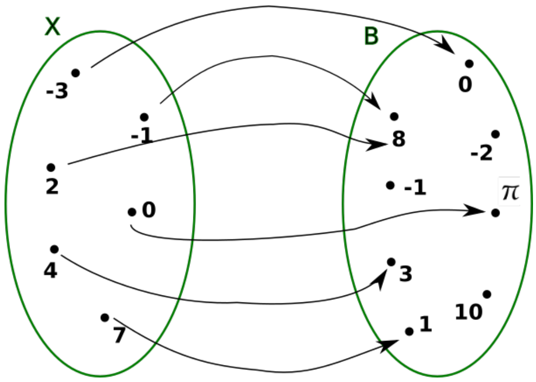
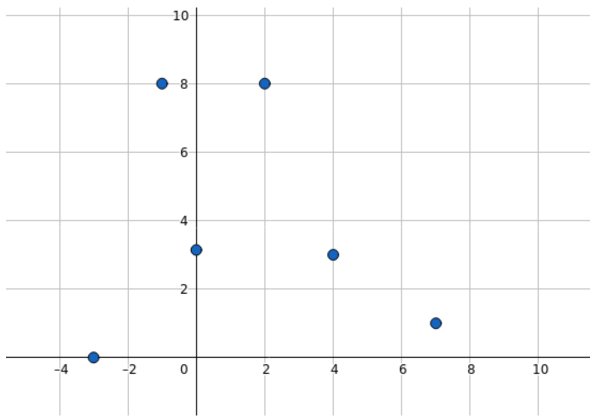
Soluciones del práctico 7: Funciones - Parte I

Ejercicio 1 (Evaluar una función) *1. Se consideran los conjuntos* $X = \{-3, -1, 0, 2, 4, 7\}$ *y* $B = \{-2, -1, 0, 1, 3, \pi, 8, 10\}$ *y la función* $f : X \to B$ *tal que* $f(-3) = 0,\ f(-1) = 8,\ f(0) = \pi,\ f(2) = 8,\ f(4) = 3,\ f(7) = 1.$
Representar mediante un diagrama de flechas y efectuar el gráfico de f *en un sistema de ejes cartesianos.*

Solución:



El gráfico de f *en un sistema de ejes cartesianos resulta*



2. *Se considera* $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

   Solución:

   a) Calcular:

   1) $g(0) = -2$
   2) $g(-1) = -1/2$
   3) $g(\pi) = \frac{\pi+2}{\pi-1}$
   4) $g(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-1}$
   5) $g(3) = 5/2$
   6) $g(-2) = 0$

   b) Calcular la preimagen de $\{0\}$ *y* $\{1\}$

   - $g^{-1}(0) = \{-2\}$
   - $g^{-1}(1) = \emptyset$

3. *Se considera* $h : \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{R}$ *tal que* $h(x) = \frac{(2x+1)^2}{x^2-2x}$. *Calcular:*

   Solución:

   a) Calcular:

