

COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE MATERIALES

Flexión

Año 2024



ANEP

ADMINISTRACIÓN
NACIONAL DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

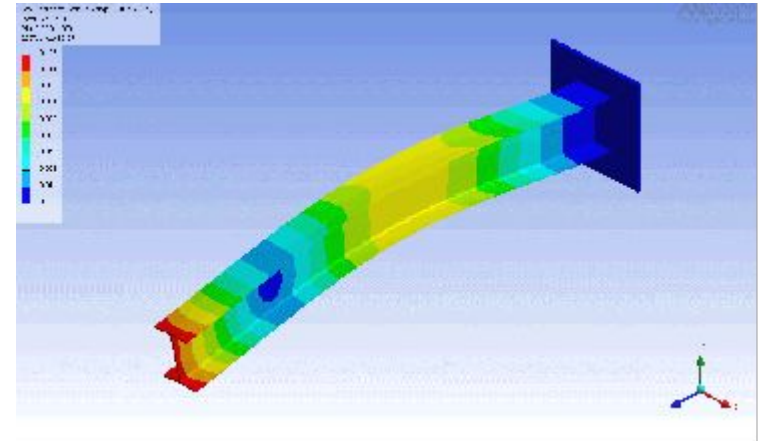


IIMPI
INSTITUTO DE
INGENIERÍA, MECÁNICA
Y PRODUCCIÓN INDUSTRIAL

Introducción

Anteriormente estudiamos cuál es el resultado de ejercer cargas axiales y torsionales sobre elementos estructurales. Ahora analizaremos qué ocurre cuando ejercemos una **flexión** sobre elementos con secciones geométricas variadas.

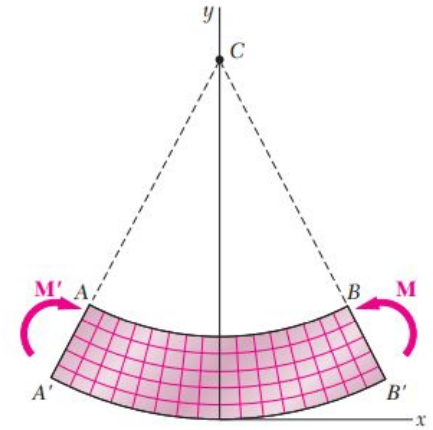
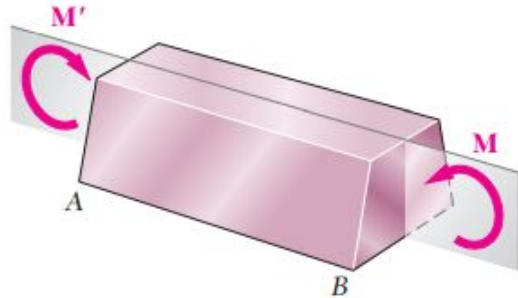
La presencia de este fenómeno en el modelado de piezas estructurales y mecánicas es habitual. Algunos ejemplos se muestran en las figuras a continuación:



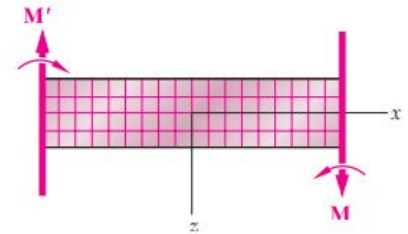
Definición

Una carga flexional es aquella que produce un momento perpendicular a la dirección principal de la pieza.

Este fenómeno se puede encontrar en piezas con una dirección principal y cuya sección transversal no siempre presenta simetría de revolución.



a) Sección longitudinal, vertical
(plano de simetría)



Análisis de esfuerzos y deformación de flexión pura

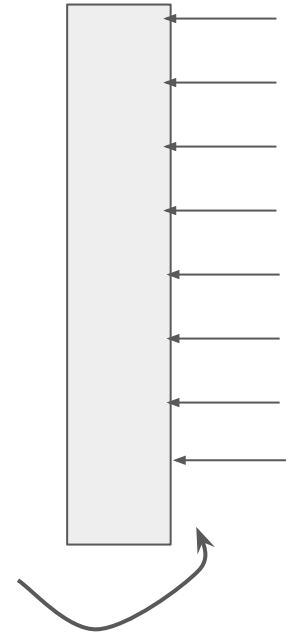
Según la norma se realizan diferentes ensayos para caracterizar la resistencia a flexión de los diferentes materiales. Esto permite determinar cómo afectan las imperfecciones, variabilidades constructivas de los materiales, resistencia de materiales compuestos y plasticidad en flexión. ***Para aceros perfectos isotrópicos la falla se puede predecir a partir del ensayo de directa.***



¿Cuándo ocurre flexión?

