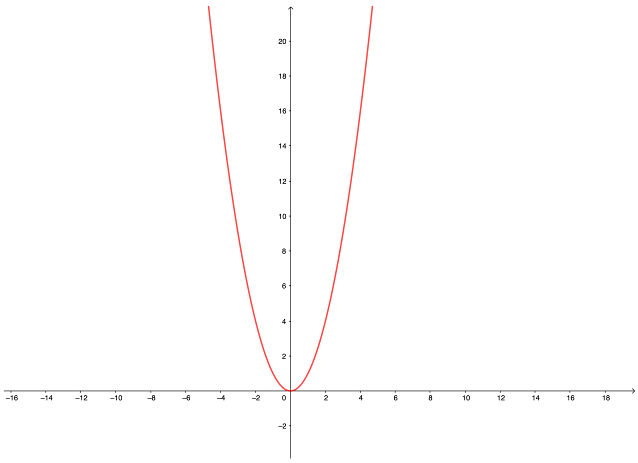
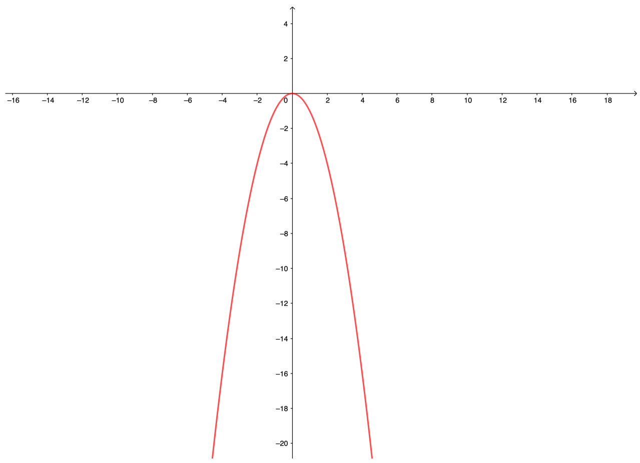
Soluciones Práctico 6: Funciones - Parte II

Ejercicio 1 (Funciones Cuadráticas) *Las funciones cuadráticas son aquellas de la forma* $f(x) = ax^2+bx+c$ *con* a, b *y* b *en* $\mathbb{R}$. *El gráfico de* f *es una parábola.*

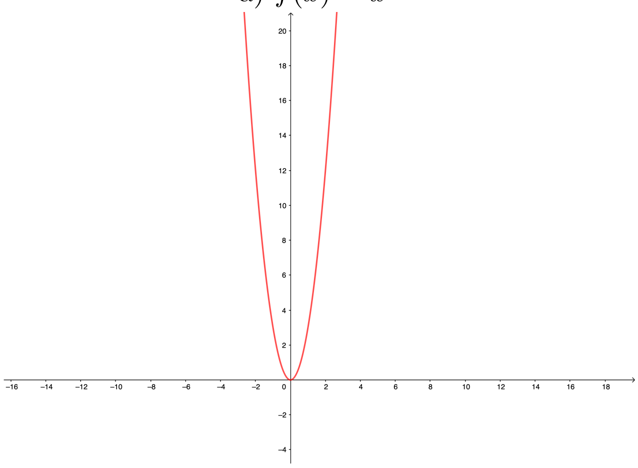
1. *Dibujar las siguientes funciones cuadráticas:*



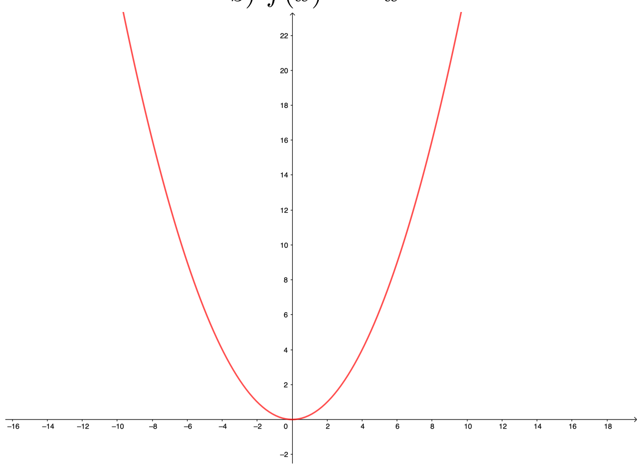
a) $f(x) = x^2$



b) $f(x) = -x^2$

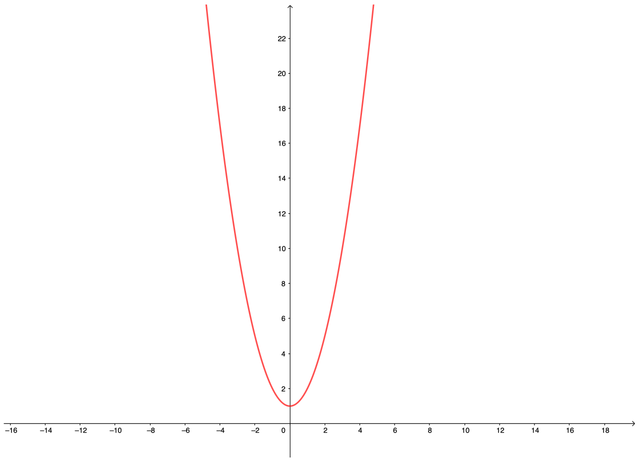


c) $f(x) = 3x^2$

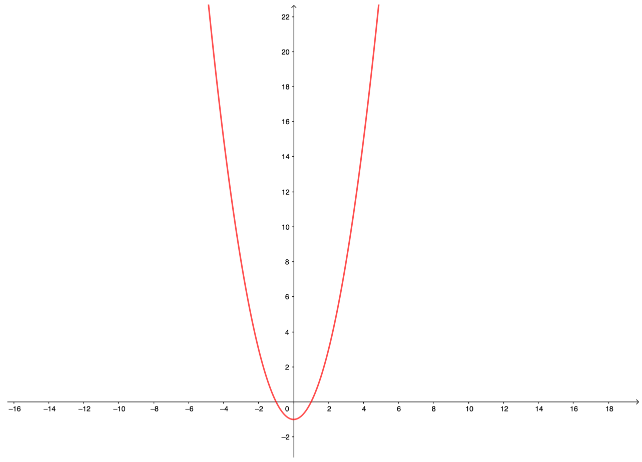


d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$

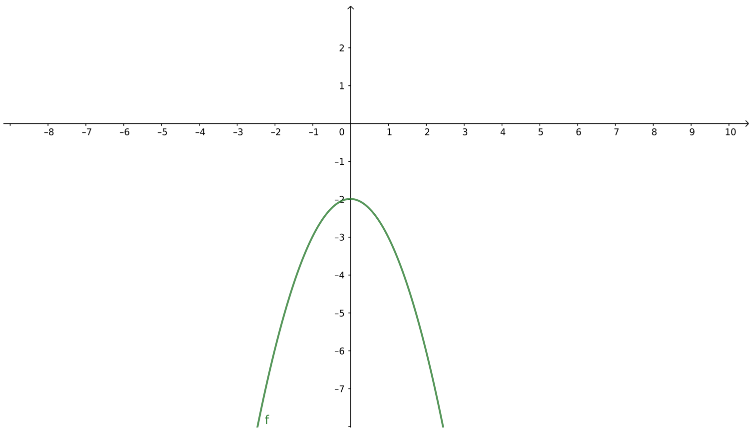
2. *Dibujar las siguientes funciones cuadráticas:*



