# Teoría de Lenguajes

Pumping Lema para
Lenguajes Libres de Contexto

# Aplicación

Consideremos el siguiente lenguaje

$$L = \{ 0^k 1^k 2^k / k > 0 \}$$

¿será Libre de Contexto?

- ¿cómo sería un APD?

- ¿y una gramática?

# Definiciones y propiedades

- Forma Normal de Chomsky:

  $A \rightarrow BC$   A,B,C variables
  $A \rightarrow a$   a terminal

- Todo lenguaje libre de contexto que no contenga ε puede ser generado por una gramática normalizada según la Forma Normal de Chomsky

- <u>Lema:</u> Un árbol de derivación binario de altura h tiene como resultado una tira de largo $\leq 2^h$

# Pumping Lema II

**H)** $L$ es un Lenguaje Libre de Contexto

**T)** $\exists$ n $\in \mathbb{N}$ / $\forall$ z $\in L \wedge |z| \geq n$ $\exists$ (al menos una) descomposición de z en

z = $uvwxy$ /

i) $|vwx| \leq n$

ii) $|vx| \geq 1$

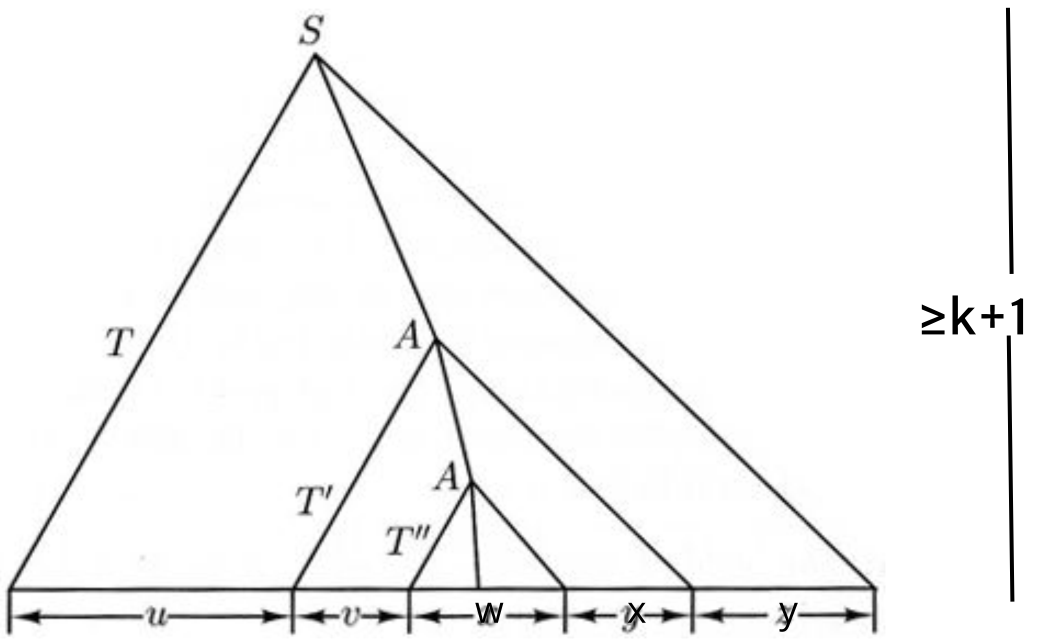
iii) $\forall$ $i \geq 0$, $z_i = uv^i wx^i y \in L$

# Pumping Lema II

**Demostración:**

*L* es LLC → ∃ G: (V,T,P,S) en FNC / *L* = L(G)
|V| = k
$n = 2^{k+1}$
tomamos una z / $|z| \geq 2^{k+1}$
…

Recordar que si $\varepsilon \in L$, dejamos $S \rightarrow \varepsilon$ y transformamos G a FNC



# Contrarecíproco del Pumping Lema II

**Enunciado del Contrarrecíproco del Pumping Lema (PL)**

**H)** Sea un lenguaje *L*
$\forall$ n $\in \mathbb{N}$ / $\exists$ z $\in$ *L* $\wedge$ |z| $\geq$ n $\forall$ descomposición de z en
z = *uvwxy* donde alguna de estas tres condiciones no se cumple:

i) $|vwx| \leq n$

ii) $|vx| \geq 1$

iii) $\forall\, i \geq 0,\ z_i = uv^iwx^iy \in L$

**T)** *L* no es un LLC

# Contrarecíproco del Pumping Lema II

**Para probar que *L* no es LLC**

Fijar un **n** $\in \mathbb{N}$,

<u>**Elegir z = …**</u> (en función del **n**) con $z \in L \wedge |z| \geq n$

<u>**Probar ∀ descomposición**</u> de z = uvwxy que cumple:

i) $|vwx| \leq n$

ii) $|vx| \geq 1$

<u>**Encontrar**</u> $i \geq 0$ y <u>**justificar**</u> que $z_i = uv^i w x^i y \notin L$

