



## Ejercicio 1 (IC en sumatorias)

Probar las siguientes igualdades por el método de inducción completa:

1.  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ .

**Solución:** Tomamos de caso base  $n = 1$ . Para este valor se tiene que  $\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$  por lo tanto el caso base es cierto.

Ahora el paso inductivo, la hipótesis de inducción es  $\sum_{i=1}^h i = \frac{h(h+1)}{2}$  y queremos probar  $\sum_{i=1}^{h+1} i = \frac{(h+1)(h+2)}{2}$ . Para esto operamos y usamos la hipótesis inductiva (en la segunda igualdad)

$$\sum_{i=1}^{h+1} i = \sum_{i=1}^h i + (h+1) = \frac{h(h+1)}{2} + (h+1) = \frac{h^2 + h + 2h + 2}{2} = \frac{(h+1)(h+2)}{2}$$

esto prueba el paso inductivo, terminando la inducción completa y probando lo pedido.

2.  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

**Solución:** Tomamos de caso base  $n = 1$ . Para este valor se tiene que  $\sum_{i=1}^1 i^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$ , por lo tanto el caso base es cierto.

Ahora el paso inductivo, la hipótesis de inducción es  $\sum_{i=1}^h i^2 = \frac{h(h+1)(2h+1)}{6}$  y queremos probar  $\sum_{i=1}^{h+1} i^2 = \frac{(h+1)(h+2)(2(h+1)+1)}{6}$ . Al igual que antes, operamos y usamos la hipótesis de inducción (en la segunda igualdad)

$$\sum_{i=1}^{h+1} i^2 = \sum_{i=1}^h i^2 + (h+1)^2 = \frac{h(h+1)(2h+1)}{6} + (h+1)^2.$$

Ahora una opción es aplicar distributiva y seguir como en 1. Una alternativa es no distribuir los factores que aparecen en las cuentas, esto lo logramos sacando de factor común  $(h+1)$ , de esta manera:

$$\begin{aligned} \frac{h(h+1)(2h+1)}{6} + (h+1)^2 &= (h+1) \left( \frac{h(2h+1)}{6} + h+1 \right) = \\ (h+1) \left( \frac{h(2h+1) + 6h+6}{6} \right) &= \frac{(h+1)(2h^2 + 7h + 6)}{6}. \end{aligned}$$

Ahora el polinomio  $2h^2 + 7h + 6$  tiene raíces  $-2$  y  $-\frac{3}{2}$  por lo tanto se puede factorizar en la forma  $2(h+2)(h+\frac{3}{2}) = (h+2)(2h+3) = (h+1)(h+2)(2(h+1)+1)$ . Resumiendo

$$\sum_{i=1}^{h+1} i^2 = \frac{(h+1)(2h^2 + 7h + 6)}{6} = \frac{(h+1)(h+2)(2(h+1)+1)}{6}$$

terminando de probar el paso inductivo, lo que prueba la inducción completa.

3. Si  $a \neq 1$ , entonces  $\sum_{i=0}^n a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$  (suma geométrica).



## Práctico 4: Inducción completa



### Solución:

Tomamos de caso base  $n = 0$ . Para este valor se tiene que  $\sum_{i=0}^0 a^i = 1 = \frac{1-a}{1-a}$ , por lo tanto el caso base es cierto.

Ahora el paso inductivo, la hipótesis de inducción es  $\sum_{i=0}^h a^i = \frac{1-a^{h+1}}{1-a}$  y queremos probar  $\sum_{i=0}^{h+1} a^i = \frac{1-a^{h+2}}{1-a}$ . Operemos y usemos la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{h+1} a^i &= \sum_{i=0}^h a^i + a^{h+1} = \frac{1-a^{h+1}}{1-a} + a^{h+1} = \frac{1-a^{h+1}}{1-a} + \frac{(1-a)a^{h+1}}{1-a} \\ &= \frac{1-a^{h+1}}{1-a} + \frac{a^{h+1}-a^{h+2}}{1-a} = \frac{1-a^{h+2}}{1-a} \end{aligned}$$

esto prueba el paso inductivo y por lo tanto queda probada la inducción completa.