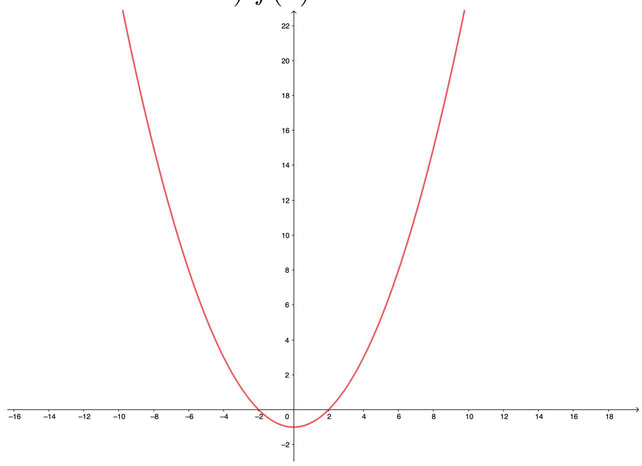
a) $f(x) = x^2 + 1$



b) $f(x) = x^2 - 1$

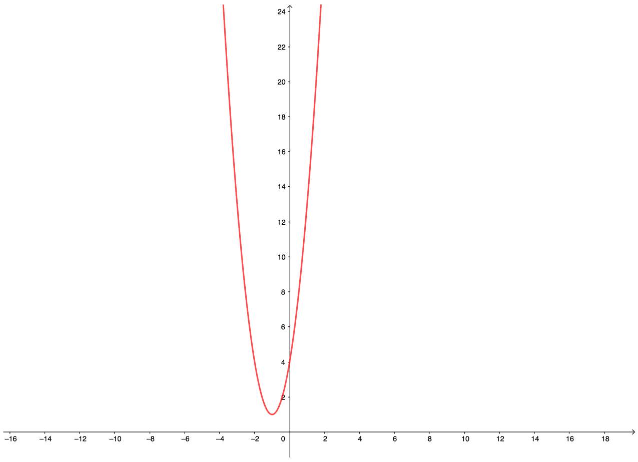


c) $f(x) = -x^2 - 2$

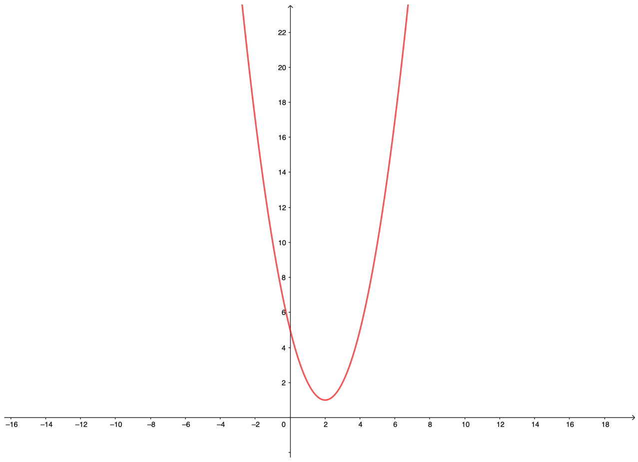


d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$

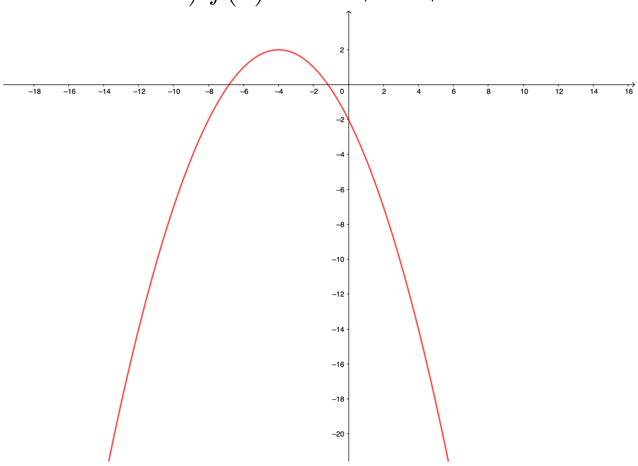
3. *Dibujar las siguientes funciones cuadráticas:*



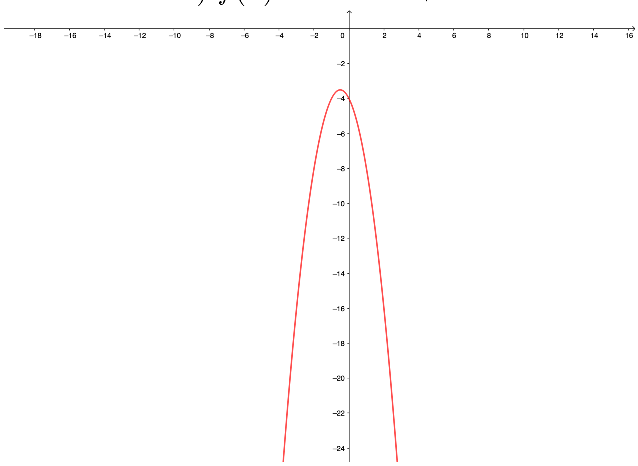
a) $f(x) = 3x^2 + 6x + 4$



b) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

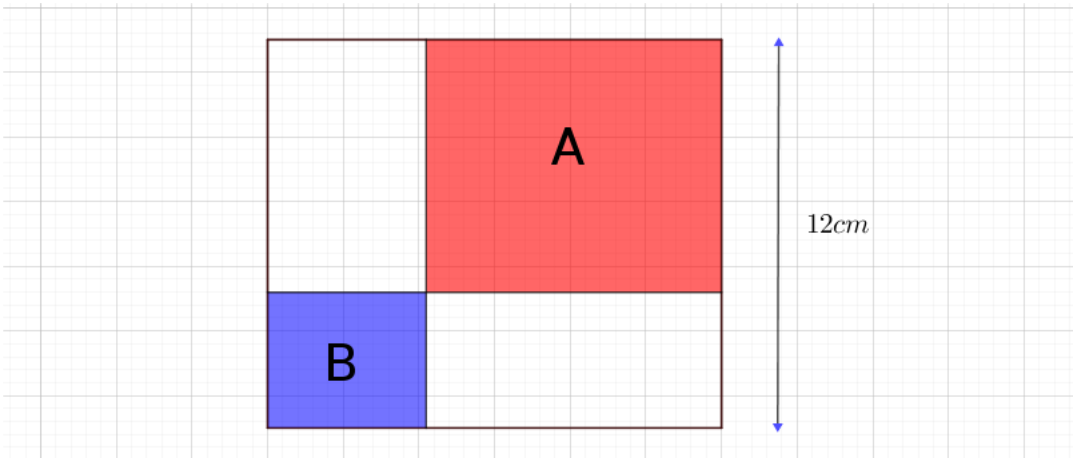


c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2x - 2$



d) $f(x) = -2x^2 - 2x - 4$

4. *En un cuadrado de 12 cm de lado se trazan dos segmentos paralelos a los lados, de modo que queden determinados dos cuadrados A y B, como se indica en la siguiente figura:*



a) *Si cada lado del cuadrado B mide 3 cm, hallar el área sombreada.*
Solución: $9 + 81 = 90$

b) *Si cada lado del cuadrado B mide x cm, hallar el área sombreada $a(x)$.*
Solución: $a(x) = x^2 + (12 - x)^2$

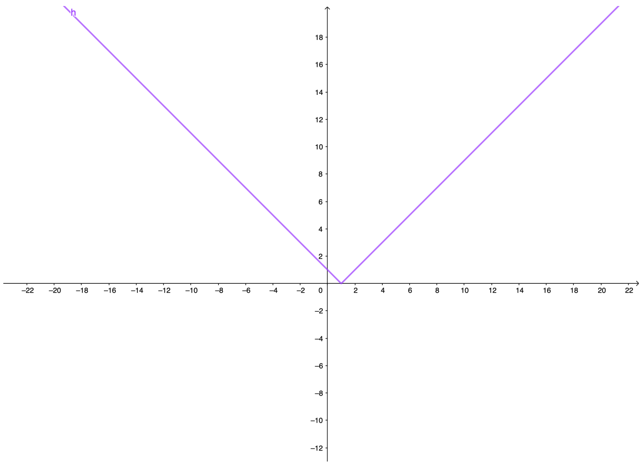
c) *¿Existe un valor del lado de B tal que el área sombreada sea $70cm^2$?*
Solución: $x^2+(12-x)^2 = 70 \Leftrightarrow 2x^2-24x+144 = 70 \Leftrightarrow 2x^2-24x+74 = 0$. *Resolviendo obtenemos que las raíces no son reales por lo que la respuesta es no.*

d) *Hallar las medidas posibles para el lado del cuadrado B tal que el área sombreada sea igual a $80cm^2$.*
Solución: *Las medidas posibles del lado son 4cm u 8cm.*

