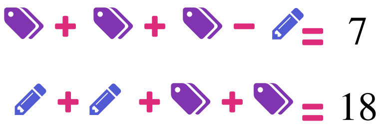
**13.** Melina compró una remera y gastó 185 pesos. La pagó entregando el importe justo, con 10 billetes de dos tipos: de 5 pesos y de 50 pesos. ¿Cuántos billetes de cada clase entregó?

**14.** En una cafetería se usan dos marcas de café, una de 6 pesos el kilo y otra de 8.50 pesos el kilo. El encargado quiere preparar una mezcla de las dos clases cuyo precio sea 7 pesos el kilo. ¿Cuántos gramos debe poner por kilo de cada marca?

**15.** Expresar lo siguiente como un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas y resolverlo:



Luego, utilizar lo obtenido para hallar el valor de:

**(a)** 

**(b)** 

## 4.5. Inecuaciones

Una **desigualdad** es una expresión que contiene alguno de los siguientes símbolos de orden:

$<$ (menor), $>$ (mayor), $\leq$ (menor o igual), $\geq$ (mayor o igual).

Las desigualdades que contienen alguno de los dos primeros símbolos se llaman **estrictas**, mientras que las que contienen alguno de los dos últimos se denominan **no estrictas**.

Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones conteniendo uno o más valores desconocidos.

Las expresiones que aparecen a ambos lados de los símbolos de la desigualdad se llaman **miembros**.

Las siguientes desigualdades son ejemplos de inecuaciones:

$$x^2 - 2 \geq 5x + 1, \qquad 3x + 2|x - 1| > 0,$$

$$x^4 - 3 < x^3 + 2x, \qquad \frac{(x-2)(x+3)}{x^2+6} \leq 0.$$

Las **soluciones** de una inecuación son todos los valores que hacen que la desigualdad sea cierta. Al igual que en el caso de las ecuaciones, cuando la inecuación esté modelando un problema concreto, habrá que elegir entre las soluciones de la inecuación, aquellas que tengan sentido en el contexto del problema. La diferencia esencial con las ecuaciones, es que las inecuaciones suelen tener infinitas soluciones, las cuales se representan mediante la notación de intervalo presentada en la Sección 2.3 del Capítulo 2.

Se dice que dos inecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones.

Aprenderemos a resolver inecuaciones que tengan solamente una incógnita. El proceso de resolución de inecuaciones se basa (igual que en el caso de las ecuaciones) en la transformación de la inecuación inicial en otra equivalente más sencilla. La única diferencia entre la resolución de una ecuación y una inecuación, es que ciertas operaciones invierten el sentido de la desigualdad. Si bien a lo largo del Capítulo 2 hemos enunciado el efecto en las desigualdades de cada una de las operaciones, reuniremos aquí todas estas propiedades de orden para facilitar la lectura:

**(o.1)** $x \le y \iff x + c \le y + c$, para cualquier $c$ real.

**(o.2)** $x \le y \iff x \cdot c \le y \cdot c$, para cualquier $c > 0$.

**(o.3)** $x \le y \iff x \cdot c \ge y \cdot c$, para cualquier $c < 0$.

**(o.4)** Si $x \cdot y > 0$: $x \le y \iff \frac{1}{x} \ge \frac{1}{y}$.

**(o.5)** Si $x, y > 0$: $x \le y \iff x^q \le y^q$, para cualquier $q > 0$.

**(o.6)** Si $x, y > 0$: $x \le y \iff \log_a x \le \log_a y$ cuando $a > 1$.

**(o.7)** Si $x, y > 0$: $x \le y \iff \log_a x \ge \log_a y$ cuando $0 < a < 1$.

Las mismas propiedades valen reemplazando los signos $\le$ (menor o igual) por $<$ (menor estricto), y los signos $\ge$ (mayor o igual) por $>$ (mayor estricto).

La propiedad **(o.1)** establece que si a los dos miembros de una inecuación se les suma (o resta) la misma cantidad, se obtiene una inecuación equivalente con la desigualdad en el mismo sentido: $2 < 3$ entonces $2+7 < 3+7$ y $2-7 < 3-7$.

Las propiedades **(o.2)** y **(o.3)** dicen que si se multiplican (o dividen) los dos miembros de una inecuación por una misma cantidad, se obtiene una inecuación equivalente con el mismo sentido de la desigualdad si esa cantidad es positiva, pero con el sentido contrario si esa cantidad es negativa: $2 < 3$ entonces $2 \cdot 5 < 3 \cdot 5$, pero $2 \cdot (-5) > 3 \cdot (-5)$.