4. a)  $\sum_{i=1}^n i(i+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$ .

b) Probar la igualdad anterior utilizando las partes 1 y 2 de este ejercicio.

### Solución:

a) Tomamos de caso base  $n = 1$ . Para este valor se tiene que  $\sum_{i=1}^1 i(i+2) = 3 = \frac{1(1+1)(2+7)}{6}$  por lo tanto el caso base es cierto.

Ahora el paso inductivo, la hipótesis de inducción es  $\sum_{i=1}^h i(i+2) = \frac{h(h+1)(2h+7)}{6}$  y queremos probar  $\sum_{i=1}^{h+1} i(i+2) = \frac{(h+1)(h+2)(2(h+1)+7)}{6}$ . Para esto operamos y usamos la hipótesis inductiva (en la segunda igualdad)

$$\sum_{i=1}^{h+1} i(i+2) = \sum_{i=1}^h i(i+2) + (h+1)(h+3) = \frac{h(h+1)(2h+7)}{6} + (h+1)(h+3).$$

Ahora podemos seguir como en 2, sacando de factor común  $(h+1)$ , de esta manera:

$$\begin{aligned} \frac{h(h+1)(2h+7)}{6} + (h+1)(h+3) &= (h+1) \left( \frac{h(2h+7)}{6} + h+3 \right) = \\ &= (h+1) \left( \frac{h(2h+7) + 6h + 18}{6} \right) = \frac{(h+1)(2h^2 + 13h + 18)}{6}. \end{aligned}$$

Ahora si desarrollamos el polinomio  $(h+2)(2(h+1)+7)$ , obtenemos exactamente el polinomio  $2h^2 + 13h + 18$ . Resumiendo

$$\sum_{i=1}^{h+1} i(i+2) = \frac{(h+1)(2h^2 + 13h + 18)}{6} = \frac{(h+1)(h+2)(2(h+1)+7)}{6}$$

terminando de probar el paso inductivo, lo que prueba la inducción completa.

b) Para resolverlo aplicando 1 y 2, observar que  $i(i+2) = i^2 + 2i$ , por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^n i(i+2) = \sum_{i=1}^n (i^2 + 2i) = \sum_{i=1}^n i^2 + 2 \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \frac{n(n+1)}{2}$$



## Práctico 4: Inducción completa



Sacando de factor común  $n(n+1)$ , obtenemos

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)\left(\frac{2n+1}{6} + 1\right) = n(n+1)\left(\frac{2n+1+6}{6}\right) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

terminando la prueba.

### Ejercicio 2 (Aplicación)

Sobre un tablero ( $8 \times 8$ ) de ajedrez, se intentan colocar:

- 1 grano de arroz en el primer casillero,
- 2 granos en el segundo casillero,
- 4 granos en el tercer casillero,
- 8 granos en el cuarto casillero,
- y así hasta el sexagésimocuarto (64-ésimo) casillero.

Al final, ¿cuántos granos de arroz habría sobre el tablero?

**Solución:** Debemos hacer la suma de  $1 = 2^0, 2 = 2^1, 4 = 2^2, 8 = 2^3, \dots, 2^{63}$ , es decir

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{63}$$

lo cual, por el ejercicio anterior, es igual a:

$$\frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1$$

### Ejercicio 3 (IC en desigualdades)

1. Completar el siguiente cuadro:

$n$	$2^n$	$2n+1$	$n^2$
0	1	1	0
1	2	3	1
2	4	5	4
3	8	7	9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	$2^{10}$	21	100

2. a) Se considera el enunciado matemático  $P(n) : 2^n \geq 2n + 1$ . Completar, con la ayuda del cuadro anterior, la siguiente tabla indicando si el enunciado  $P(n)$  es verdadero (V) o falso (F) para el valor de  $n$  indicado:

$n$	$P(n)$	$P(n+1)$
0	V	F
1	F	F
2	F	V
3	V	V
4	V	V
5	V	V
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



b) Probar que para todo natural  $n \geq 3$  se tiene que  $2^n \geq 2n + 1$ .

**Solución:**

Primero probamos el caso base para  $n = 3$ . Se tiene que  $2^3 = 8$  y  $2 \times 3 + 1 = 7$ , por lo que se cumple la desigualdad.