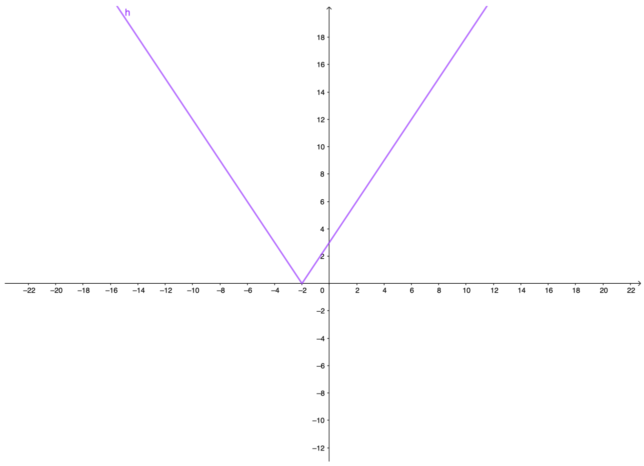
e) *Hallar las medidas posibles para el lado del cuadrado B tal que el área sombreada sea menor que $80cm^2$.*
Solución: $x^2 + (12 - x)^2 < 80 \Leftrightarrow 2x^2 - 24x + 64 < 0$ *y esto ocurre si y solo si* $4 < x < 8$

f) *Hallar la medida del lado del cuadrado B tal que minimice el área sombreada, y determinar dicha área.*
Solución: *La medida del lado es 6cm y el área es $72cm^2$*

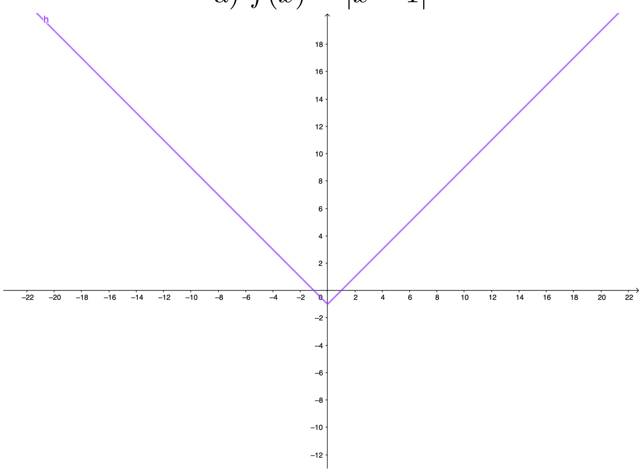
Ejercicio 2 (Función valor absoluto) 1. *Graficar las siguientes funciones:*



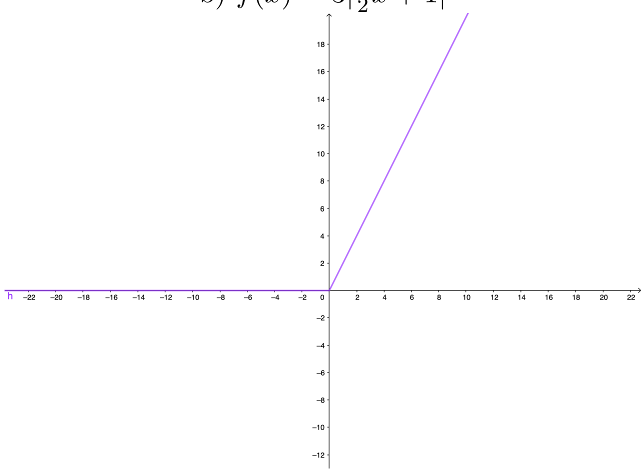
a) $f(x) = |x - 1|$



b) $f(x) = 3|\frac{1}{2}x + 1|$



c) $f(x) = |x| - 1$



d) $f(x) = |x| + x$

2. *Para cada una de las funciones de la parte anterior hallar el conjunto preimagen de $\{1\}$ y de $[0, +\infty)$*
Solución:

a) $f^{-1}(1) = \{-1, 2\}$
$f^{-1}([0, +\infty)) = \mathbb{R}$

b) $f^{-1}(1) = \{-4/3, -8/3\}$
$f^{-1}([0, +\infty)) = \mathbb{R}$

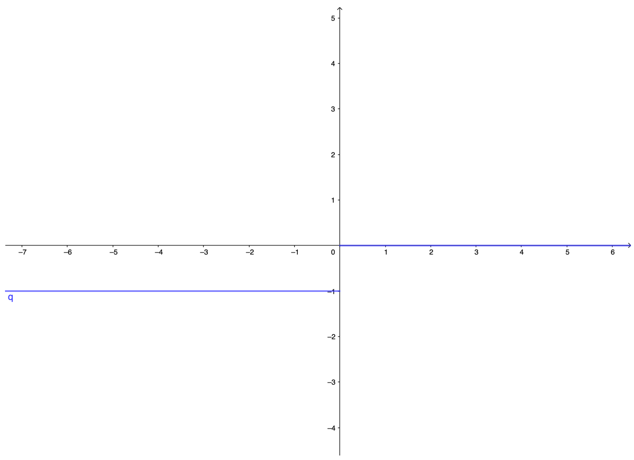
c) $f^{-1}(1) = \{-2, 2\}$
$f^{-1}([0, +\infty)) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

d) $f^{-1}(1) = \{1\}$
$f^{-1}([0, +\infty)) = \mathbb{R}$

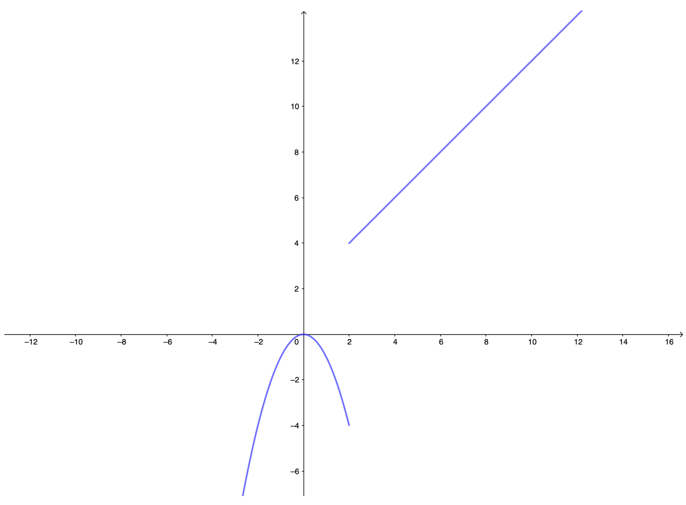
Ejercicio 3 (Funciones Partidas)

Graficar las siguientes funciones:

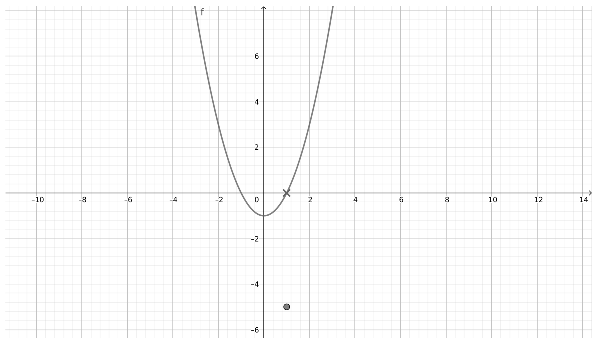
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x \leq 0 \\ 0 & si \quad x > 0 \end{cases}$