La propiedad **(o.4)** establece que los recíprocos de números *con igual signo* (es decir, ambos positivos o ambos negativos), invierten el orden de la desigualdad: $2 < 3$ entonces $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$. También, $-5 < -4$ entonces $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{4}$.

La monotonía de la potencia (y por lo tanto de la raíz) para bases *positivas* es lo que afirma la propiedad **(o.5)**, en cuyo caso el sentido de la desigualdad se preserva si el exponente es positivo*: $4 < 9$ entonces $\sqrt{4} < \sqrt{9}$ y $4^5 < 9^5$.

Sin embargo, si el exponente es negativo el sentido se invierte: $4 < 9$ entonces $4^{-\frac{1}{2}} > 9^{-\frac{1}{2}}$ y $4^{-5} > 9^{-5}$. Esto se prueba de forma general a partir de la definición de potencia con exponente negativo, combinando **(o.4)** y **(o.5)**:

**(o.8)** Si $x, y > 0$: $\quad x \le y \iff x^q \ge y^q$, para cualquier $q < 0$.

Las propiedades **(o.6)** y **(o.7)** establecen que aplicar logaritmos en ambos miembros de una inecuación mantiene el sentido de la desigualdad cuando la base es mayor que 1, pero lo invierte cuando esta es menor que 1: $\log_2 4 < \log_2 9$ pero $\log_{\frac{1}{2}} 4 > \log_{\frac{1}{2}} 9$.

**Ejemplo 123.** **Resolviendo inecuaciones.** Resolver la inecuación $-2x + 1 \ge 7$.

*Solución:*

$$-2x + 1 \ge 7 \overset{\textbf{(o.1)}}{\iff} -2x \ge 6 \overset{\textbf{(o.3)}}{\iff} x \le -3.$$

Luego, el conjunto solución es $S = \{x \in \mathbb{R} : x \le -3\}$, el cual puede expresarse también como el intervalo $(-\infty, -3]$, y representarse gráficamente como

«

Escribiendo en GeoGebra una inecuación *polinómica* en el campo de entradas, el software devuelve “franjas” correspondientes a los valores de $x$ que satisfacen la inecuación. Los “bordes” de las franjas serán una línea llena para las desigualdades no estrictas, o una línea punteada para las desigualdades estrictas, indicando así si los extremos de los intervalos pertenecen o no al conjunto solución. Se propone ingresar en el campo de entradas las siguientes inecuaciones, para observar el resultado:

$$-2x + 1 \ge 7, \qquad -2x + 1 < 7.$$

Aplicaremos ahora la resolución de inecuaciones para resolver un problema concreto.

*No se infiere de esto que para bases negativas el sentido se invierte. Recordemos que las bases negativas se descartan al momento de enunciar propiedades ya que algunas no valen.

**Ejemplo 124.** Una empresa textil fabricó 1500 remeras con un costo de producción de \$30 por unidad. Si se venden todas las remeras, se obtiene una ganancia que supera los \$60000. ¿A qué precio se vende al menos cada unidad?

*Solución:* Llamemos $x$ al precio de venta (en pesos) de cada unidad. Por cada unidad vendida, la ganancia es igual a $x-30$. El enunciado afirma que la ganancia de vender todas las remeras (es decir, $1500(x-30)$) supera los 60000 pesos. Esto se expresa simbólicamente y se resuelve como:

$$1500(x-30) > 60000 \overset{\textbf{(o.2)}}{\iff} x - 30 > \frac{60000}{1500} \overset{\textbf{(o.1)}}{\iff} x > 40 + 30 = 70.$$

Luego, la solución es el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : x > 70\} = (70, \infty)$. Esto significa que cada remera se vende a más de \$70. «

Como se ve en los ejemplos anteriores, el proceso para resolver una inecuación consiste en ir transformando la inecuación inicial en otras equivalentes más simples, hasta que el resultado final sea de uno (o varios) de los siguientes tipos:

$$x < c, \qquad x \le c, \qquad x \ge c, \qquad x > c,$$

donde $x$ denota la incógnita. Si se llega a más de una de estas inecuaciones, según el caso estas pueden estar conectadas con un "o", por lo que deberán unirse los correspondientes conjuntos solución, o con un "y", donde habrá que tomar la intersección de dichos conjuntos. Si el resultado final es contradictorio, entonces la inecuación no tiene soluciones. Ilustramos estos casos en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 125.** **Inecuaciones conectadas con "o".** Resolver $(x+3)^2 \ge 16$.

