Práctico 9
Completitud del Cálculo de Predicados

Ejercicio 4

Bosquejo de solución

Recordemos que $A \subseteq B \Leftrightarrow (\bar{\forall} a \in A) a \in B$ y que $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

a. Si $\Gamma \subseteq \Delta$ entonces $Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma)$.

H) $\Gamma \subseteq \Delta$

T) $Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma)$

Demo.

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \in Mod(\Delta) \\
\Leftrightarrow \text{(Def. de } Mod\text{)} \\
\mathcal{M} \models \Delta \\
\Leftrightarrow \text{(Def. de } \models\text{)} \\
(\bar{\forall} \varphi \in \Delta)(\mathcal{M} \models \varphi) \\
\Rightarrow \text{(Por Hip. } \Gamma \subseteq \Delta\text{)} \\
(\bar{\forall} \varphi \in \Gamma)(\mathcal{M} \models \varphi) \\
\Leftrightarrow \text{(Def. de } \models\text{)} \\
\mathcal{M} \models \Gamma \\
\Leftrightarrow \text{(Def. de } Mod\text{)} \\
\mathcal{M} \in Mod(\Gamma)
\end{array}$$

b. Si $k_1 \subseteq k_2$ entonces $Th(k_2) \subseteq Th(k_1)$.

H) $k_1 \subseteq k_2$

T) $Th(k_2) \subseteq Th(k_1)$

Demo.

$$\begin{array}{l}
\varphi \in Th(\kappa_2) \\
\Leftrightarrow \text{(Def. de } Th\text{)} \\
(\bar{\forall} \mathcal{M} \in \kappa_2)(\mathcal{M} \models \varphi) \\
\Rightarrow \text{(Por Hip. } k_1 \subseteq k_2\text{)} \\
(\bar{\forall} \mathcal{M} \in \kappa_1)(\mathcal{M} \models \varphi) \\
\Leftrightarrow \text{(Def. de } Th\text{)} \\
\varphi \in Th(\kappa_1)
\end{array}$$

c. $Mod(\Gamma \cup \Delta) = Mod(\Gamma) \cap Mod(\Delta)$.

T) $Mod(\Gamma \cup \Delta) = Mod(\Gamma) \cap Mod(\Delta)$

Demo.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \in Mod(\Gamma \cup \Delta)\\
&\Leftrightarrow \text{(Def. de } Mod\text{)}\\
&\mathcal{M} \models \Gamma \cup \Delta\\
&\Leftrightarrow \text{(Def. de } \models\text{)}\\
&(\bar{\forall}\alpha \in \Gamma \cup \Delta)(\mathcal{M} \models \alpha)\\
&\Leftrightarrow \text{(Teo. de conjuntos)}\\
&(\bar{\forall}\varphi \in \Gamma)(\mathcal{M} \models \varphi)\ y\ (\bar{\forall}\psi \in \Delta)(\mathcal{M} \models \psi)\\
&\Leftrightarrow \text{(Def. de } \models\text{)}\\
&\mathcal{M} \models \Gamma\ y\ \mathcal{M} \models \Delta\\
&\Leftrightarrow \text{(Def. de } Mod \times 2\text{)}\\
&\mathcal{M} \in Mod(\Gamma)\ y\ \mathcal{M} \in Mod(\Delta)\\
&\Leftrightarrow \text{(Teo. de conjuntos)}\\
&\mathcal{M} \in Mod(\Gamma) \cap Mod(\Delta)
\end{aligned}$$

d. $Th(k_1 \cup k_2) = Th(k_1) \cap Th(k_2)$.

T) $Th(k_1 \cup k_2) = Th(k_1) \cap Th(k_2)$

Demo.

$$\begin{aligned}
&\alpha \in Th(k_1 \cup k_2)\\
&\Leftrightarrow \text{(Def. de } Th\text{)}\\
&(\bar{\forall}\mathcal{M} \in k_1 \cup k_2)(\mathcal{M} \models \alpha)\\
&\Leftrightarrow \text{(Teo. de Conjuntos)}\\
&(\bar{\forall}\mathcal{M} \in k_1)(\mathcal{M} \models \alpha)\ y\ (\bar{\forall}\mathcal{M} \in k_2)(\mathcal{M} \models \alpha)\\
&\Leftrightarrow \text{(Def. de } Th \times 2\text{)}\\
&\alpha \in Th(k_1)\ y\ \alpha \in Th(k_2)\\
&\Leftrightarrow \text{(Teo. de Conjuntos)}\\
&\alpha \in Th(k_1) \cap Th(k_2)
\end{aligned}$$

e. $k \subseteq Mod(\Gamma)$ sii $\Gamma \subseteq Th(k)$.