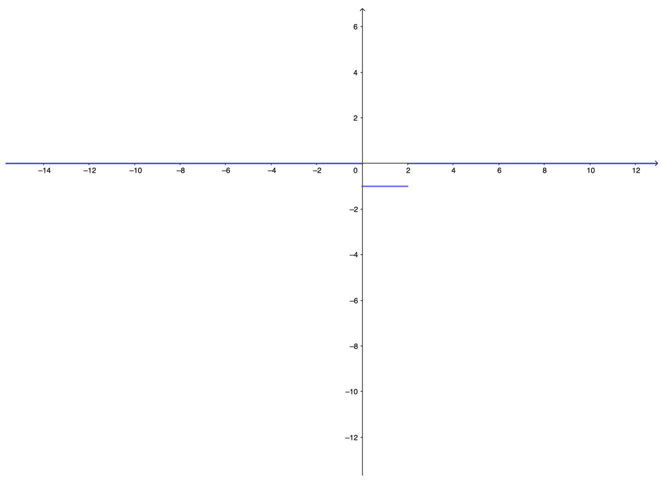
$j : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ *tal que* $j(x) = \begin{cases} -x^2 & si \quad x < 2 \\ x + 2 & si \quad x > 2 \end{cases}$



$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $k(x) = \begin{cases} -5 & si \quad x = 1 \\ x^2 - 1 & si \quad x \neq 1 \end{cases}$



$l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $l(x) = \begin{cases} -1 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & en \ otro \ caso \end{cases}$.



Ejercicio 4 (Transformaciones) *Se considera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que su gráfico se representa en la Figura.*

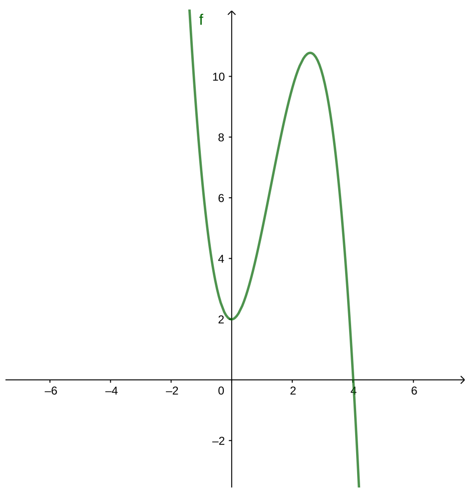


Figura 1: Ejercicio 5.1

1. *Sin encontrar la expresión de f, hallar el gráfico de las siguientes funciones:*

a) *$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $h(x)=f(x)+1$.*
Solución: *El gráfico se obtiene a partir del de f trasladándolo una unidad hacia arriba en la dirección del eje y.*

b) *$i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $i(x)=f(x)-2$.*
Solución: *El gráfico se obtiene a partir del de f trasladándolo dos unidades hacia abajo en la dirección eje y.*

c) *$j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $j(x)=f(x+1)$.*
Solución: *El gráfico se obtiene a partir del de f trasladándolo una unidad hacia la izquierda en la dirección del eje x.*

d) *$l:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $l(x)=f(x-1)$.*
Solución: *El gráfico se obtiene a partir del de f trasladándolo una unidad hacia la derecha en la dirección eje x.*

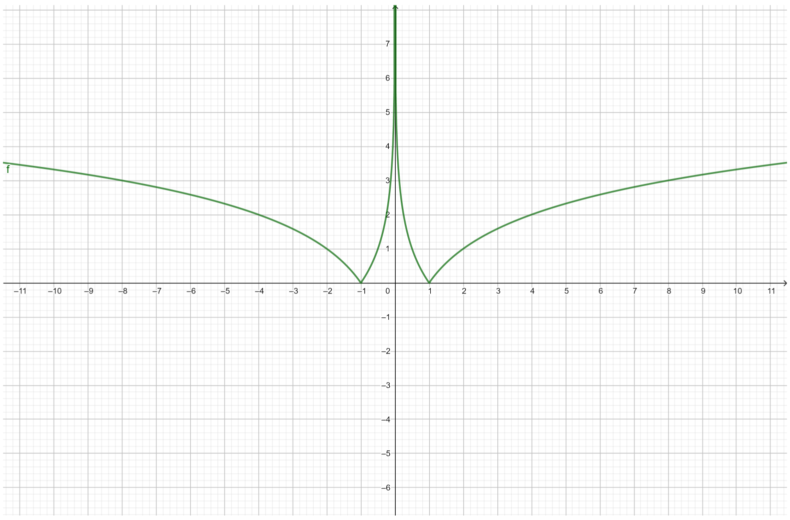
e) *$m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $m(x)=f(-x)$.*
Solución: *El gráfico se obtiene a partir del de f simetrizando respecto al eje y.*

f) *$n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $n(x)=-f(x)$.*
Solución: *El gráfico se obtiene a partir del de f simetrizando respecto al eje x.*

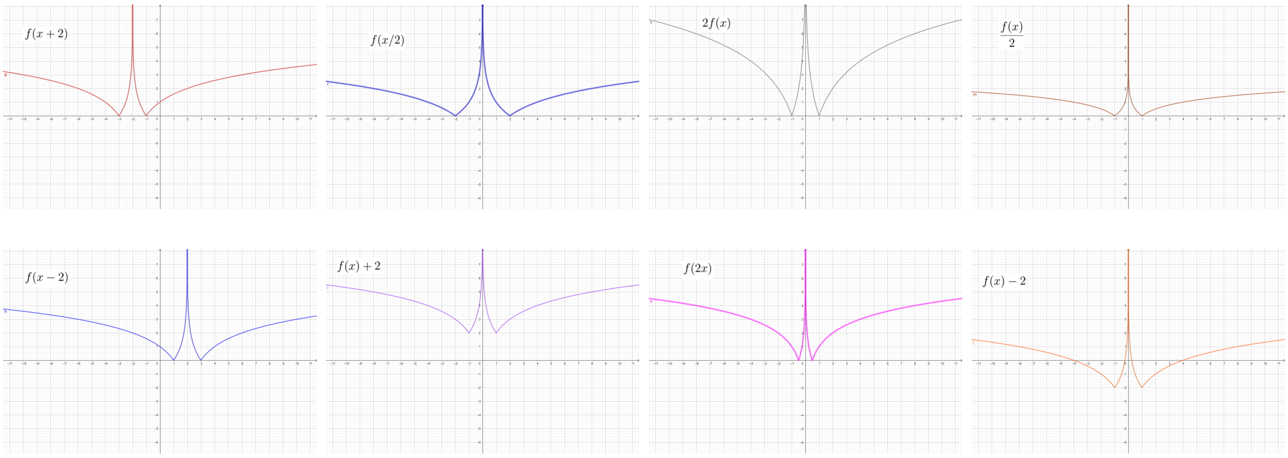
g) *$r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $r(x)=-f(-x)$.*
Solución: *El gráfico se obtiene a partir del de f simetrizando respecto al eje y y luego respecto al eje x.*

h) *$p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $p(x)=2f(x)$.*
Solución: *El gráfico se obtiene a partir del de f expandiento 2 unidades en dirección del eje y. Por ejemplo, como $f(0)=2$ tenemos que $p(0)=2f(0)=4$ y como $f(4)=0$ entonces $p(4)=2f(4)=0$.*

2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por el gráfico que se muestra a continuación:



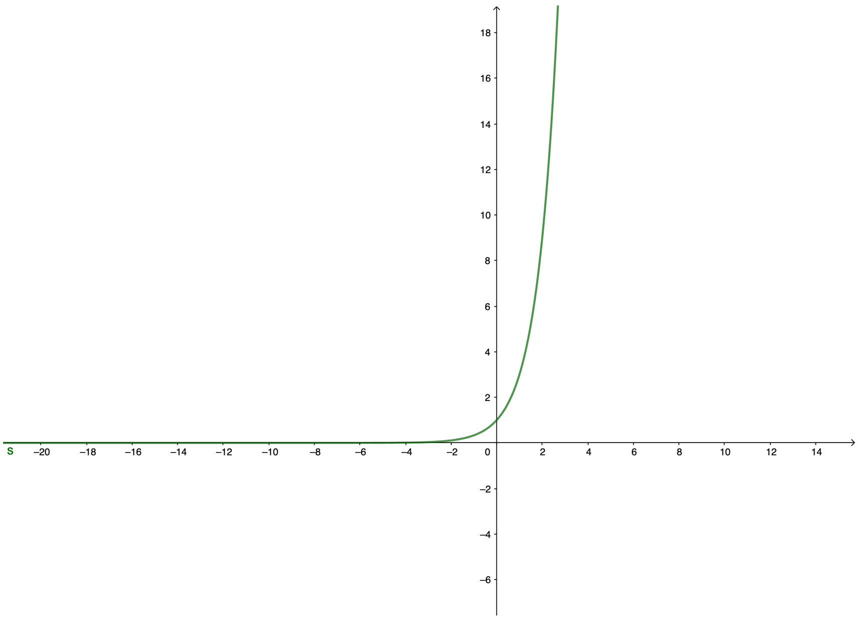
Asociar cada gráfica con una de las siguientes funciones:
Solución:



Ejercicio 5 (Funciones exponenciales)

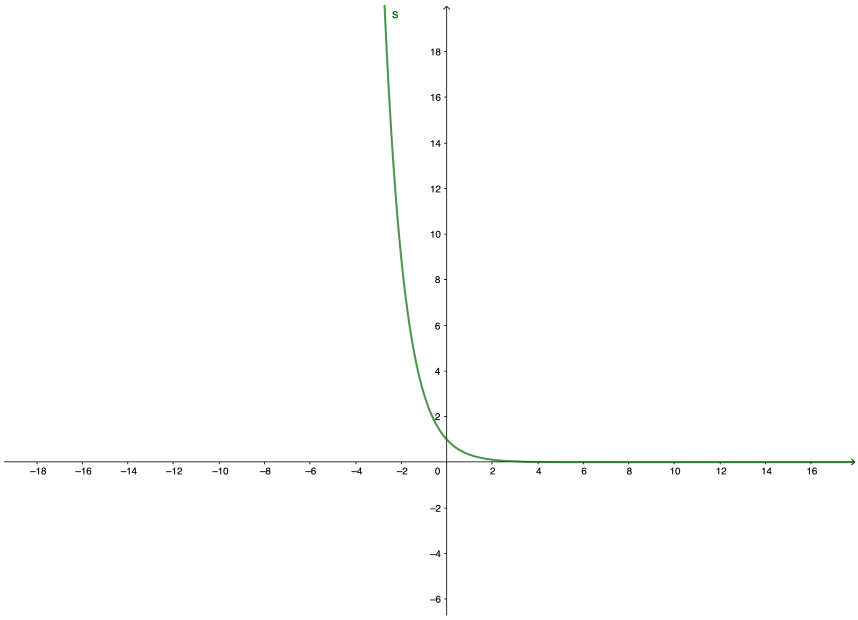
1. a) *Realizar una tabla de valores de la función $f(x) = 3^x$ y esbozar el gráfico de dicha función.*

x	$f(x)$
0	1
1	3
2	9
3	27
-1	$1/3$



b) *Repetir la parte anterior para la función* $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

x	$f(x)$
0	1
1	1/3
2	1/9
3	1/27
-1	3



c) *¿Observa alguna relación entre los gráficos? ¿Y entre las funciones?*
Solución: *Los gráficos son simétricos respecto al eje* y*. La base de una exponencial es inversa a la otra.*

Verificar con GeoGebra.

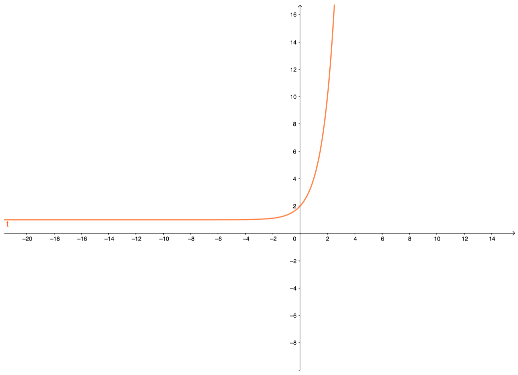
2. a) *Hallar* a *sabiendo que el punto* $(1,1)$ *pertenece a la gráfica de la función* $-a^x + 3$.
Solución: *Si* $(1,1)$ *pertenece a la gráfica entonces* $-a^1 + 3 = 1$ *y por lo tanto* $a = 2$

b) *Hallar* c *sabiendo que la gráfica de* $f(x) = c2^x + 4$ *pasa por el punto* $(2,16)$.
Solución: *Como la gráfica pasa por el punto* $(2,16)$ *entonces* $f(2) = c2^2 + 4 = 16$ *y por lo tanto* $c = 3$

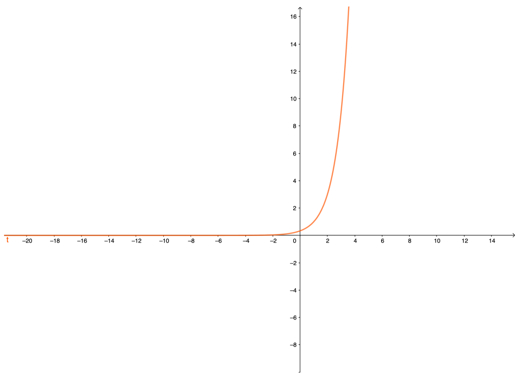
c) *Hallar* k *tal que el punto* $(3,7)$ *pertenezca a la gráfica de la función* $f(x) = 3^{x-1} + k$.
Solución: *En este caso* $f(3) = 3^{3-1} + k = 7$ *y deducimos que* $k = -2$.

3. Utilizando las transformaciones vistas en el ejercio 5, graficar la función $h(x)$*, siendo:*

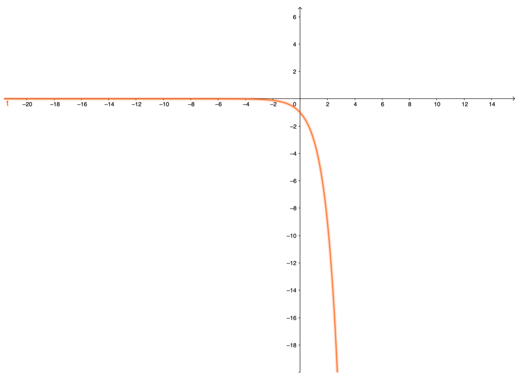
a) $h(x) = 3^x + 1$



b) $h(x) = 3^{x-1}$



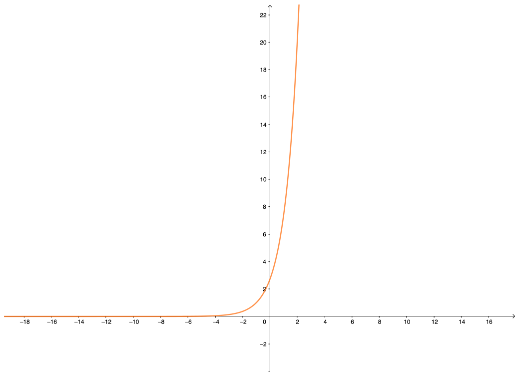
c) $h(x) = -3^x$



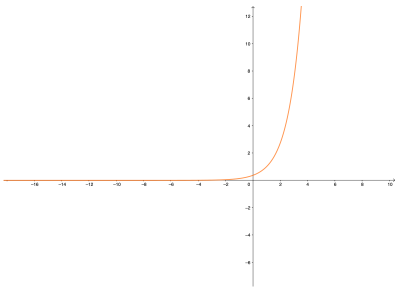
Verificar con GeoGebra.