*Solución:*

$$(x+3)^2 \ge 16 \overset{\textbf{(o.5)}}{\iff} \sqrt{(x+3)^2} \ge \sqrt{16} \iff |x+3| \ge 4.$$

Por la propiedad (**g**) del valor absoluto (ver página 49), la última desigualdad ocurre si y solo si

$$x + 3 \ge 4 \quad \text{o} \quad x + 3 \le -4,$$

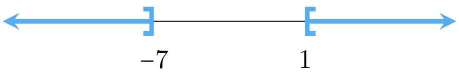
es decir

$$x \ge 1 \quad \text{o} \quad x \le -7.$$

El conjunto solución de la primera desigualdad es $S_1 = [1, \infty)$, y el de la segunda es $S_2 = (-\infty, -7]$. Puesto que las desigualdades están conectadas con un "o", el conjunto solución de la inecuación se forma como la unión de los conjuntos obtenidos, es decir

$$S = S_1 \cup S_2 = [1, \infty) \cup (-\infty, -7] = \mathbb{R} - (-7, 1),$$

donde hemos utilizado la notación $A - B$ para indicar la diferencia entre los conjuntos conjuntos $A$ y $B$, definida en la página 7. La representación gráfica de este conjunto es la siguiente:




**Ejemplo 126.** **Inecuaciones conectadas con "y".** Hallar las soluciones de la inecuación $|t^2 - 5| \leq 4$.

*Solución:* Por la propiedad (**f**) del valor absoluto (ver página 49), la desigualdad se cumple si y solo si

$$-4 \leq t^2 - 5 \leq 4,$$

lo que equivale a

$$t^2 \leq 9 \quad \text{y} \quad t^2 \geq 1.$$

Con respecto a la primera desigualdad, tenemos que

$$t^2 \leq 9 \overset{\textbf{(o.5)}}{\iff} \sqrt{t^2} \leq \sqrt{9} \iff |t| \leq 3,$$

lo cual equivale a

$$-3 \leq t \leq 3.$$

De manera similar, para la segunda desigualdad se tiene:

$$t^2 \geq 1 \overset{\textbf{(o.5)}}{\iff} \sqrt{t^2} \geq \sqrt{1} \iff |t| \geq 1,$$

lo cual, por la propiedad (**g**) del valor absoluto (ver página 49), equivale a

$$t \leq -1 \quad \text{o} \quad t \geq 1.$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la primera desigualdad es $S_1 = [-3, 3]$, y el de la segunda es $S_2 = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Puesto que las dos desigualdades iniciales están conectadas con un "y", debemos quedarnos con aquellas soluciones que satisfagan ambas inecuaciones. En otras palabras, debemos buscar soluciones que estén en $S_1$ y en $S_2$, *simultáneamente*. Para ello graficamos a continuación $S_1$ en rosado y $S_2$ en celeste, para observar dónde coinciden:

Luego, el conjunto solución es $S = S_1 \cap S_2 = [-3,-1] \cup [1,3]$, cuya representación gráfica es la siguiente:

**Ejemplo 127.** Hallar los valores de $x$ tales que $\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}x^2} > \frac{3}{2}\left(\frac{8}{27}\right)^{x-1}$.

*Solución:* Comenzamos trabajando ambos miembros para obtener potencias de igual base en cada uno, lo que nos permitirá luego aplicar logaritmo en dicha base y “bajar” la incógnita que aparece en el exponente:

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}x^2} > \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{8}{27}\right)^{x-1} &\iff \left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}x^2} > \tfrac{3}{2}\left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^{-3}\right)^{x-1} \\
&\iff \left(\tfrac{3}{2}\right)^{-x^2} > \left(\tfrac{3}{2}\right)^{1-3(x-1)} \\
&\iff \left(\tfrac{3}{2}\right)^{-x^2} > \left(\tfrac{3}{2}\right)^{-3x+4} \\
&\overset{\textbf{(o.6)}}{\iff} -x^2 > -3x+4 \\
&\overset{\textbf{(o.1)}}{\iff} 0 > x^2 - 3x + 4 \\
&\iff 0 > \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 + \tfrac{7}{4},
\end{aligned}$$

donde en el último paso se utilizó el método de completar cuadrados en $x^2 - 3x + 4$. En la última desigualdad tenemos que la suma de dos números positivos es menor que cero, lo cual nunca ocurre por lo que la inecuación original no tiene solución*. En símbolos, $S = \varnothing$. «