Prueba del directo

H) $k \subseteq Mod(\Gamma)$

T) $\Gamma \subseteq Th(k)$

Demo.

$$\begin{aligned}
&\varphi \in \Gamma\\
&\Rightarrow \text{(Def. de } Mod(\Gamma)\text{)}\\
&(\bar{\forall}\mathcal{M} \in Mod(\Gamma))(\mathcal{M} \models \varphi)\\
&\Rightarrow \text{(Por Hip. } k \subseteq Mod(\Gamma)\text{)}\\
&(\bar{\forall}\mathcal{M} \in k)(\mathcal{M} \models \varphi)\\
&\Leftrightarrow \text{(Def. de } Th\text{)}\\
&\varphi \in Th(k)
\end{aligned}$$

Prueba del recíproco

H) $\Gamma \subseteq Th(k)$

T) $k \subseteq Mod(\Gamma)$

Demo.

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \in k \\
\Rightarrow \text{(Def. de } Th) \\
(\bar{\forall}\alpha \in Th(k))(\mathcal{M} \models \alpha) \\
\Rightarrow \text{(Por Hip. } \Gamma \subseteq Th(k) \text{)} \\
(\bar{\forall}\alpha \in \Gamma)(\mathcal{M} \models \alpha) \\
\Leftrightarrow \text{(Def. de } Mod) \\
\mathcal{M} \in Mod(\Gamma)
\end{array}$$

f. $Mod(\Gamma) \cup Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma \cap \Delta)$.

H) $\mathcal{M} \in Mod(\Gamma) \cup Mod(\Delta)$

T) $\mathcal{M} \in Mod(\Gamma \cap \Delta)$

Demo.
$\mathcal{M} \in Mod(\Gamma) \cup Mod(\Delta)$, por lo que o bien $\mathcal{M} \in Mod(\Gamma)$ o bien $\mathcal{M} \in Mod(\Delta)$.
Sin pérdida de generalidad, suponemos $\mathcal{M} \in Mod(\Gamma)$.

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \in Mod(\Gamma) \\
\Rightarrow \text{(Def. de } Mod) \\
(\bar{\forall}\varphi \in \Gamma)(\mathcal{M} \models \varphi) \\
\Rightarrow \text{(porque } \Gamma \cap \Delta \subseteq \Gamma \text{)} \\
(\bar{\forall}\varphi \in \Gamma \cap \Delta)(\mathcal{M} \models \varphi) \\
\Rightarrow \text{(Def. de } Mod) \\
\mathcal{M} \in Mod(\Gamma \cap \Delta)
\end{array}$$

Mostremos que en este caso $\subseteq$ no puede ser sutituído por $=$.
Sea $\Gamma = \{\bot\}$, $\Delta = \{\neg\neg\bot\}$. Vamos a mostrar que

$$Mod(\Gamma) \cup Mod(\Delta) \neq Mod(\Gamma \cap \Delta)$$

H) $\Gamma = \{\bot\}$, $\Delta = \{\neg\neg\bot\}$

T) $Mod(\Gamma) \cup Mod(\Delta) \neq Mod(\Gamma \cap \Delta)$

Demo.

$$\begin{array}{l}
Mod(\Gamma \cap \Delta) \\
= \text{(Por def. de } \Gamma \text{ y } \Delta) \\
Mod(\emptyset) \\
= \text{(ejercicio 5a)} \\
\mathbb{E} \\
\neq \text{(def. } \mathbb{E}) \\
\emptyset \\
= (\bot \text{ no tiene modelo y } \neg\neg\bot eq \bot) \\
Mod(\Gamma) \cup Mod(\Delta)
\end{array}$$

g. $Th(k_1) \cup Th(k_2) \subseteq Th(k_1 \cap k_2)$.

H) $\varphi \in Th(k_1) \cup Th(k_2)$

T) $\varphi \in Th(k_1 \cap k_2)$

Demo.