- Está relacionada con una flexión interna del material debido al ***momento interno*** en cada sección de la viga.
- El momento interno ***puede ser generado por fuerzas y/o momentos externos***. Pero no todos los momentos ni las fuerzas externas producen flexión, las que si se les asigna el nombre de **FUERZAS CORTANTES y MOMENTOS DE FLEXIÓN**.
- El momento interno en determinada sección presenta una relación lineal con la curvatura y por tanto con el ángulo que gira la misma. (Esto lo veremos en la siguiente diapositiva)
- El ***momento interno puede variar internamente de forma constante, lineal o cuadrática*** con la coordenada axial de la viga. Esto provoca deflexiones angulares y lineales en cada sección.

FUERZAS CORTANTES

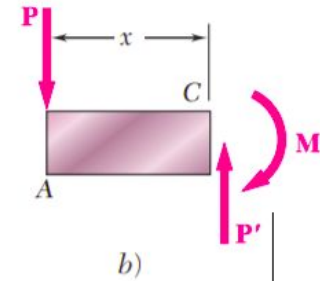
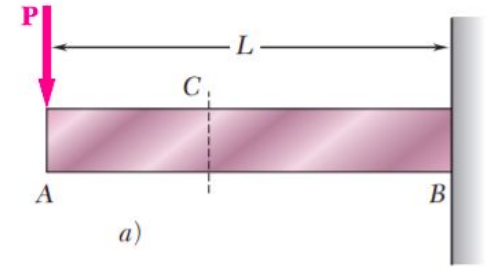


MOMENTOS FLECTORES

Momento y cortante interno:

Supongamos una viga de largo L es sometida a una fuerza cortante P en su extremo A . ¿Cómo varía el momento interno en un eje x axial a la viga en voladizo?

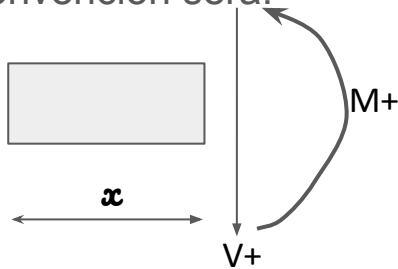
- Planteando el DCL para en un corte genérico a una distancia x permite calcular el momento interno M y el cortante P' .
- En este caso hay una relación **constante en el cortante** y **lineal en el momento**. Eso se dibujan en el diagrama de cortantes y momento.
- El **diagrama de cortante y momento**, al igual que el de fuerza axial y torsión, contiene la información de **cómo varían estas variables en las diferentes secciones**.
- ¿Existe una relación estrecha entre el cortante y el momento?



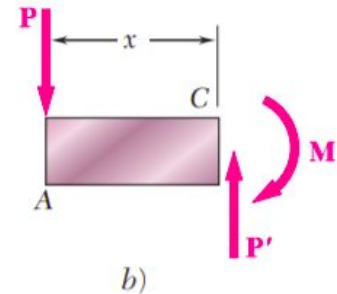
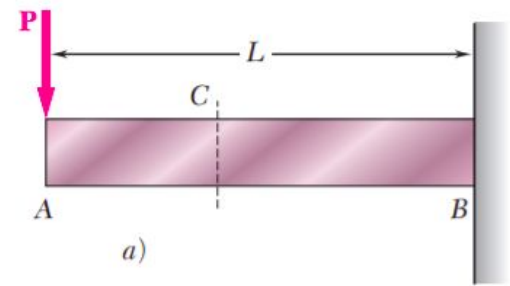
Eq de fuerzas: $P' = P$
Eq de momentos $M = P \cdot x$

Diagrama de cortante y momento

- Al igual que los diagramas de directa y torsión los de flexión deben referenciarse a una convención.
- Como el momento flector (M) se encuentra relacionado con el cortante (V) al definir una convención para uno de ellos el otro queda dado por la siguiente regla: “El momento debe ir de la punta al origen del vector cortante”.
- La convención será:



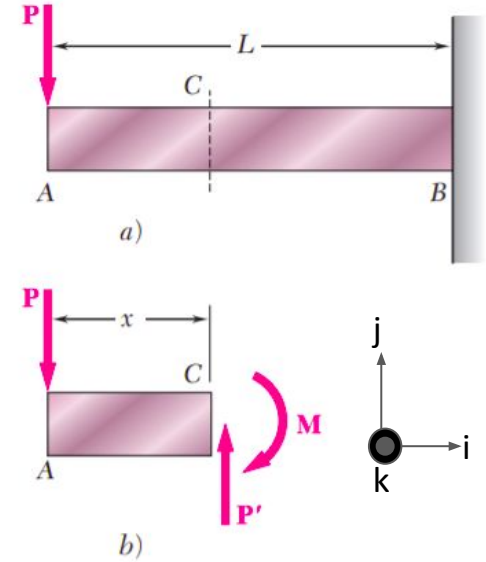
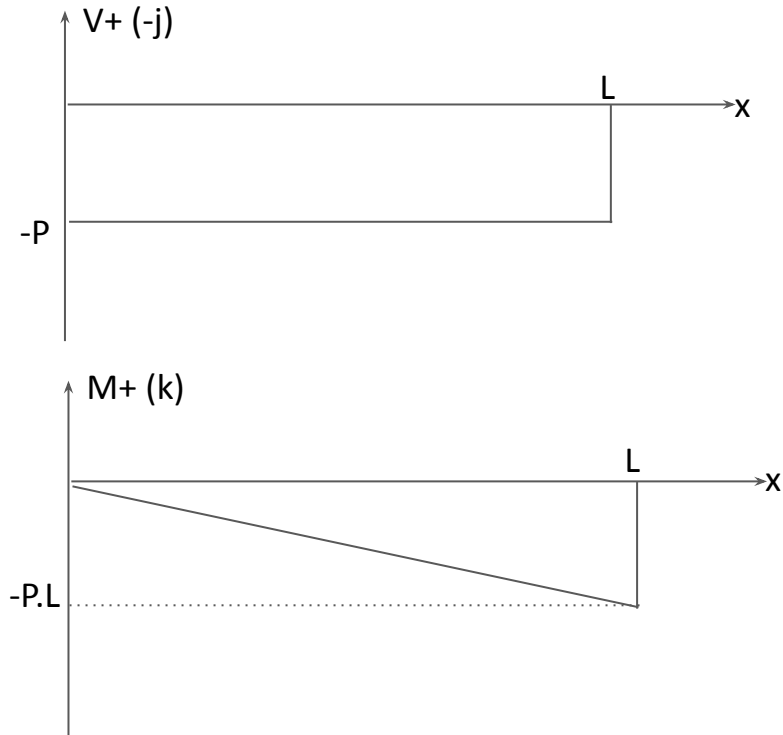
- En general vamos a utilizar la convención 1)



Eq de fuerzas: $P' = P$
Eq de momentos $M = P \cdot x$

Diagrama de cortante y momento

Eligiendo la convención 2) los diagramas resultantes son:

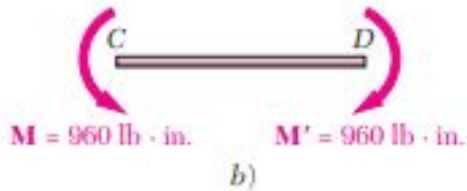
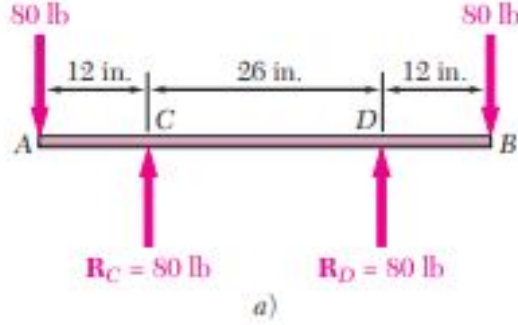


$$\text{Eq de fuerzas: } P' = P$$

$$\text{Eq de momentos } M = P \cdot x$$

Ejemplo de flexión pura:

Se quiere estudiar el momento y cortante interno de la barra para el caso en que un atleta que levanta un peso de 80 lb con cada



¿Cual es el momento y cortante máximo que se dan internamente en la viga? Para responder a esa pregunta hace falta construir los diagramas de cortante y flector de la barra.

