

Ejercicio 1 (Conectivas “y” (\wedge), “o” (\vee))

Mostrar que cada una de las propiedades siguientes se puede expresar en lenguaje matemático por un enunciado “ P y Q ” o “ P o Q ” (x e y son números reales):

1. $(x - 2)(x + 3) = 0$.
2. $x^2 - 1 = 0$.
3. $xy > 0$.
4. $(x - 2)(x - 3) \neq 0$.
5. $x^2 - 1 \neq 0$.
6. $xy \leq 0$.

Ejercicio 2 (Condición necesaria y suficiente (\Leftrightarrow))

1. Dado un número real x cualquiera, nos interesamos en la afirmación “ $x^2 > 4$ ”.
Determinar si cada una de las condiciones siguientes es suficiente para dicha afirmación:

$$x > 100, \quad x > 10^6, \quad x > 1,9, \quad x < -2, \quad x < -2 \text{ o } x > 2,$$

$$x < -10, \quad x < -2,1, \quad x < -3 \text{ o } x > 3, \quad x < 0, \quad x < -1.$$

Entre las que son suficientes, indicar cuáles son necesarias.

2. Nos interesamos ahora en la afirmación “ $x^2 > 10^3$ ”.
Dar seis condiciones suficientes para dicha afirmación, y una necesaria.

Ejercicio 3 (Condición necesaria y suficiente (\Leftrightarrow))

En cada uno de los casos siguientes, reducir la condición suficiente dada para que sea necesaria:

1. Sea x un real positivo. Si $x > 4$ entonces $x^2 > 10$.
2. Sean x e y reales no negativos. Si $x > 0$ e $y > 0$ entonces $x + y > 0$.

Ejercicio 4 (Condición necesaria y suficiente (\Leftrightarrow))

En cada uno de los casos siguientes, completar la condición necesaria dada para que sea suficiente:

1. Para que un cuadrilátero $ABCD$ sea un rombo, es necesario que sus diagonales sean perpendiculares.
2. Para que dos rectas del espacio sean paralelas, es necesario que su intersección sea vacía.
3. Para que los tres números reales a, b, c sean positivos, es necesario que $ab > 0$ y que $bc > 0$.

Ejercicio 5 (Cuantificadores (\forall, \exists))

Para cada una de las proposiciones siguientes, indicar (en los puntos “...”) el cuantificador que permite que dicha proposición sea verdadera:

1. ... $x \in \mathbb{R}, (x + 1)^2 = x^2 + 1$.
2. ... $x \in \mathbb{R}, (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.
3. ... $a, b, c \in \mathbb{R}, a(b - c) + b(c - a) + c(a - b) = 0$.
4. ... $x \in \mathbb{R}, x^3 - 2x^2 + 1 = 0$.

Ejercicio 6 (Negación)

Completar el cuadro siguiente:

| P | $no P$ |
|--------------------|--------|
| $x \in \mathbb{N}$ | |
| $x \neq 1$ | |
| $13 = 12$ | |
| $x > 0$ | |
| $x \leq 1$ | |

Ejercicio 7 (Negación) Completar el cuadro siguiente:

| P | P (v o f) | $no P$ (v o f) | $no P$ |
|--|----------------|-------------------|--------|
| Todos los triángulos son rectángulos | | | |
| Existe un real x tal que $x^2 < 0$ | | | |
| Todos cuadrilátero no se puede inscribir en una cfa. | | | |
| Existen triángulos que tienen ángulos obtusos | | | |
| Todos los números reales verifican $x^2 \geq 1$ | | | |
| Existe un divisor de 12 que no es divisor de 18 | | | |

Entonces:

- la negación de una frase que empieza por “existe...” es ...
- la negación de una frase que empieza por “todos los...” es ...

Ejercicio 8 (Negación)

Decir si cada afirmación es verdadera o falsa y negarla:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 > x$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, x^3 = x$.
4. $\exists x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = x$.

Ejercicio 9 (Contrarrecíproco)

Escribir el contrarrecíproco de cada una de los enunciados siguientes:

1. Si es el 1^{ero} de enero entonces el museo está cerrado.
2. Un número entero que es múltiplo de 6 es también múltiplo de 3.
3. Si un número es mayor que 7 entonces es mayor que 4.
4. Dado $x \in \mathbb{R}$, si $x > 0$ entonces $x + 4 > 0$.
5. Si un triángulo ABC es rectángulo en A entonces $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

Ejercicio 10 (Demostraciones)

Probar que las siguientes afirmaciones son falsas.

1. Un número siempre es inferior a su cuadrado.
2. Para todo par de reales a y b positivos se cumple que $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.
3. Para todo par de reales a y b no nulos, $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
4. Si a, b, c y d son cuatro números reales que verifican $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a - c \leq b - d$.

5. Si un número x verifica $-2 \leq x \leq 4$ entonces $4 \leq x^2 \leq 16$.

6. Para todo par de vectores \vec{u} y \vec{v} se cumple que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Ejercicio 11 (Demostración enunciados falsos)

Considerar la siguiente afirmación:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \text{para todo par de números reales positivos } a \text{ y } b.$$

Para demostrar que es falsa, ¿debo probar que la igualdad nunca vale? o ¿debo hallar un par de números reales positivos a y b para los cuales no vale? Demostrar que dicha afirmación es falsa.

Ejercicio 12 (Demostración enunciados verdaderos)

Considerar la siguiente afirmación:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad \text{para todo par de números reales positivos } a \text{ y } b.$$

Para demostrar que es verdadera, ¿es suficiente con probar que la igualdad vale para un par de números reales positivos a y b ? ¿es suficiente probar que vale para muchos pares de números reales positivos a y b ? Demostrar que dicha afirmación es verdadera.

Ejercicio 13 (Demostraciones con conjuntos)

Probar o refutar las siguientes afirmaciones:

- | | | |
|--|----------------------------------|---------------------------------------|
| 1. Si $A \subseteq B$ entonces $B^c \subseteq A^c$. | 3. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ | 5. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ |
| 2. $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$ | 4. $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$ | 6. $(A \setminus B)^c = A^c \cup B^c$ |

Ejercicio 14 (Demostraciones con conjuntos)

Determinar cuáles de las siguientes igualdades e inclusiones son verdaderas. En caso de que una igualdad sea falsa determinar si se da alguna de las inclusiones.

- | | |
|--|---|
| 1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ | 3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| 2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ | 4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |

Ejercicio 15 (Demostraciones por absurdo)

1. Probar que $\sqrt{2}$ es irracional.
2. Probar que hay infinitos números primos.
3. Si n no es un cuadrado perfecto entonces \sqrt{n} es irracional.