$\varphi \in Th(k_1) \cup Th(k_2)$, por lo que o bien $\varphi \in Th(k_1)$ o bien $\varphi \in Th(k_2)$.
Sin pérdida de generalidad, suponemos $\varphi \in Th(k_1)$.

$$
\begin{array}{l}
\varphi \in Th(k_1) \\
\Rightarrow \text{(Def. de } Th\text{)} \\
(\bar{\forall}\mathcal{M} \in k_1)(\mathcal{M} \models \varphi) \\
\Rightarrow \text{(porque } k_1 \cap k_2 \subseteq k_1\text{)} \\
(\bar{\forall}\mathcal{M} \in k_1 \cap k_2)(\mathcal{M} \models \varphi) \\
\Rightarrow \text{(Def. de } Th\text{)} \\
\varphi \in Th(k_1 \cap k_2)
\end{array}
$$

Mostremos que en este caso $\subseteq$ no puede ser sutituído por $=$.
Sea $k_1 = \{\langle\{\circ\}, \emptyset\rangle\}$, $k_2 = \{\langle\{\circ\}, \{\circ\}\rangle\}$. Vamos a mostrar que

$$Th(k_1) \cup Th(k_2) \neq Th(k_1 \cap k_2)$$

$$
\begin{array}{l}
Th(k_1 \cap k_2) \\
= \text{(def. } k_1 \text{ y } k_2\text{)} \\
Th(\emptyset) \\
= \text{(ejercicio 5c)} \\
\mathtt{SENT} \\
\neq (\bot \in \mathtt{SENT} \text{ y } \bot \text{ no tiene modelo } *) \\
Th(k_1) \cup Th(k_2)
\end{array}
$$

$*$ Como $\bot$ no tiene modelo entonces $\bot \notin Th(k_1)$ y $\bot \notin Th(k_2)$

Ejercicio 5

Bosquejo de solución

a. $Mod(\emptyset) = \mathbb{E}$

$$
\begin{array}{l}
Mod(\emptyset) \\
= \text{(Por def. de } Mod\text{)} \\
\big\{\mathcal{M} \in \mathbb{E} \mid (\bar{\forall}\alpha \in \emptyset)\mathcal{M} \models \alpha\big\} \\
= \text{(Reescritura def } Mod\text{)} \\
\big\{\mathcal{M} \in \mathbb{E} \mid (\bar{\forall}\alpha \in \mathtt{SENT})(\alpha \in \emptyset \Rightarrow \mathcal{M} \models \alpha)\big\} \\
= \text{(por antecedente falso, todas las estructuras cumplen la propiedad)} \\
\mathbb{E}
\end{array}
$$

b. $Mod(\mathtt{SENT}) = \emptyset$

Supongamos por absurdo que existe $\mathcal{M} \in Mod(\mathtt{SENT})$. Entonces:

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \in Mod(\mathtt{SENT}) \\
\Rightarrow \text{(Por def. de } Mod\text{)} \\
\mathcal{M} \in \{\mathcal{M} \in \mathbb{E} \mid (\bar{\forall}\alpha \in \mathtt{SENT})\mathcal{M} \models \alpha\} \\
\Rightarrow \text{(Por pertenencia)} \\
(\bar{\forall}\alpha \in \mathtt{SENT})\mathcal{M} \models \alpha \\
\Rightarrow \text{(En particular debe valer para } \bot\text{)} \\
\mathcal{M} \models \bot
\end{array}$$

Lo que es absurdo. Por lo tanto no existe $\mathcal{M} \in Mod(\mathtt{SENT})$, o sea, $Mod(\mathtt{SENT}) = \emptyset$.