Es fundamental descartar de las soluciones halladas aquellas que sean no permitidas (ya sea por generar operaciones no definidas o por la naturaleza del problema), lo cual se logra intersecando el conjunto de soluciones obtenidas al resolver una ecuación o inecuación, con el de las permitidas. Es recomendable hallar el conjunto de valores permitidos *antes* de comenzar a resolver, para determinar el conjunto en el que debemos buscar las soluciones, y descartar así las que no pertenezcan a él. Recordemos que las operaciones que pueden generar conflicto son: la división por cero, los logaritmos de números negativos o cero,

*Cuando presentemos la función cuadrática en el capítulo siguiente, veremos una forma alternativa de resolver desigualdades de la forma $ax^2 + bx + c < 0$.

y las raíces con índice par de números negativos. Solamente debemos tener cuidado de que las soluciones no conduzcan a estos casos, con las demás no hay problemas. Ilustraremos todo esto en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 128.** **Descartando soluciones: generan raíces con índice par de cantidades negativas.** Hallar las soluciones de $\sqrt{2x+7} \leq x+4$.

*Solución:* Puesto que aparece una de las tres operaciones "conflictivas", es necesario restringir las soluciones. En este caso, ya que la raíz cuadrada de números negativos no existe en los reales, pediremos que

$$2x+7 \geq 0 \quad \overset{\textbf{(o.1)} + \textbf{(o.2)}}{\Longleftrightarrow} \quad x \geq -\frac{7}{2}.$$

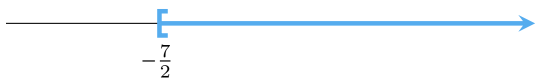
Entonces, una vez resuelta la inecuación, de las soluciones obtenidas nos quedaremos con aquellas que a su vez satisfagan la condición anterior. Notar que si $x \geq -\frac{7}{2}$, el miembro derecho $x+4$ es positivo, y al aplicar la propiedad **(o.5)** se obtiene una inecuación equivalente a la dada, es decir, no aparecen soluciones ficticias. Resolvamos ahora la inecuación, para $x \geq -\frac{7}{2}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+7} \leq x+4 \quad &\overset{\textbf{(o.5)}}{\Longleftrightarrow} \quad 2x+7 \leq (x+4)^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad 2x+7 \leq x^2+8x+16 \\
&\overset{\textbf{(o.1)}}{\Longleftrightarrow} \quad 0 \leq x^2+6x+9.
\end{aligned}$$

Puede verse fácilmente que el miembro derecho de esta última expresión es un trinomio cuadrado perfecto, por lo que se obtiene

$$0 \leq (x+3)^2.$$

Esta última desigualdad vale para cualquier número real $x$, pues cualquier expresión elevada al cuadrado es mayor o igual que cero. En otras palabras, el conjunto solución de la última inecuación es $\mathbb{R}$. Sin embargo, no debemos olvidarnos de la restricción obtenida antes, por lo que el conjunto solución es $S = \left[-\frac{7}{2}, \infty\right) \cap \mathbb{R} = \left[-\frac{7}{2}, \infty\right)$, el cual representamos gráficamente como:




«

**Ejemplo 129.** **Descartando soluciones: generan logaritmos de números no positivos.** Hallar los valores de $x$ que satisfacen $\log_{17} |-2x+3| < 0$.

*Solución:* El logaritmo es otra de las operaciones “conflictivas”, pues solamente se aplica a números positivos, por lo que debemos imponer que

$$|-2x+3|>0.$$

Como el valor absoluto es siempre positivo o cero, debemos descartar solamente los valores de $x$ que hagan valer cero a la expresión que está adentro del mismo. Para ello planteamos

$$|-2x+3|=0 \iff -2x+3=0 \iff x=\tfrac{3}{2}.$$

Entonces, si este valor llega a formar parte de la solución, deberemos descartarlo. Resolvamos ahora la inecuación. Para ello comenzamos reemplazando el cero del miembro izquierdo por $\log_{17} 1$ ($\log_{17} 1 = 0$ pues $17^0 = 1$). Por lo tanto, si $x \neq \frac{3}{2}$,

$$\log_{17}|-2x+3| < \log_{17} 1 \overset{\textbf{(o.6)}}{\iff} |-2x+3|<1 \iff -1<-2x+3<1.$$

Esta doble desigualdad es equivalente a

$$-2x+3<1 \quad \text{y} \quad -2x+3>-1.$$

Resolvamos la primera inecuación:

$$-2x+3<1 \overset{\textbf{(o.1)}}{\iff} -2x<-2 \overset{\textbf{(o.3)}}{\iff} x>1.$$