El paso inductivo consiste en demostrar que si  $2^h \geq 2h + 1$  entonces  $2^{h+1} \geq 2(h+1) + 1$ .

*Demostración:*

$2^{h+1} = 2(2^h) \geq 2(2h+1)$  y como  $2(2h+1) \geq 2h+3 = 2(h+1)+1$  y terminamos de probar el paso inductivo.

Por lo tanto la desigualdad es verdadera entonces para todo  $n \geq 3$ .

3. Repetir la tabla de 2 a) para el enunciado  $P(n) : 2^n \geq n^2$ . Hallar  $n_0$  y probar por inducción completa que para todo natural  $n \geq n_0$  se cumple que  $2^n \geq n^2$ .

**Solución:**

Vemos que el caso base se da en  $n_0 = 4$ . Primero probamos el caso base para  $n_0 = 4$ . Se tiene la igualdad:  $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$ , por lo que se cumple la desigualdad.

El paso inductivo consiste en demostrar que si  $2^h \geq h^2$  entonces  $2^{h+1} \geq (h+1)^2$ . Nuevamente escribimos  $2^{h+1} = 2(2^h)$  y usando la hipótesis de inducción tenemos  $2(2^h) \geq 2h^2$ . Para concluir hay que probar que  $2h^2 \geq (h+1)^2$ , lo cual es cierto pues  $h \geq 4$  (hay que mostrarlo) y terminamos de probar el paso inductivo.

Por lo tanto la desigualdad es entonces verdadera para todo  $n \geq 4$ .

### Ejercicio 4 (IC y divisibilidad)

1. Probar que para todo  $n \geq 1$ ,  $n^3 - n$  es divisible por 3.

**Solución:** Se razona por inducción completa a partir de  $n = 1$ .

- **Caso base** ( $n = 1$ ):  $1^3 - 1 = 0$  es divisible por 3.
- **Paso inductivo:** Fijado  $h \geq 1$ , supongamos que  $h^3 - h$  es divisible por 3 (HI). Queremos demostrar que  $(h+1)^3 - (h+1)$  es divisible por 3 (¿TI?) Para ello, se observa que

$$\begin{aligned}(h+1)^3 - (h+1) &= (h^3 + 3h^2 + 3h + 1) - (h+1) \\ &= h^3 + 3h^2 + 2h \\ &= \underbrace{(h^3 - h)}_{\substack{\text{div. por 3} \\ \text{por HI}}} + \underbrace{3(h^2 + h)}_{\text{div. por 3}}.\end{aligned}$$

Como el entero  $h^3 - h$  es divisible por 3 (por HI) así como el entero  $3(h^2 + h)$  (de modo obvio), se deduce que su suma, igual a  $(h+1)^3 - (h+1)$ , también es divisible por 3. Esto demuestra la tesis de inducción (TI).

Por lo tanto,  $n^3 - n$  es divisible por 3 para todo  $n \geq 1$ .

2. Probar que para todo  $n \geq 1$ ,  $3^{2^n} - 1$  es divisible por 8.

**Solución:**

**Caso base**

Para  $n = 1$ , tenemos que

$$3^{2^1} - 1 = 9 - 1 = 8,$$

y como 8 es obviamente divisible por 8, se cumple el paso base.

**Paso inductivo**



## Práctico 4: Inducción completa



Suponemos que se cumple  $3^{2h} - 1 = 8k$  para algún  $k$  natural (esto es otra forma de escribir que es divisible por ocho), y queremos ver que  $3^{2(h+1)} - 1$  es divisible por 8.

Entonces:

$$\begin{aligned}3^{2h} - 1 &= 8k && \Rightarrow \\(3^{2h} - 1) \cdot 3^2 &= 8k \cdot 3^2 && \Rightarrow \\3^{2h+2} - 3^2 &= 8k \cdot 3^2 && \Rightarrow \\3^{2h+2} - 3^2 - 1 + 1 &= 8k \cdot 3^2 && \Rightarrow \\3^{2h+2} - 1 &= 8k \cdot 3^2 + 3^2 - 1 && \Rightarrow \\3^{2h+2} - 1 &= 8k \cdot 3^2 + 8 && \Rightarrow \\3^{2(h+1)} - 1 &= 8(k \cdot 3^2 + 1) && \Rightarrow\end{aligned}$$

Por lo que probamos que  $3^{2(h+1)} - 1$  es divisible por ocho.