*Una vez **justificada toda descomposición** de manera adecuada y **argumentando de acuerdo a la estructura del lenguaje**, agregar la cláusula que indica que cualquier otra descomposición de z, NO cumple las condiciones i) y ii).*

*De esa forma se puede concluir por el contrarrecíproco del P L II que L NO es un Lenguaje Libre de Contexto.*

# Aplicación

Sea el lenguaje

$$L = \{ 0^k 1^k 2^k / k > 0 \}$$

# Aplicación

Sea el lenguaje

$$L = \{ 0^k 1^k 2^k \ / \ k > 0 \}$$

Intuitivamente creemos – en base a lo que estuvimos comentando antes – que NO es un lenguaje libre de contexto e intentaremos probarlo por el contrarrecíproco del PL

# Aplicación

Sea el lenguaje

$$L = \{ 0^k 1^k 2^k / k > 0 \}$$

Pasos:

1.- Fijamos un N (positivo y arbitrario)
2.- Elegimos una tira $z \in L$, en función del N y que $|z| \geq N$
3.- Se hacen **<u>todas</u>** las descomposiciones de z que cumplan:
$|vwx| \leq N$ y $|vx| \geq 1$ ;
4.- Se busca para cada descomposición un $i \geq 0$ de manera que $uv^i wx^i y \notin L$
5.- Si se logra, entonces podemos afirmar que L NO es un lenguaje libre de contexto

# Aplicación

Sea el lenguaje

$$L = \{ 0^k 1^k 2^k \,/\, k > 0 \}$$

en función del N

Consideramos $N \in \mathbb{N}$, elijo: $z = ? \in L \wedge |z| \geq N$

qué tiras puedo elegir:

- $z = 0^{|N/3|} 1^{|N/3|} 2^{|N/3|}$
- $z = 0^N 1^N 2^N$
- $z = 0^{2N} 1^{2N} 2^{2N}$
- $z = 0^{3N} 1^{3N} 2^{3N}$
- ....

# Aplicación

Tomemos $z = 0^N 1^N 2^N$

Se estudian todas las descomposiciones de **z** en *uvwxy*,
tal que:

i) $|vwx| \leq N$

ii) $|vx| \geq 1$

entonces:

- plantear y estudiar **todas** las familias (descomposiciones)
- argumentar por qué $z_i = uv^iwx^iy \notin L$ **para cada** familia en función de la estructura del lenguaje
- en aquellos casos que se agrupen análisis, argumentar por qué un caso es análogo a otro ya estudiado pero marcar su diferencia

# Aplicación

Análisis de familias con: i) $|vwx| \leq N$ y ii) $|vx| \geq 1$

| Familias (o casos) | $0^N$ | $1^N$ | $2^N$ |
|---|---|---|---|
| 1) | v x | | |
| 2) | v x | x | |
| 3) | v | x | |
| 4) | v | v x | |
| 5) | | v x | |
| 6) | | v x | x |
| 7) | | v | x |
| 8) | | v | v x |
| 9) | | | v x |

# Aplicación

**Amarillo:** $v$ **y** $x$ **con el mismo símbolo**

| Familias (o casos) | $0^N$ | $1^N$ | $2^N$ |
| --- | --- | --- | --- |
| 1) | v x | | |
| 2) | v x | x | |
| 3) | v | x | |
| 4) | v | v x | |
| 5) | | v x | |
| 6) | | v x | x |
| 7) | | v | x |
| 8) | | v | v x |
| 9) | | | v x |

# Aplicación

**Azul:** $v$ y $x$ con símbolos distintos consecutivos

| Familias (o casos) | $0^N$ | $1^N$ | $2^N$ |
|---|---|---|---|
| 1) | v x | | |
| 2) | v x | x | |
| 3) | v | x | |
| 4) | v | v x | |
| 5) | | v x | |
| 6) | | v x | x |
| 7) | | v | x |
| 8) | | v | v x |
| 9) | | | v x |

# Aplicación

Verde: $v$ o $x$ con mezcla de dos símbolos (alguno de ellos)

| Familias (o casos) | $0^N$ | $1^N$ | $2^N$ |
|---|---|---|---|
| 1) | v x | | |
| 2) | v x | x | |
| 3) | v | x | |
| 4) | v | v x | |
| 5) | | v x | |
| 6) | | v x | x |
| 7) | | v | x |
| 8) | | v | v x |
| 9) | | | v x |

# Aplicación

| Familias (o casos) | $0^N$ | $1^N$ | $2^N$ |
|---|---|---|---|
| 1) | v x | | |
| 2) | v x | x | |
| 3) | v | x | |
| 4) | v | v x | |
| 5) | | v x | |
| 6) | | v x | x |
| 7) | | v | x |
| 8) | | v | v x |
| 9) | | | v x |

# Aplicación

Fijándose entonces en esa clasificación, se pueden distinguir 3 grandes familias de casos distintos:

- $v$ y $x$ con el mismo símbolo (amarillo)
- $v$ y $x$ con símbolos distintos pero consecutivos por la restricción de $|vwx| \leq N$ (azul)
- $v$ o $x$ con mezcla de dos símbolos en alguno de ellos (verde)

La estrategia es entonces para un representante de cada familia, buscar la "$i$" donde falle la 3er. condición ($uv^iwx^iy \notin L$) y luego indicar los casos "análogos", aunque **<u>siempre</u>** indicando qué propiedad del lenguaje es la que se "rompe" en cada uno de esos casos "análogos"

# Aplicación

**Caso 1:**

$u = 0^p$

$v = 0^q$ $\qquad q+s \geq 1$

$w = 0^r$ $\qquad q+r+s \leq N$

$x = 0^s$

$y = 0^{N-p-q-r-s}\,1^N\,2^N$

$z_i = 0^p\,(0^q)^i\,0^r\,(0^s)^i\,0^{N-p-q-r-s}\,1^N\,2^N$

$z_i = 0^{p+q.i+r+s.i+N-p-q-r-s}\,1^N\,2^N$

$z_i = 0^{N+(q+s).(i-1)}\,1^N\,2^N$

Elijo $i = 0$, $z_0 = 0^{N-(q+s)}\,1^N\,2^N$

y como no se cumple que $|z_0|_0 = |z_0|_1$ porque $q+s \geq 1$, entonces $z_0 \notin L$

# Aplicación

Los casos 5) y 9) son análogos al 1)

La diferencia es:

- en el 5), lo que cambian son los **1**'s con respecto al resto (los **0**'s o **2**'s)
- en el 9), lo que cambian son los **2**'s con respecto al resto (los **0**'s o **1**'s)

# Aplicación

**Caso 2**

$u = 0^{N-q-r-s}$

$v = 0^q$ $q+s+t \geq 1$

$w = 0^r$ $q + r + s + t \leq N$

$x = 0^s 1^t$ $s > 0$, sino caemos en el Caso 3

$y = 1^{N-t} 2^N$ $t > 0$, sino caemos en el Caso 1

$(0^s 1^t)$ **i** veces

$z_i = 0^{N-q-r-s} (0^q)^i \; 0^r (0^s 1^t)^i \; 1^{N-t} 2^N$

$z_i = 0^{N+q.(i-1)-s} (0^s 1^t)^i \; 1^{N-t} 2^N$

$z_i = \; 0^{N+q.(i-1)-s} (0^s 1^t)^i 1^{N-t} 2^N$

Como s,t > 0, tomando i = 2, $z_2 = 0^{N+q-s} 0^s 1^t \, 0^s 1^t \, 1^{N-t} \, 2^N = 0^{N+q} 1^t \, 0^s \, 1^N$
$2^N$

y se puede ver que se mezclan en $z_2$ 0's con 1's entonces $z_2 \notin L$

# Aplicación

Los casos 4) , 6) y 8) son análogos al 2)

La diferencia es:

- en el 4), es lo mismo pero tomando la mezcla en el substring $\boldsymbol{\nu}$
- en el 6), lo que se mezclan son los **1**'s con los **2**'s
- en el 8), es lo mismo que el (6), pero tomando la mezcla en el substring $\boldsymbol{\nu}$

# Aplicación

**Caso 3**

$u = 0^{N-p-q}$
$v = 0^q$ $\quad q+s \geq 1$
$w = 0^p 1^r$ $\quad q+p+r+s \leq N$
$x = 1^s$
$y = 1^{N-r-s} 2^N$

$z_i = 0^{N-p-q} (0^q)^i \; 0^p 1^r (1^s)^i \; 1^{N-r-s} 2^N$
$z_i = 0^{N-p-q+q.i+p} \; 1^{r+s.i+N-r-s} \; 2^N$
$z_i = 0^{N+q.(i-1)} \; 1^{N+s.(i-1)} \; 2^N$

**Si $q = 0$, entonces $s > 0$.** Con $i = 0$, $z_0 = 0^N 1^{N-s} 2^N$
se cumple que $|z_0|_2 > |z_0|_1$ entonces $z_0 \notin L$

**Si $q > 0$ (no importa s),** Con $i = 0$, $z_0 = 0^{N-q} 1^{N-s} 2^N$
se cumple que $|z_0|_0 < |z_0|_2$ entonces $z_0 \notin L$

# Aplicación

El caso 7) es análogo al 3)

La diferencia es:

- que se comparan con los **0**’s que son los que quedan fijos

# entonces, al final…

Como se han estudiado todas las descomposiciones de la tira $z = uvwxy$ tal que

i) $|vwx| \leq N$

ii) $|vx| \geq 1$

y para todos los casos se encontró un i tal que $z_i \notin L$

Entonces…

podemos concluir que $L$ **NO** es un Lenguaje Libre de Contexto (LLC)