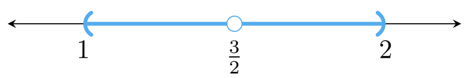
Ahora resolvamos la segunda:

$$-2x+3>-1 \overset{\textbf{(o.1)}}{\iff} -2x>-4 \overset{\textbf{(o.3)}}{\iff} x<2.$$

Puesto que la condición “y” implica que ambas inecuaciones deben cumplirse a la vez, debemos considerar todos los números reales $x$ tales que $x>1$ y además $x<2$. En símbolos, esto se indica como $(1,\infty)\cap(-\infty,2)=(1,2)$. Sin embargo, aún resta quitar el valor $x=\frac{3}{2}$ como parte de la solución, por lo que el conjunto solución es

$$S=\left\{x\in\mathbb{R} : 1<x<2, x\neq \tfrac{3}{2}\right\},$$

el cual también se escribe como $(1,2)-\left\{\frac{3}{2}\right\}$ (recordar que $A-B$ denota la diferencia entre los conjuntos conjuntos $A$ y $B$ definida en la página 7), o como $\left(1,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},1\right)$. Para indicar gráficamente que un valor se “quita”, suele hacerse un círculo sin pintar:



**Ejemplo 130.** **Descartando soluciones: otra vez el logaritmo.** Hallar las soluciones de $\log_{\frac{1}{3}}(7x-5) < -2$.

*Solución:* Antes de resolver la inecuación, veamos a qué conjunto pertenecen las soluciones permitidas. Sabemos que el logaritmo de un número negativo o cero no existe, por lo que debe ocurrir

$$7x - 5 > 0,$$

lo cual es equivalente a $x > \frac{5}{7}$. De las soluciones que hallemos, nos quedaremos con las que estén en $\left(\frac{5}{7}, \infty\right)$.

La idea para resolver la inecuación es hacer aparecer el logaritmo (con la misma base) en ambos miembros. Una forma de hacerlo es recordar que, por las propiedades del logaritmo, $\log_a(a^q) = q$. Luego

$$-2 = \log_{\frac{1}{3}}\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)^{-2}\right) = \log_{\frac{1}{3}} 9.$$

Reemplazando en el lado derecho de la inecuación dada, se obtiene

$$\log_{\frac{1}{3}}(7x-5) < \log_{\frac{1}{3}} 9.$$

Si $x > \frac{5}{7}$, por la propiedad **(o.7)**, la desigualdad anterior equivale a:

$$7x - 5 > 9 \overset{\textbf{(o.1)}}{\iff} 7x > 14 \overset{\textbf{(o.2)}}{\iff} x > 2.$$

Entonces, el conjunto solución es $S = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$ (este conjunto está contenido en las soluciones permitidas así que no hay que descartar ninguna de allí), el cual puede expresarse también como el intervalo $(2, \infty)$, y representarse gráficamente como:


☞ Otra forma de resolverla sin reemplazar a $-2$ por $\log_{\frac{1}{3}} 9$, es dividir primero ambos miembros por $-2$ (lo cual invierte el sentido de la desigualdad), y utilizar luego las propiedades de los logaritmos:

$$\begin{aligned}
\log_{\frac{1}{3}}(7x-5) < -2 &\overset{\textbf{(o.3)}}{\iff} -\tfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(7x-5) > 1 \\
&\iff \log_{\frac{1}{3}}\left((7x-5)^{-\frac{1}{2}}\right) > 1 \\
&\iff \log_{\frac{1}{3}}\left((7x-5)^{-\frac{1}{2}}\right) > \log_{\frac{1}{3}} \tfrac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Al igual que antes, por la propiedad **(o.7)**, si $x > \frac{5}{7}$, la desigualdad anterior equivale a:

$$(7x-5)^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{3} \overset{\textbf{(o.8)}}{\iff} 7x-5 > \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9,$$

y desde este punto seguimos como arriba. Esta opción es más larga de resolver pero también es válida. «

Los siguientes ejemplos muestran que algunas soluciones deben descartarse debido al contexto del problema concreto.

**Ejemplo 131.** Un padre y su hijo se llevan 22 años exactos. Determinar en qué período de sus vidas la edad del padre excede en más de 6 años al doble de la edad del hijo.