Ejemplo flexión pura

Diagrama de cortante:

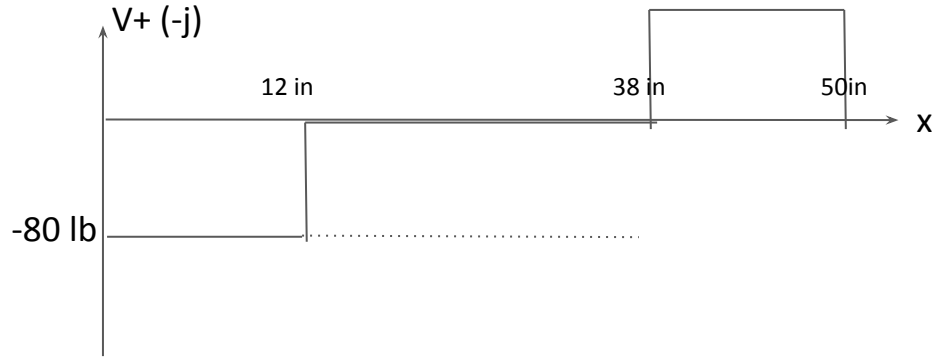
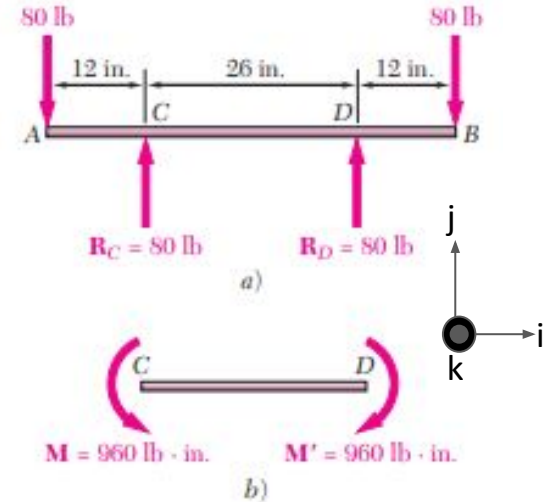
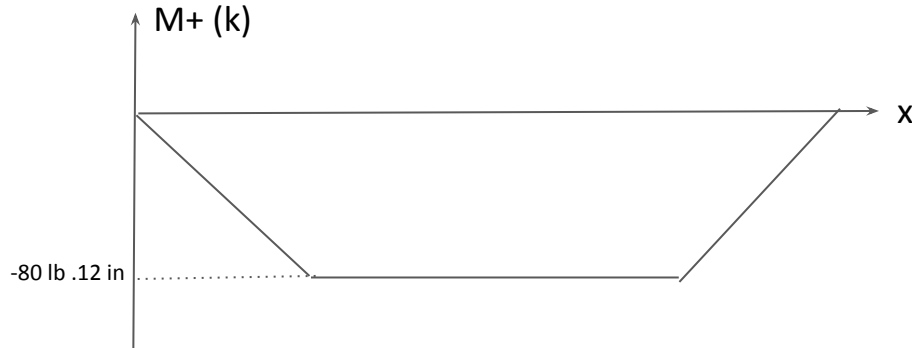


Diagrama de momento flector:



¿Cómo se deforma internamente la viga?

- Intuitivamente parece que las fibras superiores e inferiores se comportan distinto. Esto se debe a las deformaciones o flexiones angulares que se provocan en cada elemento diferencial de la viga.
- Para ejemplificar consideremos el elemento CD del caso anterior donde el cortante es nulo y el momento flector es constante. Esta parte del elemento se ilustra en la Figura 4.9.
- El punto C es el centro de curvatura del elemento y M' es el momento interno.
- En la Figura 4.10)b) se ve como las fibras superiores se estiran diferente que las inferiores respecto a la condición indeformada de la Figura 4.10)a).
- Las fibras superiores se acortan respecto a su longitud original y por tanto estarán a compresión mientras que las fibras inferiores se estiran y quedarán sometidas a tracción.
- Por continuidad debe existir una “Línea neutra” donde el esfuerzo sea nulo y esa fibra no se estira ni se comprime.