3. Probar que para todo  $n$  impar,  $7^n + 1$  es divisible por 8.

**Solución:**

Observemos que todo natural impar  $n$  lo podemos escribir como  $2h + 1$  para algún entero  $h \geq 0$ . Haremos entonces inducción en  $h$ .

**Caso base** Tenemos que

$$7^1 + 1 = 8$$

que es divisible por 8.

**Paso inductivo**

Supongamos que  $7^{2h+1} + 1$  es divisible por 8, y a partir de esto, probemos que  $7^{2(h+1)+1} + 1$  es también divisible por 8.

Entonces:

$$\begin{aligned}7^{2h+1} + 1 &= 8m && \Rightarrow \\(7^{2h+1} + 1)7^2 &= 8m \cdot 7^2 && \Rightarrow \\7^{2h+1}7^2 + 7^2 &= 8m \cdot 7^2 && \Rightarrow \\7^{2h+3} + 7^2 + 1 - 1 &= 8m \cdot 7^2 && \Rightarrow \\7^{2(h+1)+1} + 7^2 + 1 - 1 &= 8m \cdot 7^2 && \Rightarrow \\7^{2(h+1)+1} + 1 + 48 &= 8m \cdot 7^2 && \Rightarrow \\7^{2(h+1)+1} + 1 &= 8m \cdot 7^2 - 48 && \Rightarrow \\7^{2(h+1)+1} + 1 &= 8(m \cdot 7^2 - 6) && \Rightarrow\end{aligned}$$

Por lo que  $7^{2(h+1)+1} + 1$  es divisible por 8.

4. Probar que la suma de tres números naturales consecutivos, siendo el menor impar, es divisible por 6.

**Solución:**

Observar que podemos reformular la afirmación de la siguiente manera:

Para todo  $n$  impar,  $n + (n + 1) + (n + 2)$  es divisible por 6.



Observemos que todo natural impar  $n$  lo podemos escribir como  $2h + 1$  para algun entero  $h \geq 0$ . Haremos entonces inducción en  $h$ .

**Caso base** Tenemos que

$$1 + 2 + 3 = 6,$$

y como 6 es obviamente divisible por 6, se cumple el paso base.

**Paso inductivo**

Supongamos que  $2h + 1 + (2h + 2) + (2h + 3)$  es divisible por 6, y a partir de esto, probemos que  $2(h + 1) + 1 + (2(h + 1) + 2) + (2(h + 1) + 3)$  es también divisible por 6.

Si desarrollamos, obtenemos:

$$2(h+1)+1+(2(h+1)+2)+(2(h+1)+3) = 2h+2+1+(2h+2+2)+(2h+2+3) = 2h+1+(2h+2)+(2h+3)+6.$$

Como  $2h+1+(2h+2)+(2h+3)$  es divisible entre 6 y 6 también los es, tenemos que  $2(h+1)+1+(2(h+1)+2)+(2(h+1)+3)$  es divisible entre 6, terminando el paso inductivo, lo que prueba la inducción completa.

A modo de comentario, si hubieramos desarrollado usando que  $n = 2h + 1$ , obteniamos la siguiente reformulación:

Para todo  $h \geq 0$ ,  $2h + 1 + (2h + 2) + (2h + 3) = 6h + 6$  es divisible por 6.

Lo cual claramente es verdadero ya que  $6h + 6 = 6(h + 1)$ .

### Ejercicio 5 (Ejercicios de pruebas anteriores)

1. Probar la siguiente igualdad utilizando el método de inducción completa:

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2, \quad \forall n \geq 1.$$

2. Demostrar que

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n^2 + n}{2}, \quad \forall n \geq 1$$

a partir del ítem anterior, SIN usar inducción completa.