4. *a)* *Graficar las siguientes funciones:*

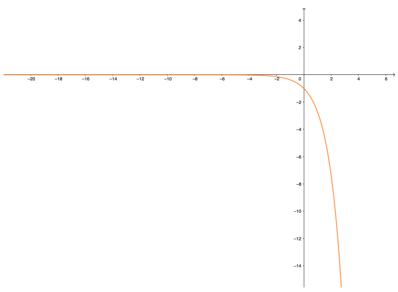
   1) $a(x) = e^{x+1}$



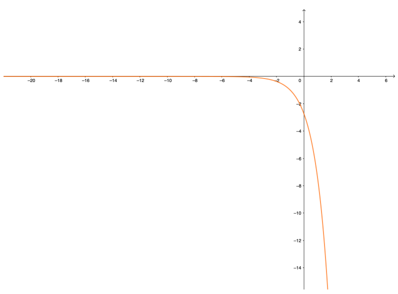
   2) $b(x) = e^{x-1}$



   3) $c(x) = -e^{x}$



   4) $d(x) = -e^{x+1}$



   Verificar con GeoGebra.

   b) *Para cada una de las funciones de la parte anterior hallar el conjunto preimagen de* -1 *y de* $[-1, 1]$

   Solución:

1) $a^{-1}(-1) = \emptyset$
$a^{-1}([-1,1]) = (-\infty,-1]$

2) $b^{-1}(-1) = \emptyset$
$b^{-1}([-1,1]) = (-\infty,1]$

3) $c^{-1}(-1) = \{0\}$
$c^{-1}([-1,1]) = (-\infty,0]$

4) $d^{-1}(-1) = \{-1\}$
$d^{-1}([0,+\infty)) = (-\infty,-1]$

5. *En presencia de un antibiótico, se observa que un cultivo de bacterias decrece un* $5\,\%$ *cada 8 horas, siendo la población inicial de 1000 individuos.*

   a) *Hallar una fórmula que determine la cantidad de bacterias* $C(t)$, *siendo* t *el tiempo en días desde que se toma el antibiótico.*
   Solución: *Luego de 8 horas la cantidad de bacterias será* $(0,95)1000$ *ya que decrece un* $5\,\%$. *Luego de 24 horas (1 dia) la cantidad será* $(0,95)^3 1000$ *Por lo tanto luego de* t *dias la fórmula será* $C(t) = (0,95)^{3t}1000$

   b) *Determinar la cantidad de bacterias luego de 2 días de antibióticos.*
   Solución: $C(2) = (0,95)^6 1000$

   c) *Hallar cuánto tiempo es necesario para reducir la población de bacterias a la mitad de la inicial.*
   Solución: *Planteamos* $(0,95)^{3t}1000 = 500$, *luego* $((0,95)^3)^t = \frac{1}{2}$ *y luego* t *es aproximadamente* $4,5$ *dias.*

   d) *Determinar la cantidad de individuos que se pierden en el quinto día de suministro del medicamento.*
   Solución: *La cantidad de individuos que se pierden es* $1000 - C(5)$ *que es aproximadamente* 537 *bacterias*

6. *Una sustancia radiactiva se desintegra en forma tal que la cantidad de masa (en gramos) restante después de* t *días está dada por la función:*

$$N(t) = 10e^{-0,1t}$$

   a) *¿Cuál será la masa restante luego de una semana?*
   Solución: *Debemos hallar* $N(7) = 10e^{(-0,1)7}$ *es aproximadamente* $4,97$.

   b) *¿Cuánto tiempo demora en reducirse la masa inicial a su tercera parte?*
   Solución: *La masa incial es* $N(0) = 10$, *luego queremos* t *tal que* $N(t) = 10e^{-0,1t} = \frac{10}{3}$, *o sea* $e^{-0,1t} = \frac{1}{3}$ *y* $-0,1t = ln(\frac{1}{3})$ *y nos da aproximadamente* $t = 10,99$.

   c) *Sea* T_m *el tiempo que demora en reducirse a la mitad.*

   d) *Para un modelo exponencial general de la forma* $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ *¿Cuál es la relación entre* T_m *y* λ*?*
   Solución: *Tenemos que* $N(t) = N_0 e^{-\lambda T_m} = \frac{N_0}{2}$, *o sea,* $e^{-\lambda T_m} = \frac{1}{2}$ *y pot lo tanto* $-\lambda T_m = ln(\frac{1}{2})$ *y* $T_m = -\frac{ln(\frac{1}{2})}{\lambda}$

Ejercicio 6 (Funciones Logarítmicas)

1. *Hallar el dominio de las siguientes funciones:*

   a) $f(x) = \log_5(2x+1)$
   Solución: *Los* x *en el dominio de* f *deben verificar que* $2x+1 > 0$ *y pot lo tanto* $x > -\frac{1}{2}$.

   b) $g(x) = \log_2(x+6)$
   Solución: *Los* x *en el dominio de* f *deben verificar que* $x+6 > 0$ *y pot lo tanto* $x > -6$.

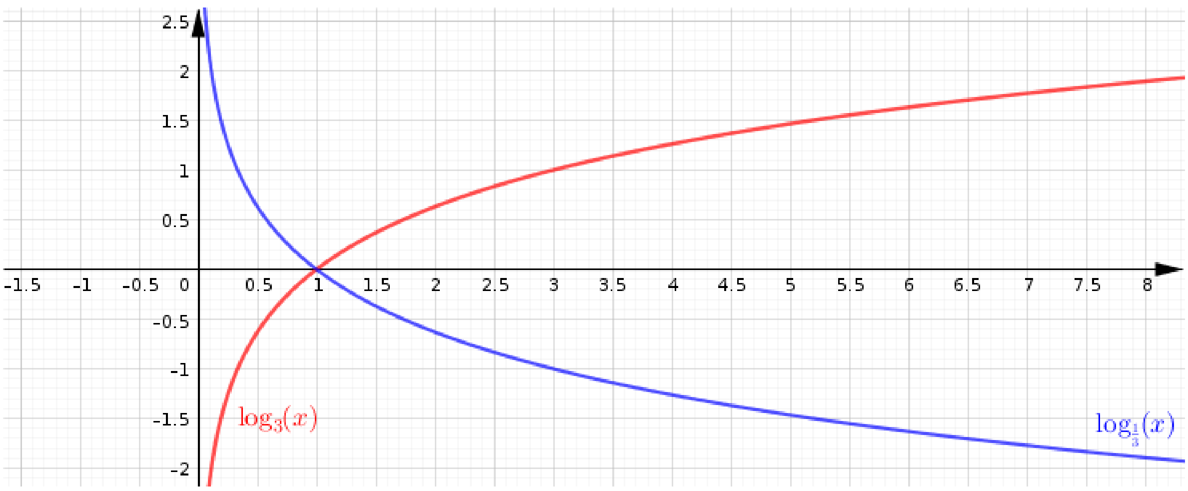
   c) $f(x) = \ln(x+8)$
   Solución: *Los* x *en el dominio de* f *deben verificar que* $x+8 > 0$ *y pot lo tanto* $x > -8$.

2. a) *Realizar una tabla de valores de la función $f(x) = log_3(x)$ y esbozar el gráfico de dicha función.*

x	$f(x)$
1	0
3	1
9	2
27	3
1/3	-1

b) *Repetir la parte anterior para la función $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$.*

x	$f(x)$
1	0
3	-1
9	-2
27	-3
1/3	1



c) *¿Observa alguna relación entre los gráficos? ¿Y entre las funciones?*
Solución: *Los gráficos son simétricos respecto al eje x. Las bases del logaritmo son una inversa de la otra*

d) *Comparar con los gráficos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ del ejercicio 5.1.*
Solución: *La gráfica de 3^x y la de $log_3(x)$ son una simétrica de la otra respecto a la recta $y = x$. La gráfica de $(\frac{1}{3})^x$ y la de $log_{\frac{1}{3}}(x)$ son una simétrica de la otra respecto a la recta $y = x$.*

Verificar con GeoGebra.