c. $Th(\emptyset) = \mathtt{SENT}$

$$\begin{array}{l}
Th(\emptyset) \\
= \text{(Por def. de } Th\text{)} \\
\{\alpha \in \mathtt{SENT} \mid (\bar{\forall}\mathcal{M} \in \emptyset)\mathcal{M} \models \alpha\} \\
= \text{(Reescritura de } Th\text{)} \\
\{\alpha \in \mathtt{SENT} \mid (\bar{\forall}\mathcal{M} \in \mathbb{E})(\mathcal{M} \in \emptyset \Rightarrow \mathcal{M} \models \alpha)\} \\
= \text{(por antecedente falso, todas las sentencias cumplen la propiedad)} \\
\mathtt{SENT}
\end{array}$$

d. $Th(\mathbb{E}) = \{\alpha \in \mathtt{SENT} \mid \vdash \alpha\}$

$$\begin{array}{l}
Th(\mathbb{E}) \\
= \text{(Por def. de } Th\text{)} \\
\{\alpha \in \mathtt{SENT} \mid (\bar{\forall}\mathcal{M} \in \mathbb{E})\mathcal{M} \models \alpha\} \\
= \text{(Def. de verdad lógica)} \\
\{\alpha \in \mathtt{SENT} \mid \models \alpha\} \\
= \text{(Corrección y Completitud)} \\
\{\alpha \in \mathtt{SENT} \mid \vdash \alpha\}
\end{array}$$

e. $\textsc{Cons}(\emptyset) = \{\alpha \in \mathtt{SENT} \mid \vdash \alpha\}$

$$\begin{array}{l}
\textsc{Cons}(\emptyset) \\
= \text{(Por def. de } \textsc{Cons}\text{)} \\
\{\alpha \in \mathtt{SENT} \mid \emptyset \vdash \alpha\} \\
= \text{(Por def. de teorema)} \\
\{\alpha \in \mathtt{SENT} \mid \vdash \alpha\}
\end{array}$$

f. $\textsc{Cons}(\mathtt{SENT}) = \mathtt{SENT}$
Como vimos anteriormente $\bot \in \mathtt{SENT}$ entonces, tomando $\bot$ como hipótesis podemos derivar cualquier otra $\varphi \in \mathtt{SENT}$ por la regla $E_\bot$ (Eliminación de $\bot$).

Ejercicio 10

Bosquejo de solución

a. **T)** $Th(\{\mathcal{M}\})$ es consistente maximal para cualquier estructura $\mathcal{M}$.

Demo)

Primero probaremos que $Th(\{\mathcal{M}\})$ es consistente, y luego que es consistente maximal.

- $Th(\{\mathcal{M}\})$ es consistente:
  Por definición, $Th(\{\mathcal{M}\})$ es el conjunto de las fórmulas que tienen a $\mathcal{M}$ como modelo. Entonces se cumple que $(\forall\alpha \in Th(\{\mathcal{M}\}))\mathcal{M} \models \alpha$.
  Por condición suficiente de consistencia, como $Th(\{\mathcal{M}\})$ tiene un modelo, $Th(\{\mathcal{M}\})$ es consistente.
- $Th(\{\mathcal{M}\})$ es consistente maximal:
  Queremos probar que si $\varphi \notin Th(\{\mathcal{M}\})$ entonces $Th(\{\mathcal{M}\}) \cup \{\varphi\} \vdash \bot$.

$$\begin{array}{l} \varphi \notin Th(\{\mathcal{M}\}) \\ \Rightarrow \text{(Def. de } Th(\{\mathcal{M}\})) \\ \mathcal{M} \not\models \varphi \\ \Rightarrow \text{(2.4.5)} \\ \mathcal{M} \models \neg\varphi \\ \Rightarrow \text{(Def. de } Th(\{\mathcal{M}\})) \\ \neg\varphi \in Th(\{\mathcal{M}\}) \\ \Rightarrow \text{(Por regla E } \neg) \\ Th(\{\mathcal{M}\}) \cup \{\varphi\} \vdash \bot \end{array}$$

  Por lo tanto $Th(\{\mathcal{M}\})$ es consistente maximal.

b. **Directo ($\Rightarrow$)**

H) $\alpha \in \Gamma$, para todo Γ consistente maximal.
T) $\models \alpha$.
Demo)

Sea $\mathcal{M}$ una estructura arbitraria del tipo adecuado. Entonces, por parte a:

$$\begin{array}{l} Th(\{\mathcal{M}\}) \text{ consistente maximal} \\ \Rightarrow (\alpha \text{ está en todos los consistentes maximales}) \\ \alpha \in Th(\{\mathcal{M}\}) \\ \Rightarrow \text{(def. de } Th) \\ \mathcal{M} \models \alpha \end{array}$$

Como $\mathcal{M}$ era arbitraria, toda estructura del tipo adecuado modela α, por lo que se cumple:

$$\models \alpha$$

Recíproco ($\Leftarrow$)