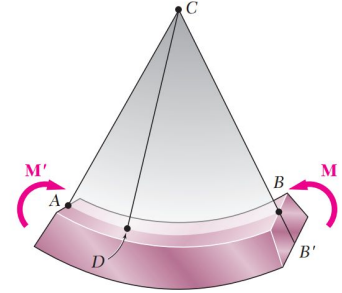


Figura 4.9

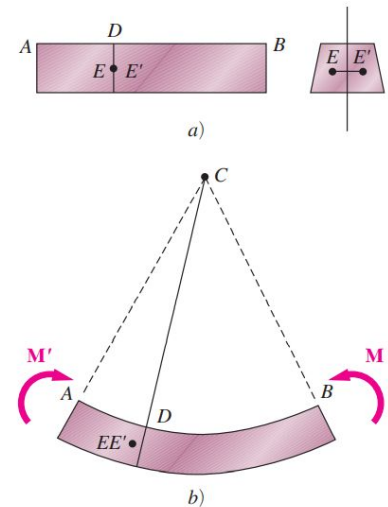
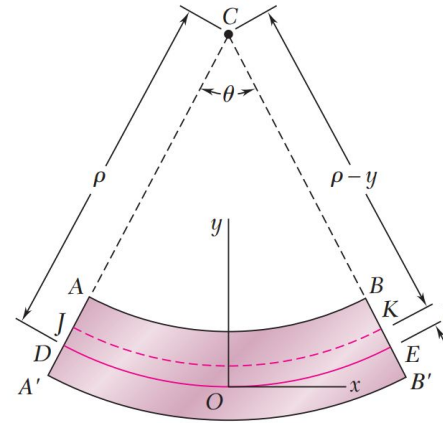


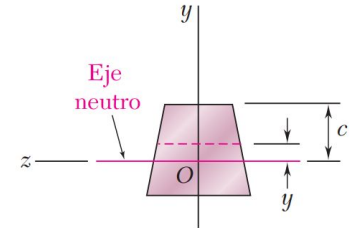
Figura 4.10

Caracterización matemática de la deformación:

- Supongamos que la línea neutra en este caso es la línea DE y queremos estudiar las deformaciones en JK.
- A partir de ella definiremos el origen de coordenadas en la superficie neutra, en lugar de la cara inferior, como se hizo antes, de modo que la distancia de cualquier punto a la superficie neutra se medirá por la coordenada y .
- Llamando r el radio arco de círculo **DE** (figura 4.12a), como el ángulo central que corresponde a DE, y observando que la longitud de DE $L = \rho\theta$ a la longitud L del elemento no deformado, se tiene:
- Considerando ahora el arco JK ubicado a una distancia y sobre la superficie neutra, se observa que su $L' = (\rho - y)\theta$ es:
- Como la longitud original del arco JK era igual a L , la deformación de JK es: $\delta = L' - L = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta$



a) Sección longitudinal, vertical (plano de simetría)



b) Sección transversal

Figura 4.12

Esfuerzo de por flexión:

Hipótesis:

1. La viga está compuesta de un **único material isótropo, elástico y lineal**.

(Es válida la ley de Hooke generalizada)

2. **El momento flector genera únicamente esfuerzos normales** en el elemento permanecen por debajo del esfuerzo de fluencia S_y .
3. Suponiendo que el material es homogéneo, y denotando por E al módulo de elasticidad, se tiene que en la dirección longitudinal x .

- **Aplicando la ley de Hooke generalizada** tenemos:

$$\sigma_x = E\epsilon_x$$

- La **deformación se calcula como $\Delta L/L$** , según la diapositiva anterior para la fibra JK que se encuentra a una distancia y de la línea neutra:

- La deformación unitaria alcanza **su máximo valor absoluto cuando la $\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{\rho\theta}$ máxima**. Si c es la distancia máxima a la superficie neutra (que corresponde superior o inferior del elemento), y como tienen la misma curvatura podemos relacionar las deformaciones respecto de las deformaciones máximas:

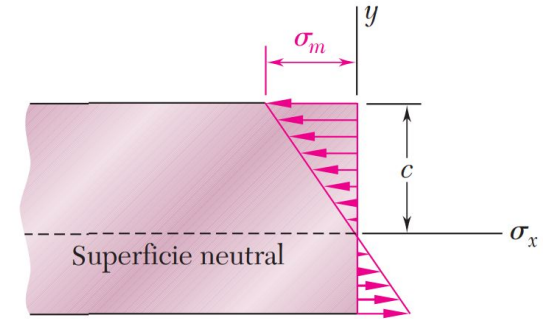


Figura 4.13

$$\epsilon_x = -\frac{y}{c}\epsilon_m$$

¿Dónde está la línea neutra?