*Solución:* Sea $x$ la edad del padre en años. Entonces la edad del hijo es $x-22$. Debemos hallar $x$ que satisfaga

$$x > 2(x-22)+6.$$

Resolvamos esta inecuación:

$$x > 2(x-22)+6 \iff x > 2x-44+6 \iff x > 2x-38 \overset{\textbf{(o.1)}}{\iff} 38 > x.$$

Pero además el hijo nació cuando el padre tenía 22 años, por lo debe ser $x \geq 22$. Entonces la respuesta es desde los 22 años del padre hasta cumplir 38 (no incluído), lo que corresponde al hijo desde que nació hasta sus 16 años (no incluído). Si solamente consideramos los años como números *enteros positivos* (es decir, los correspondientes a los festejos de cumpleaños), entonces las edades posibles son

$$\text{Edades del padre} = \{23, 24, 25, 26, \ldots, 35, 36, 37\},$$

$$\text{Edades del hijo} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 13, 14, 15\}.$$

Por ejemplo, cuando el padre tenga 37 años, el hijo tendrá 15, y

$$37 > 2 \cdot 15 + 6 = 36. \quad \checkmark$$

«

**Ejemplo 132.** Un ascensor de carga soporta un peso máximo de 460 kilogramos. Las cajas de cerámicos pesan 20 kg cada una, y las de porcelanato pesan 35 kg cada una. Se necesita subir en una carga el doble de cajas de porcelanato que de cerámicos. Determinar el número máximo de cajas a subir de cada material en la carga.

*Solución:* Llamemos $x$ a la cantidad de cajas de cerámicos que se van a colocar en la carga. Entonces la cantidad de cajas de porcelanato es $2x$. La condición es que

$$20x + 35(2x) \leq 460.$$

Es decir,

$$90x \leq 460 \overset{\textbf{(o.2)}}{\iff} x \leq \frac{46}{9} \approx 5.11.$$

Puesto que estamos hablando de cantidad de cajas, de lo obtenido debemos quedarnos con aquellos números que sean naturales, es decir, la cantidad máxima de cajas de cerámicos será $5$, lo que corresponde a un máximo de $10$ cajas de porcelanato, con un peso total de $450$ kg. «

Algunas inecuaciones pueden ser llevadas a una forma particular: un producto de factores en un miembro, y cero en el otro. Para resolver este tipo de inecuaciones se utilizan las siguientes propiedades, según la desigualdad que aparece. La primera es llamada **propiedad del producto positivo** y establece que:

> Un producto de factores es positivo si y solo si hay una cantidad par de factores negativos (o ninguno, ya que el cero es también par).

Similarmente, la **propiedad del producto negativo** establece que:

> Un producto de factores es negativo si y solo si hay una cantidad impar de factores negativos.

Las dos propiedades anteriores valen también reemplazando "negativo" por "menor o igual que cero" y "positivo" por "mayor o igual que cero", y son consecuencia directa de la regla de los signos. Visualmente, para aplicarlas suelen hacerse dibujos como el siguiente

$$+ \times - \times - \times + \times + = +,$$

para indicar, por ejemplo, que el producto de 5 factores, de los cuales 2 son negativos (o menores o iguales que cero) y 3 son positivos (o mayores o iguales que cero), da como resultado un número positivo (o mayor o igual que cero). Similarmente,

$$- \times + \times - \times + \times - \times + = -.$$

El mismo razonamiento de la regla de los signos se aplica si hay un cociente en lugar de un producto, teniendo cuidado que el denominador no se anule.

Los siguientes ejemplos muestran cómo utilizar las propiedades anteriores.

**Ejemplo 133.** Hallar los valores de $t$ que satisfacen $(t^{-2/5} - \pi)^2(t+4) \geq 0$.

*Solución:* Notar que el primer factor está elevado al cuadrado, por lo que es mayor o igual que cero, independientemente de lo que haya entre paréntesis. Por lo tanto, la única posibilidad para que el producto sea mayor o igual que cero es que el factor restante también lo sea:

$$t + 4 \geq 0 \iff t \geq -4.$$

Luego, el conjunto solución es $[-4, \infty)$. «

**Ejemplo 134.** Hallar el conjunto solución de las inecuaciones

**(i)** $(x^2+1)(2x-3)(x+4) < 0$, **(ii)** $(x^2+1)(2x-3)(x+4) > 0$.

*Solución:* Comencemos resolviendo **(i)**. Notar que el primer factor es siempre positivo, pues es mayor o igual que 1. Entonces, para que el producto de los tres factores sea negativo, los dos restantes deben tener signos opuestos. Para ilustrar, las opciones para los factores son:

$$+ \times + \times - \qquad \text{o} \qquad + \times - \times +.$$

Es decir,

$$2x - 3 > 0 \quad \text{y} \quad x + 4 < 0, \quad \boxed{1}$$

o bien

$$2x - 3 < 0 \quad \text{y} \quad x + 4 > 0. \quad \boxed{2}$$

Las dos condiciones en $\boxed{1}$ indican que deben cumplirse $x > \frac{3}{2}$ y $x < -4$, lo cual es imposible. Es decir, para ningún valor de $x$ se tiene a la vez el segundo factor positivo y el tercero negativo. Por otra parte, las dos condiciones en $\boxed{2}$ indican

$$x < \tfrac{3}{2} \quad \text{y} \quad x > -4,$$

es decir que $x$ debe pertenecer a $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cap (-4, \infty) = \left(-4, \frac{3}{2}\right)$, lo que nos da el conjunto solución para **(i)**.

Con respecto a **(ii)**, por ser el primer factor positivo, las opciones posibles son:

$$+ \times + \times + \qquad \text{o} \qquad + \times - \times -.$$

Es decir,

$$2x - 3 > 0 \quad \text{y} \quad x + 4 > 0, \quad \boxed{3}$$

o bien

$$2x - 3 < 0 \quad \text{y} \quad x + 4 < 0. \quad \boxed{4}$$

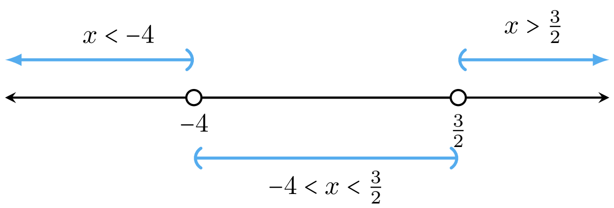
Las dos condiciones en 3 son equivalentes a $x > \frac{3}{2}$ y $x > -4$. Es decir, $x$ debe pertenecer a $\left(\frac{3}{2}, \infty\right) \cap (-4, \infty) = \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$. Esto nos da un conjunto solución, pero falta unirle lo que hallemos al resolver la posibilidad restante dada en 4. Allí, las condiciones indican $x < \frac{3}{2}$ y $x < -4$. La intersección de estos dos intervalos es $(-\infty, -4)$. Por lo tanto, la solución para la inecuación dada en **(ii)** es

$$S = \left(\tfrac{3}{2}, \infty\right) \cup (-\infty, -4) = \mathbb{R} - \left[-4, \tfrac{3}{2}\right].$$

Una forma alternativa (y más simple) de escribir todo lo desarrollado en el ejemplo anterior es mediante el uso de una **tabla de signos**, en la que analizaremos el signo de cada factor en ciertos intervalos. Estos intervalos son los generados por los valores que hacen que el producto sea cero. En este caso, el producto es

$$(x^2 + 1)(2x - 3)(x + 4),$$

el cual vale cero si $x = \frac{3}{2}$ o si $x = -4$. Si ubicamos estos puntos en la recta numérica, esta queda dividida en tres partes:




Esto nos permite confeccionar una tabla que contenga a estos intervalos (sin los extremos) y al signo de cada factor en cada uno de ellos (para determinar el signo de un factor en un intervalo se puede tomar un punto en dicho intervalo, hallar el valor numérico del factor en él, y ver qué signo tiene). De esto se deduce el signo de la expresión algebraica completa en cada intervalo usando la regla de los signos, como se muestra a continuación:

| Factor \ Intervalo | $(-\infty, -4)$ | $\left(-4, \frac{3}{2}\right)$ | $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ |
|---|---|---|---|
| $x^2 + 1$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $2x - 3$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $x + 4$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $(x^2 + 1)(2x - 3)(x + 4)$ | $+$ | $-$ | $+$ |

De la tabla anterior se deduce que el producto $(x^2 + 1)(2x - 3)(x + 4)$ es menor que cero en $\left(-4, \frac{3}{2}\right)$, y es positivo en $(-\infty, -4) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$. Esto coincide con lo hallado en **(i)** y **(ii)** en el ejemplo anterior, respectivamente, pero de una manera bastante más sencilla y gráfica.

Ingresar en el campo de entradas de GeoGebra la inecuación

$$(x^2+1)(2x-3)(x+4)<0$$

para comparar con lo obtenido en el ejemplo anterior.