H) $\models \alpha$
T) $\alpha \in \Gamma$, para todo Γ consistente maximal.
Demo)

Sea Γ un conjunto consistente maximal cualquiera. Como Γ es consistente maximal, si $\Gamma \cup \{\alpha\} \nvdash \bot$ es por que $\alpha \in \Gamma$.

$$
\begin{aligned}
&\Gamma \text{ consistente maximal}\\
&\Rightarrow_{(\Gamma \text{ es consistente})}\\
&(\bar{\exists}\mathcal{M}')(\mathcal{M}' \models \Gamma)\\
&\Rightarrow_{(\models \alpha)}\\
&(\bar{\exists}\mathcal{M}')(\mathcal{M}' \models \Gamma \text{ y } \mathcal{M}' \models \alpha)\\
&\Rightarrow_{(\text{def. } \models)}\\
&(\bar{\exists}\mathcal{M}')(\mathcal{M}' \models \Gamma \cup \{\alpha\})\\
&\Rightarrow_{(\text{Por condición suficiente de consistencia})}\\
&\Gamma \cup \{\alpha\} \nvdash \bot\\
&\Rightarrow_{(\Gamma \text{ es consistente maximal})}\\
&\alpha \in \Gamma
\end{aligned}
$$

Se probó que $\alpha \in \Gamma$ para todo Γ consistente maximal si y solo si $\models \alpha$.

Ejercicio 12

Bosquejo de solución

a.
- **T_1 es extensión de T**: Debemos probar que $T \subseteq T_1$.

  Por un lado sabemos que $\texttt{SENT}_{\mathcal{L}} \subseteq \texttt{SENT}_{\mathcal{L}'}$, ya que $\mathcal{L}'$ es una extensión de $\mathcal{L}$, y por lo tanto $\texttt{SENT}_{\mathcal{L}'}$ tiene todas las sentencias de $\texttt{SENT}_{\mathcal{L}}$ más las que puedo formar usando el simbolo de predicado Q.

  Además, consideremos la siguiente derivación:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(Q(x) \wedge \neg Q(x))}{Q(x) \wedge \neg Q(x)}\, E\forall\ (*)}{\neg Q(x)}\, E\wedge_2 \qquad \dfrac{\dfrac{(\forall x)(Q(x) \wedge \neg Q(x))}{Q(x) \wedge \neg Q(x)}\, E\forall\ (**)}{Q(x)}\, E\wedge_1}{\bot}\, E\neg
$$

  (*) (**) x esta libre para x en $Q(x) \wedge \neg Q(x)$.

  De la derivación planteada se desprende que $\forall x(Q(x) \wedge \neg Q(x)) \vdash \bot$, y por lo tanto $T_1 = \textsc{Cons}(\{\forall x(Q(x) \wedge \neg Q(x))\}) = \texttt{SENT}_{\mathcal{L}'}$.

  En conclusión, tenemos que $T \subseteq \texttt{SENT}_{\mathcal{L}} \subseteq \texttt{SENT}_{\mathcal{L}'} = T_1$, y con esto probamos que T_1 es extensión de T.

- **T_2 NO es extensión de T**:

  Queremos probar que $T \nsubseteq T_2$.

$$
\begin{aligned}
&T \nsubseteq T_2\\
&\Leftrightarrow_{(\text{Def. de } T_2 \text{ y } T)}\\
&\textsc{Cons}(\{\forall x P(x)\}) \nsubseteq \textsc{Cons}(\{Q(c) \to \forall x P(x)\})\\
&\Leftrightarrow_{(\text{Def. de } \subseteq)}\\
&(\bar{\exists}\varphi \in \texttt{SENT}_{\mathcal{L}'})\forall x P(x) \vdash \varphi \text{ y } Q(c) \to \forall x P(x) \nvdash \varphi
\end{aligned}
$$

  Tomamos $\varphi = \forall x P(x)$. $\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)$ es inmediato.