1) $h(-1) = 1/3$

2) $h(-\pi) = \frac{(-2\pi+1)^2}{\pi^2+2\pi}$

3) $h(-\sqrt{3}) = \frac{(-2\sqrt{3}+1)^2}{3+2\sqrt{3}}$

4) $h(\frac{1}{3}) = -5$

5) $h(x+1) = \frac{(2x+3)^2}{x^2-1}$

6) $h(x-1) = \frac{(2x-1)^2}{x^2-4x+3}$

b) *Calcular la preimagen de* $\{4\}$ *y* $\{0\}$

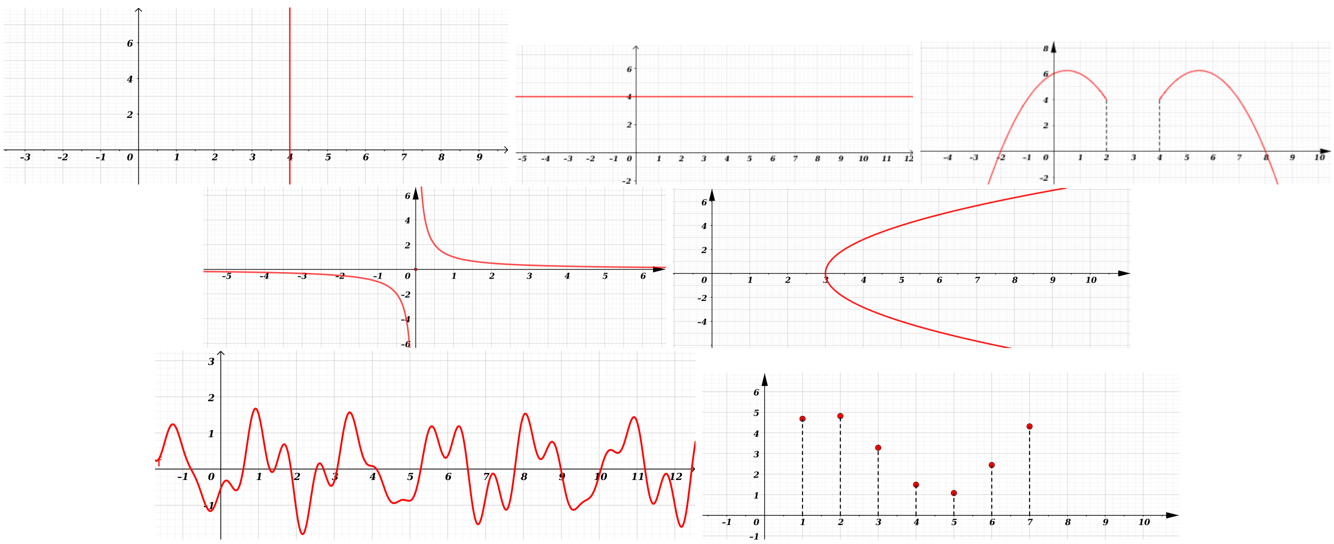
- $h^{-1}(4) = \{-1/12\}$
- $h^{-1}(0) = \{-1/2\}$

Ejercicio 2 *Consideremos las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 1$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *y* $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = sen(x)$, *para todo* $x \in [0, 2\pi]$.
Hallar el conjunto preimagen del conjunto $\mathbb{Z}$ *por* f *y el conjunto preimagen del conjunto* $\mathbb{R}^+$ *por* g.

Solución:

Ejercicio 3 (¿Función o no Función?)

1. a) *Indicar cuál de los siguientes gráficos representa una función en* $\mathbb{R}$ *:*



Solución: *Las única que son funciones definidas en* $\mathbb{R}$ *son la segunda, la cuarta y la sexta, las cuales para cada valor de x existe un único valor en el codominio al cual está asociado.*

b) *En caso de no ser función, analizar si es posible definir* $U \subset \mathbb{R}$ *tal que el gráfico corresponda a una función definida en* U.

Solución:

Para la primera no es posible.

Para la tercera si el dominio es $U = \mathbb{R} \setminus [2, 4]$ *entonces es función.*

Para la quinta si el dominio es $U = \{3\}$ *entonces es función.*

Para la septima si el dominio es $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *entonces es función.*

Ejercicio 4 (Dominio e Imagen) 1. *Hallar el dominio de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \sqrt{3x-6}$
Solución: $[2, +\infty)$

b) $f(x) = 1 - e^x$
Solución: $\mathbb{R}$

c) $f(x) = \log(x+5)$
Solución: $(-5, +\infty)$

d) $f(x) = |2x-5|$
Solución: $\mathbb{R}$

e) $f(x) = x^2 - x + 1$
Solución: $\mathbb{R}$

f) $f(x) = x^3 + 27$
Solución: $\mathbb{R}$

2. *Con ayuda de GeoGebra verificar las respuestas de la parte anterior y hallar la imagen de cada función.*

   a) $f(x) = \sqrt{3x-6}$
   Solución: $[0, +\infty)$

   b) $f(x) = 1 - e^x$
   Solución: $(-\infty, 1)$

   c) $f(x) = \log(x+5)$
   Solución: $\mathbb{R}$

   d) $f(x) = |2x-5|$
   Solución: $[0, +\infty)$

   e) $f(x) = x^2 - x + 1$
   Solución: $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

   f) $f(x) = x^3 + 27$
   Solución: $\mathbb{R}$

Ejercicio 5 (El conjunto "Gráfico de una función") *Se consideran las siguientes funciones:*

1. $f(x) = 2x$
2. $g(x) = 2x^2$
3. $h(x) = \sqrt{x^3+1}$

Indicar si los siguientes puntos pertenecen al gráfico de alguna de las funciones anteriores

1. $A = (0,0)$
2. $B = (1,2)$
3. $C = (-1,2)$
4. $D = (1,0)$
5. $E = (2,2)$
6. $F = (2,3)$

Solución:

1. *Los puntos A y B pertenecen a la gráfica de f.*
2. *Los puntos A, B y C pertenecen a la gráfica de g.*
3. *El punto F pertenece a la gráfica de h.*

Ejercicio 6 (Dominio y ceros de una función) *Determinar dominio y ceros de las siguientes funciones:*

1. $f(x) = \sqrt{x-1}\log(x+4)$
   Solución: $[1, +\infty)$
2. $f(x) = \frac{\sqrt{-2x+8}}{x^3+x^2}$
   Solución: $(-\infty, 0) \cup (0, 4]$
3. $f(x) = \frac{1}{\log(x^2+10x+25)}$
   Solución: $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$
4. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+6x+5}}{\log(x+1)}$
   Solución: $(-1, +\infty)$
5. $f(x) = \frac{x+3}{x^2-16x+64}$
   Solución: $\mathbb{R} \setminus \{-8\}$
6. $f(x) = \left|\frac{-x+2}{x-3}\right|$
   Solución: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

Verificar con GeoGebra.

1. $f(x) = \sqrt{x-1}\log(x+4)$
   Solución: $\{1\}$
2. $f(x) = \frac{\sqrt{-2x+8}}{x^3+x^2}$
   Solución: $\{4\}$
3. $f(x) = \frac{1}{\log(x^2+10x+25)}$
   Solución: $\emptyset$
4. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+6x+5}}{\log(x+1)}$
   Solución: $\{-5, -1\}$
5. $f(x) = \frac{x+3}{x^2-16x+64}$
   Solución: $\{-3\}$
6. $f(x) = \left|\frac{-x+2}{x-3}\right|$
   Solución: $\{2\}$

Ejercicio 7 (Interpretación Gráfica) *La representación gráfica de una función $f : [0,6] \to \mathbb{R}$ es la siguiente:*

1. *¿Cuál es la imagen de $x = 1$?.*

   Solución: $f(1) = 3$

2. *Determinar $f(5)$.*

   Solución: $f(5) = 6$

3. *Hallar un valor de x tal que $f(x) < 0$.*

   Solución: $x = 3$

4. *¿Para qué valores de x se tiene $f(x) = 1$?*

   Solución: $f(x) = 1$ *si y sólo si* $x \in \{0, 2, 4\}$

5. *¿Cuántas raíces tiene f?*

   Solución: *f tiene dos raices.*

6. *¿Cuántos valores de x satisfacen $f(x) = 5$?*

   Solución: *dos valores.*

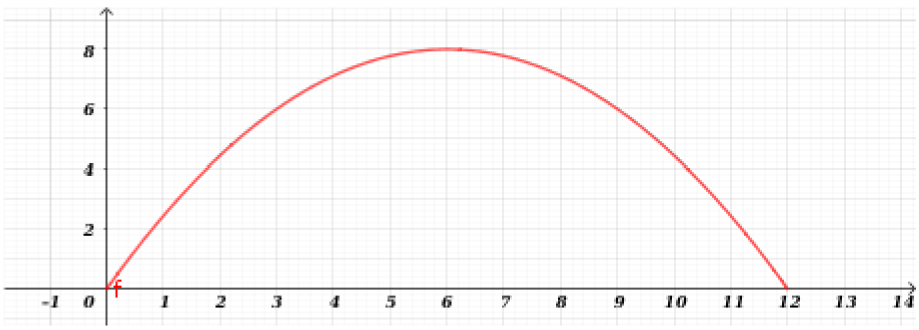
7. *Determinar si $y = 7$ pertenece a la imagen de f*

   Solución: 7 *no pertenece a la imagen de f.*

8. *Hallar una preimagen de* 6.

   Solución: 5 *es una preimagen de* 6.

Ejercicio 8 (Interpretación Gráfica) *La gráfica corresponde a la altura de un objeto en función del tiempo transcurrido desde el momento de su lanzamiento hasta que llega al suelo.*



Observando el gráfico, determinar:

1. *¿Cuánto tiempo demoró el objeto en llegar al suelo?*

   Solución: *El objeto demoró 12 segundos en llegar al suelo.*

2. *¿Cuál fue la altura máxima alcanzada, y en qué momento la alcanzo ?*

   Solución: *La altura máxima alcanzada es de 8 metros y se alcanza a los 6 segundos.*

3. *¿A qué altura se encontraba a los 3 segundos luego de su lanzamiento? ¿Alcanzó esa altura en algún otro momento?*