**Ejemplo 135.** **Utilizando tabla de signos.** Utilizar una tabla de signos para resolver la inecuación

$$(x-2)(x+3)\,x \geq 0.$$

*Solución:* Los valores que anulan el producto son $x=-3$, $x=0$ y $x=2$, lo que divide la recta numérica en 4 intervalos. La tabla correspondiente es:

| Factor \ Intervalo | $(-\infty,-3)$ | $(-3,0)$ | $(0,2)$ | $(2,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $x+3$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $(x-2)(x+3)\,x$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

De la tabla se concluye que el conjunto solución para la inecuación dada es $S=[-3,0]\cup[2,\infty)$. «

Notar que en el último ejemplo, a diferencia del anterior, hemos tomado intervalos cerrados, pues en la desigualdad tenemos $\geq$ en lugar de $>$. Es decir, cuando la desigualdad es estricta no incluimos a los extremos de los intervalos (pues son los que hacen el producto igual a cero). En caso contrario los incluimos, **excepto** cuando sean valores no permitidos, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 136.** Hallar las soluciones de la siguiente inecuación

$$\frac{(x+3)(x^2-1)}{x-6} \leq 0.$$

*Solución:* Puesto que $(x^2-1)$ es una diferencia de cuadrados, el numerador de la fracción anterior se factoriza completamente como $(x+3)(x-1)(x+1)$. Entonces los valores que lo anulan son $x=-3$, $x=-1$ y $x=1$. A esta lista agregamos los valores que anulan al denominador, que en este caso es solamente $x=6$. Estos 4 valores inducen 5 intervalos, a los que les corresponde la siguiente tabla de signos:

| Factor \ Intervalo | $(-\infty,-3)$ | $(-3,-1)$ | $(-1,1)$ | $(1,6)$ | $(6,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-6$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $\frac{(x+3)(x^2-1)}{x-6}$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

De la tabla se deduce que el conjunto solución es $S = [-3,-1] \cup [1,6)$. Notar que si bien la desigualdad no es estricta, incluimos todos los extremos excepto el 6, pues es un valor no permitido en la operación ya que anula el denominador, y la división por cero no está definida.

## Ejercicios 4.5

**1.** Resolver el problema planteado en el Ejemplo 86 de la página 99, suponiendo que solamente se consideran números naturales para las edades.

**2.** La ganancia de una empresa que vende paletas para tenis de mesa viene dada por $G(x) = 5(3x-7)-8(x+10)$, siendo $x$ el número de unidades vendidas. ¿A partir de cuántas unidades vendidas la empresa obtiene ganancias?

**3.** Una empresa tiene unos costos de producción fijos de \$2400, más \$12 por cada unidad de producto fabricada. Sabiendo que el precio de venta de cada unidad de producto es de \$16, calcular a partir de cuántas unidades vendidas la empresa tiene beneficios.

**4–25.** Resolver las inecuaciones.

**4.** $5(4-3x) \geq 2$

**5.** $-2(-3x+5) < 2(x+3)$

**6.** $2(x-2)+3x < 5x+6$

**7.** $\frac{3(x-1)}{2} - x > \frac{x-3}{2}$

**8.** $|5t-9| > 1$

**9.** $|-3-2y| \leq 4$

**10.** $-2|x+1|+8 < 0$

**11.** $|3-t|-5 \geq 0$

**12.** $\sqrt[4]{(2x+1)^4} \leq 5$

**13.** $(x-2)(x+7)(x-5)x^2 < 0$

**14.** $x^2 - 9x + 14 \leq 0$

**15.** $5^{1-x^2} \leq 5^{-3}$

**16.** $\sqrt[3]{5^{7-x}} \leq 5^2$

**17.** $\left(7^{2-x}\right)^{4-x} < 1$

**18.** $\frac{4^{x-1}}{2^{x+2}} \geq 128$

**19.** $\ln(7-3x) - \ln(1-x) \leq \ln 5$

**20.** $2\log(x) - \log(x^2 - 2x + 6) \geq 0$

**21.** $\log(x-1) + \log(3x-5) < \log(2x-3)$

**22.** $\left(\frac{1}{4}\right)^{1-x^2} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

**23.** $\frac{x^2-9}{x-1} \leq 0$

**24.** $\frac{x^2-1}{x^2} \geq 0$

**25.** $\frac{x^2-3x+2}{4-x^2} \leq 0$

**26.** Factorizar los polinomios adecuados para resolver las inecuaciones dadas:

**(a)** $x^2 + 3x + 2 < 0$
**(b)** $x^3 - 2x^2 \geq 5x - 6$
**(c)** $x^3 - 4x^2 + x + 5 \leq x^2 + 10$
**(d)** $x^3 > 9x$

**27.** Ingresar en GeoGebra las inecuaciones polinómicas del ejercicio anterior para comparar los resultados obtenidos.