  Veamos que $Q(c) \to \forall x P(x) \nvdash \forall x P(x)$.

$$
\begin{aligned}
&Q(c) \to \forall x P(x) \nvdash \forall x P(x)\\
&\Leftrightarrow \text{(Por completitud)}\\
&Q(c) \to \forall x P(x) \not\models \forall x P(x)\\
&\Leftrightarrow \text{(Por def. de } \models)\\
&(\bar{\exists}\mathcal{M})\mathcal{M} \models Q(c) \to \forall x P(x) \text{ y } \mathcal{M} \not\models \forall x P(x)
\end{aligned}
$$

Si tomamos $\mathcal{M} := \langle \mathbb{N}, Par, Par, 1 \rangle$.

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models Q(c) \to \forall x P(x)\\
&\Leftrightarrow \text{(2.4.5)}\\
&\text{Si } \mathcal{M} \models Q(c) \text{ entonces } \mathcal{M} \models \forall x P(x)\\
&\Leftrightarrow \text{(Def. de } \models)\\
&\text{Si } 1 \in Par \text{ entonces } \mathcal{M} \models \forall x P(x)\\
&\text{Esto último se cumple ya que } 1 \notin Par
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M} \not\models \forall x P(x)\\
&\Leftrightarrow \text{(2.4.5)}\\
&(\bar{\exists} n \in \mathbb{N})\mathcal{M} \not\models P(\bar{n})\\
&\Leftrightarrow \text{(Def. de } \models)\\
&(\bar{\exists} n \in \mathbb{N}) n \notin Par\\
&\text{Esto último se cumple. Basta tomar } n = 1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, probamos que $T \not\subseteq T_2$.

b.
- **T_1 NO es extensión conservativa de T:**
  En la parte anterior probamos que $T_1 = \mathtt{SENT}_{\mathcal{L}'}$.

$$
\begin{aligned}
&T_1 \cap \mathcal{L}\\
&= \text{(Def. de } T_1)\\
&\mathtt{SENT}_{\mathcal{L}'} \cap \mathcal{L}\\
&= (\mathcal{L}' \text{ es una extensión de } \mathcal{L})\\
&\mathtt{SENT}_{\mathcal{L}}
\end{aligned}
$$

  Si T_1 fuera extensión conservativa de T, deberia cumplirse que $T_1 \cap \mathcal{L} = \mathtt{SENT}_{\mathcal{L}} = T$. Veamos que esto no es cierto ya que $\perp \notin T$.

$$
\begin{aligned}
&\perp \notin T\\
&\Leftrightarrow \text{(Def. de } T)\\
&\forall x P(x) \nvdash \perp\\
&\Leftrightarrow \text{(Por completitud)}\\
&\forall x P(x) \not\models \perp\\
&\Leftrightarrow \text{(Def. de } \models)\\
&(\bar{\exists}\mathcal{M})\mathcal{M} \models \forall x P(x)
\end{aligned}
$$

  Si tomamos $\mathcal{M}' := \langle \mathbb{N}, \mathbb{N} \rangle$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}' \models \forall x P(x)\\
&\Leftrightarrow \text{(2.4.5)}\\
&(\bar{\forall} n \in \mathbb{N})\mathcal{M}' \models P(\bar{n})\\
&\Leftrightarrow \text{(Def. de } \models)\\
&(\bar{\forall} n \in \mathbb{N}) n \in \mathbb{N}\\
&\text{Lo cual se cumple}
\end{aligned}
$$

  Por lo tanto, probamos que T_1 no es extensión conservativa de T.
- **T_2 NO es extensión conservativa de T:**
  Es inmediato ya que T_2 no es extensión de T.

c.
- T_1 **NO es conjunto de axiomas para** T:

  Para que T_1 sea conjunto de axiomas para T se tiene que cumplir que $T = \textsc{Cons}(T_1) = \textsc{Cons}(\textsc{Cons}(\{\forall x(Q(x) \land \neg Q(x))\}))$. Si tomamos $\psi = \forall x(Q(x) \land \neg Q(x))$, podemos observar que $\psi \in \textsc{Cons}(\textsc{Cons}(\{\forall x(Q(x) \land \neg Q(x))\}))$, pero sin embargo $\psi \notin T$ ya que ψ contiene el simbolo de predicado Q, el cual no se encuentra en el lenguaje sobre el que esta definido T.

  Por lo tanto concluimos que T_1 no es conjunto de axiomas para T.

- T_2 **NO es conjunto de axiomas para** T:

  El argumento es el mismo que realizamos para T_1, solo que tomando
  $\psi = Q(c) \to \forall x P(x)$.