3. a) *Hallar a tal que la gráfica de $f(x) = log_a(x-3)+1$ pase por el punto $(7, 0)$.*
Solución: *Buscamos a tal que $0 = 1 + log_a(7-3)$, es decir, $log_a(4) = -1$. Por la definición misma de logaritmo, tenemos que $a^{-1} = 4$, de donde $a = \frac{1}{4}$.*

b) *Hallar c de modo que el punto $(27, 7)$ pertenezca a la gráfica de la función $f(x) = clog_5(x-2)+1$*
Solución: *Tenemos que $clog_5(25) + 1 = 7$. Claramente $c \neq 0$ y por lo tanto $log_5(25) = \frac{6}{c}$ que por definición de logaritmo implica que $5^{\frac{6}{c}} = 25$ y por lo tanto $c = 3$.*

c) *Hallar k tal que la gráfica de la función $f(x) = -log_3(x+5)+k$ pase por el punto $(4, 2)$.*
Solución: *Buscamos k para que $2 = -log_3(4+5)+k$ o sea $-2+k = log_3(9) = 2$ y $k = 4$.*

4. *Resolver analíticamente las siguientes ecuaciones y verificar gráficamente con Geogebra el resultado obtenido:*

   a) $\log_2(3x+13) - log_2(x-1) = 2$
   Solución: *La ecuación anterior tiene sentido sólo cuando* $3x+13>0$ *y* $x-1>0$*, es decir: cuando* $x>1$*. Para todo* $x>1$*, tenemos que* $log_2(3x+13) - log_2(x-1) = 2 \Leftrightarrow log_2(\frac{3x+13}{x-1}) = log_2(4) \Leftrightarrow \frac{3x+13}{x-1} = 4 \Leftrightarrow x = 17$ *Por lo tanto el conjunto solución es* $S = \{17\}$

   Para las siguientes partes daremos solo el conjunto solución. Verificar siempre si las soluciones obtenidas se encuentran en el conjunto donde quedan bien definidos los logaritmos que aparecen en la ecuación.

   b) $\log_3(x+1) + \log_3(x+5) = \log_3(7x+17)$
   Solución: *Conjunto solución* $S = \{4\}$

   c) $\log_5(x+1) = 1 - \log_5(x-3)$
   Solución: *Conjunto solución* $S = \{4\}$

   d) $\ln(x+2) + \ln(x+1) = \ln 3 + 2\ln 2$
   Solución: *Conjunto solución* $S = \{2\}$

5. *Leer el ejemplo 225 página 275 del libro de Carena y completar la siguiente tabla en la que I denota la intensidad del sonido en W/m2 y N denota el nivel de intensidad en dB.*

Fuente de sonido	*I*	*N*
Despertado	10^{-4}	*80*
Avión despegando	*10*	*130*
Camión de basura	10^{-2}	*100*
Aspiradora	10^{-5}	*70*
Bocina	*0.1*	*110*
Sonido de fondo en un campo	10^{-9}	*30*

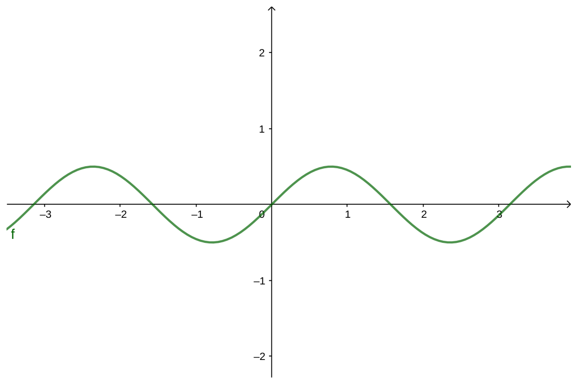
La fórmula que relaciona I con N es

$$N = 10log(10^{12}I)$$

Si $I = 10^{-4}$ *entonces* $N = 10log(10^8) = 80$.
Si $I = 10$ *entonces* $N = 10log(10^{13}) = 130$
Si $N = 100$ *entonces* $100 = 10log(10^{12}I)$ *por lo tanto* $10 = log(10^{12}I)$ *y* $10^{10} = 10^(12)I$ *por lo tanto* $I = 10^{-2}$.
Si $N = 70$ *entonces* $70 = 10log(10^{12}I)$ *por lo tanto* $7 = log(10^{12}I)$ *y* $10^7 = 10^{12}I$ *por lo tanto I es* 10^{-5}.
Si $I = 0,1$ *entonces* $N = 10log(10^{12}10^{-1}) = 110$
Si $N = 30$ *entonces* $30 = 10log(10^{12}I)$ *por lo tanto* $3 = log(10^{12}I)$ *y* $10^3 = 10^{12}I$ *por lo tanto* $I = 10^{-9}$

6. *El terremoto ocurrido en San Juan (Argentina) en 1944 tuvo una magnitud de 7,8 en la escala de Richter, mientras que el del año 1894 había sido de magnitud 8,6. ¿Cuántas veces más intenso fue el de 1894 que el de 1944?*
   Solución: *La escala de Richter es una escala logarítmica en que cada grado más de magnitud corresponde a una multiplicación por un factor 10 de la amplitud del terremoto, y a una multiplicación por un factor* $10^{3/2}$ *(aproximadamente* $31,6$*) de la energía producida. Así, como* $8,6 - 7,8 = 0,8$*, se deduce que el terremoto de 1894 tuvo* $10^{0,8}$ *(aproximadamente* $6,31$*) veces la amplitud del terremoto de 1944, mientras produjo* $10^{3/2\times 0,8} = 10^{1,2}$ *(aproximadamente* $15,85$*) veces la energía del de 1944.*

Ejercicio 7 (Funciones Trigonométricas) 1. *La siguiente gráfica corresponde a la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Entonces:*



a) $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$

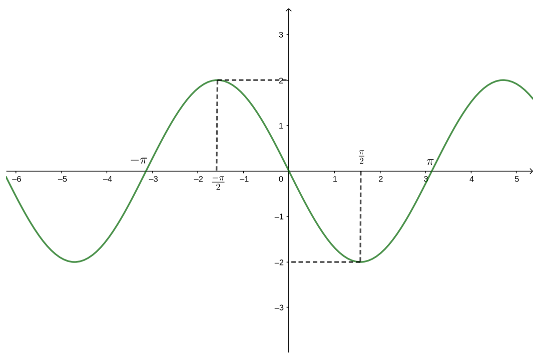
b) $f(x) = \cos(x).\operatorname{sen}(x)$

c) $f(x) = \operatorname{sen}(x) - \cos(x)$

d) $f(x) = \cos(x) - \operatorname{sen}(x)$

Solución: *La opción correcta para este gráfico es:* $f(x) = \cos(x).\operatorname{sen}(x)$ *Para todas las opciones, excepto* $f(x) = \cos(x).\operatorname{sen}(x)$*, la imágen de* 0 *es distinta de* 1*. Además, las raíces de la función coinciden con los ceros de la función* $\operatorname{sen}(x)$ *y con los ceros de la función* $\cos(x)$*.*

2. *La siguiente gráfica*



corresponde a la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que:*

a) $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

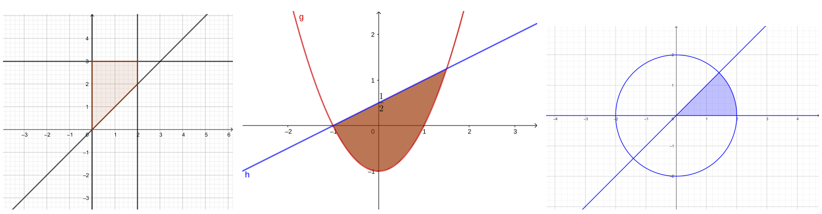
b) $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $f(x) = 2\cos(x) + \frac{\pi}{2}$

d) $f(x) = \cos(2x) + \frac{\pi}{2}$

Solución: *La solución en este caso es* $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$*. Observar que los máximos y mínimos de la función son* 2 *y* -2 *por lo que tiene que ser de la forma* $2\cos(u)$*. Además los ceros de la función graficada están* $\frac{\pi}{2}$ *unidades a la izquierda de los ceros de la función* $\cos(x)$*, por lo que la expresión debe ser de la forma* $2\cos(x + \frac{\pi}{2})$*.*