**Solución:**

1. ■ Paso base: Si  $n = 1$ ,

$$\sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 2 - 1 = 1,$$

y por otro lado  $1^2 = 1$ , por lo que la propiedad es válida para  $n = 1$ .

■ Paso inductivo:

• Hipótesis inductiva: Supongamos  $m \in \mathbb{N}$  que

$$\sum_{i=1}^m (2i - 1) = m^2.$$



- *Tesis inductiva:*

$$\sum_{i=1}^{m+1} (2i - 1) = (m + 1)^2.$$

**Demostración:** Para demostrar la tesis inductiva comenzamos escribiendo

$$\sum_{i=1}^{m+1} (2i - 1) = \sum_{i=1}^m (2i - 1) + 2(m + 1) - 1 = \sum_{i=1}^m (2i - 1) + 2m + 1.$$

Por hipótesis inductiva,

$$\sum_{i=1}^m (2i - 1) = m^2$$

y sustituyendo en la igualdad anterior obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{m+1} (2i - 1) = m^2 + 2m + 1.$$

Esto último es igual a  $(m + 1)^2$  y concluimos la prueba.

2. A partir de la parte anterior, ahora queremos probar que para todo natural  $n$ :

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Para esto comenzamos observando que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (2i - 1) &= (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + \dots + (2 \cdot n - 1) \\ &= 2 \cdot (1 + \dots + n) - n \\ &= 2 \cdot \left( \sum_{i=1}^n i \right) - n. \end{aligned}$$

Usando la parte anterior obtenemos que

$$n^2 = 2 \cdot \left( \sum_{i=1}^n i \right) - n,$$

o equivalentemente

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n^2 + n}{2}.$$

### Ejercicio 6 (Ejercicios de pruebas anteriores)

Considerar la desigualdad

$$(n + 2)\sqrt{n} \geq 3\sqrt{n^2 + 1}$$

1. Hallar el menor natural para el cual la desigualdad es válida.



2. *Demostrar por Inducción Completa la desigualdad, a partir de la base inductiva hallada en la parte anterior.*

**Solución:**

1. El primer  $n$  para el cual la desigualdad es válida es  $n = 5$
2. Vamos a probar por IC que  $(n + 2)\sqrt{n} \geq 3\sqrt{n^2 + 1} \forall n \geq 5$ . El caso base lo tenemos probado en la parte anterior para  $n = 5$ . La hipótesis de inducción nos dice que:

$$(h + 2)\sqrt{h} \geq 3\sqrt{h^2 + 1} \Leftrightarrow (h + 2)^2 h \geq 9(h^2 + 1)$$

y queremos la tesis inductiva, es decir:

$$(h + 1 + 2)\sqrt{h + 1} \geq 3\sqrt{(h + 1)^2 + 1} \Leftrightarrow (h + 1 + 2)^2(h + 1) \geq 9((h + 1)^2 + 1)$$

Hemos usado que las expresiones involucradas son siempre positivas para que sea un si y solo si.

Entonces:

$$\begin{aligned} (h + 1 + 2)^2(h + 1) &= [(h + 2)^2 + 2(h + 2) + 1](h + 1) \\ &= (h + 2)^2 h + (h + 2)^2 + 2(h + 2)(h + 1) + (h + 1) \geq 9(h^2 + 1) + (h + 2)^2 + 2(h + 2)(h + 1) + (h + 1) \end{aligned}$$

donde la última desigualdad utilizamos la hipótesis de inducción.

Basta probar entonces que  $\forall n \geq 5$ , se cumple que:

$$9(h^2 + 1)h + 2(h + 2)(h + 1) + (h + 1) \geq 9((h + 1)^2 + 1)$$

Operando resulta que

$$9(h^2 + 1) + (h + 2)^2 + 2(h + 2)(h + 1) + (h + 1) \geq 9((h + 1)^2 + 1) \Leftrightarrow 3h^2 - 7h = h(3h - 7) \geq 0$$

Observar que los cambios de signo de  $h(3h - 7)$  se dan en  $h = 0$  y  $h = 7/3 \approx 2,33$ . Por tanto resulta que para todo  $h \geq 5$  se cumple que  $h(3h - 7) \geq 0$  probando la tesis inductiva y completando la demostración.