   Solución: *A los 3 segundos se encontraba a una altura de 6 metros y vuelve a alcanzar esta altura a los 9 segundos.*

4. *¿En qué momentos se encontraba a una altura aproximada de 7 metros?*

   Solución: *A los 4 y 8 segundos.*

Ejercicio 9 (Funciones Lineales) *Las funciones lineales son aquellas de la forma $f(x) = ax + b$ con a y b en $\mathbb{R}$. Observar que el gráfico de f es una recta.*

1. *Recordar la interpretación de a y b.*
2. *Dibujar las siguientes funciones lineales:*

   a) $f(x) = x + 1$
   b) $f(x) = x - 1$
   c) $f(x) = 2x + 3$
   d) $f(x) = 2x - 1/2$
   e) $f(x) = -3x + 1$
   f) $f(x) = -3x - 1$
   g) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$
   h) $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$
   i) $f(x) = 5x$

3. *Determinar si los puntos P del plano pertenecen al gráfico de la función f indicada:*

Punto	*Función*	**Solución**
$P = (1, 0)$	$f(x) = x - 1$	*Si*
$P = (-1, 1)$	$f(x) = 2x + 3$	*Si*
$P = (1/2, 1/2)$	$f(x) = 2x - 1/2$	*Si*
$P = (1/3, 0)$	$f(x) = -3x + 1$	*Si*
$P = (2, 0)$	$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$	*Si*
$P = (1, 1)$	$f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$	*No*

4. *Grados Celsius vs. Grados Fahrenheit. La relación de conversión entre ambas escalas está dada por la fórmula:*

$$f(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

   siendo x la temperatura expresada en grados Celsius y $f(x)$ la misma temperatura expresada en grados Fahrenheit.

   a) *Graficar la recta correspondiente a los grados Fahrenheit en función de los grados Celsius.*
   b) *¿Cuántos grados Fahrenheit son 20 grados centígrados?*
   Solución: $f(20) = \frac{9}{5} \times 20 + 32 = 68$.
   c) *¿Cuántos grados Celsius son 50 grados Fahrenheit?*
   Solución: $50 = \frac{9}{5}x + 3 \Leftrightarrow x = 10$.
   d) *¿Para qué valores de temperatura, expresada en grados Celsius, la temperatura equivalente en grados Fahrenheit es negativa?*
   Solución: $f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{9}{5}x + 32 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{160}{9} \approx -17,7$.

5. *Supongamos que un taxi cobra una tarifa inicial fija de $44,30$ pesos uruguayos (bajada de bandera), más un costo de $0{,}257$ por cada 10 metros recorridos.*

   a) *Hallar la función que indica el costo del viaje en función de los metros recorridos.*
   Solución: *La función es* $f(x) = 0,0257x + 44,3$.
   b) *Determinar el costo de un viaje de 2 kilómetros de recorrido.*
   Solución: *Se debe calcular $f(2000)$ lo cual es igual a $f(2000) = 0,0257 \times 2000 + 44,3 = 95,7$ pesos.*
   c) *Determinar la cantidad de kilómetros que podemos recorrer si disponemos de 70 pesos uruguayos.*
   Solución: *Se tiene que hallar x y luego $x/1000$ para que $f(x) = 70$. Resolvemos entonces $70 = 0,0257x + 44,3$, encontrando $x = 1000$. Por lo tanto con 70 pesos se puede recorrer un kilómetro.*

6. *En un cierto empleo se paga un monto fijo mensual de 2300 pesos uruguayos, más 120 por cada hora de trabajo.*

a) *Hallar la función que indique el sueldo mensual de un empleado en función de las horas de trabajo.*
Solución: $f(x) = 120x + 3200$

b) *Determinar lo que cobrará un empleado en el mes que trabajó 20 horas.*
Solución: *Se debe calcular* $f(20)$, *lo cual es igual a* $120 \times 20 + 3200 = 4700$ *pesos*

c) *Determinar la cantidad de horas que debe trabajar un empleado al mes para cobrar* 23900 *pesos.*
Solución: *Se debe hallar* x *para que* $23900 = 120x + 3200$ *y ésto corresponde a* $x = 180$ *horas.*

d) *¿Cuál es el mínimo de horas mensuales que deberá trabajar para que el sueldo supere los* 25000 *pesos uruguayos?*
Solución: *Se debe resolver la inecuación* $f(x) > 25000$ *lo cual equivale en hallar* x *para que* $120x + 3200 > 25000$ *cuya solución es el conjunto* $\{x : x > 190\}$.