Ejercicio 8 1. *Representar el conjunto de puntos de las región sombreada en cada una de las siguientes gráficas:*



Solución:

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 3\}$

b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\}$

c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$

2. Resolver gráficamente los siguientes sistemas de inecuaciones:

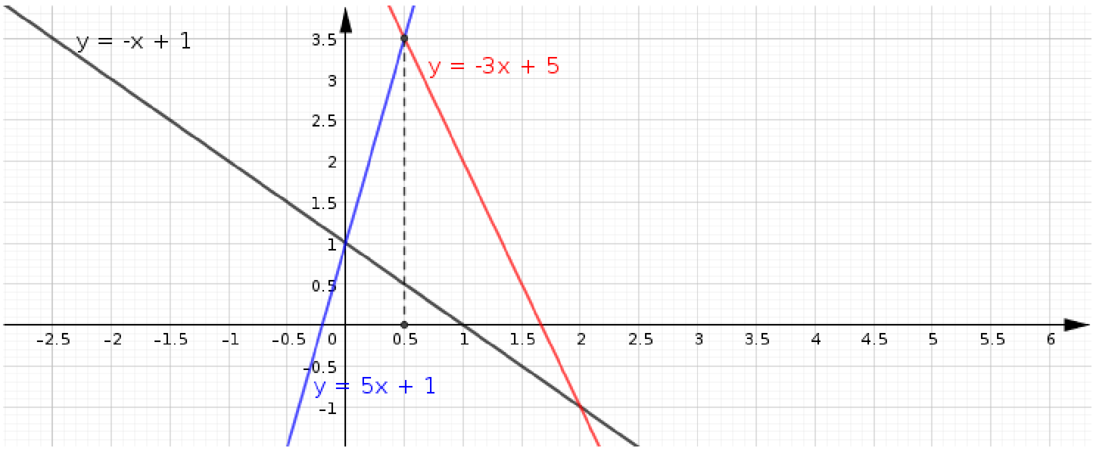
a) $\begin{cases} 1 + 5x > 5 - 3x \\ 0 \leq 1 - x < 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + 4x + 1 \geq 0 \\ x(x-1)(x-2)(x-3) < 0 \end{cases}$

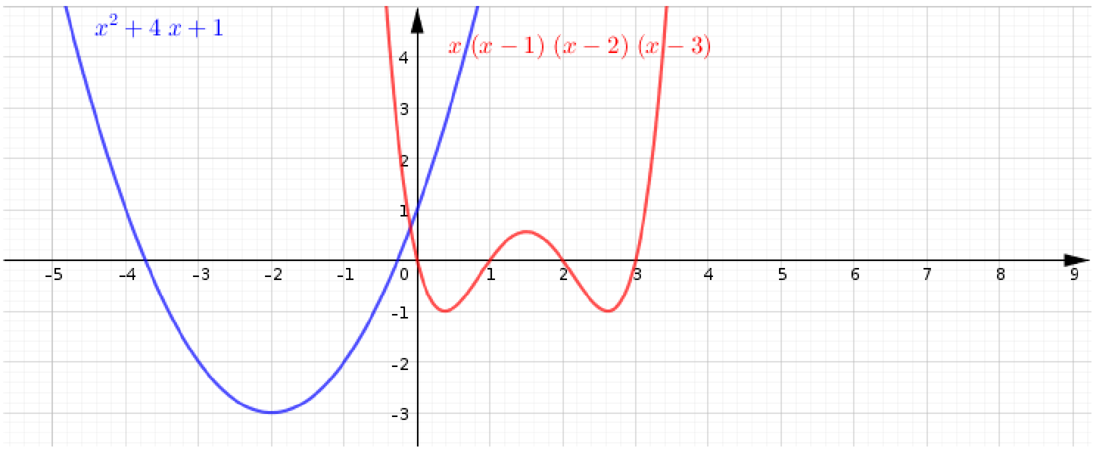
c) $\begin{cases} \log(x+3) > 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_2(x+6) \leq 3 \\ 0 \leq 1 - x < 1 \end{cases}$

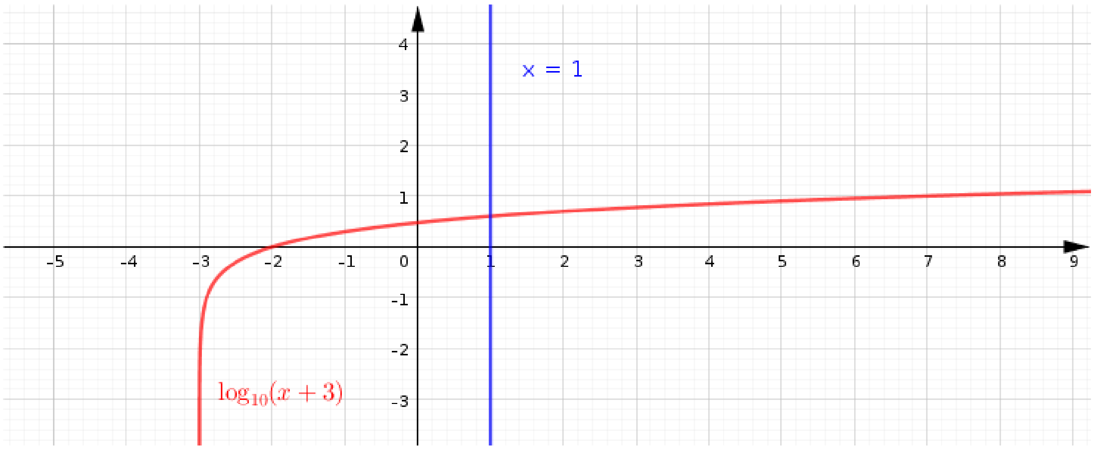
Solución:

a) 

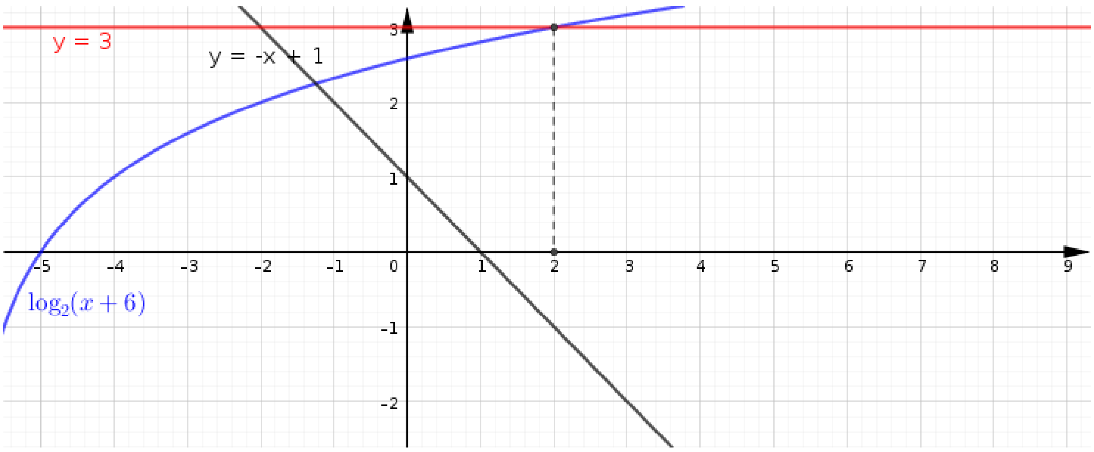
$Sol = (\frac{1}{2}, 0)$

b) 

$Sol = (0,1) \cup (2,3)$

c) 

$Sol = (-2, 1]$

d) 

$Sol = (0, 1]$