- La resultante en cada sección que produce la distribución de esfuerzos debe ser nula, de lo contrario la cara tendría una fuerza axial resultante

por

$$E \int \sigma_x dA = \int \left(-\frac{y}{c} \sigma_m \right) dA = -\frac{\sigma_m}{c} \int y dA = 0$$

era

$$\int y dA = 0$$

Definición de centroide

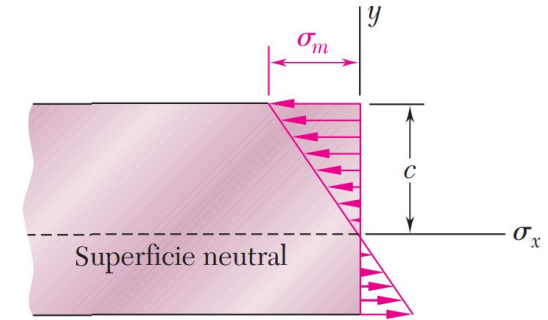


Figura 4.13

¡La Línea Neutra se encuentra en el centroide de la figura!

¿Cuánto vale el esfuerzo ?

- Ahora que conocemos donde el esfuerzo es nulo queremos responder a la pregunta de ¿Cuánto vale el esfuerzo en una fibra que se encuentra a una distancia y ?
- Para esto debemos integrar todas las pequeñas fuerzas que produce por unidad de área el esfuerzo sigma.
- Aquí las fuerzas $dF = \sigma_x dA$ son pequeñas fuerzas que multiplicadas por la distancia a la línea neutra y resultan en el momento que esta ejerce. Existe una relación $\int (-y \sigma_x dA) = M$ el esfuerzo de cada fibra y el momento interno de la sección. Es decir:
- Sustituyendo la ecuación de la diapositiva anterior el a partir del esfuerzo máximo se deduce:

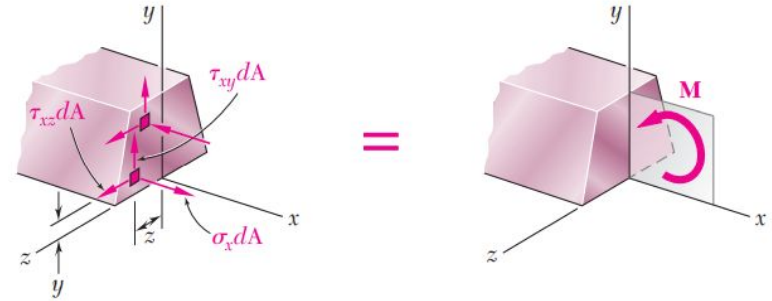


Figura 4.8

Ecuación de la Elástica

$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I}$$

Definición de segundo momento de inercia

$$\int (-y) \left(-\frac{y}{c} \sigma_m \right) dA = M \longrightarrow \frac{\sigma_m}{c} \int y^2 dA = M$$

Ejemplo:

Una barra de **acero de 0.8 x 2.5 in.** se somete a dos pares iguales y opuestos que actúan en el plano vertical de simetría de la barra (figura 4.17). Determine

1. El valor del momento flector M que hace fluir la barra para una tensión de fluencia S_y de 36 ksi.
2. El radio de curvatura ρ de las secciones de toda la barra.



Figura 4.17

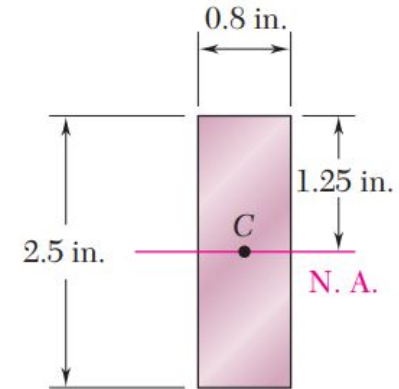
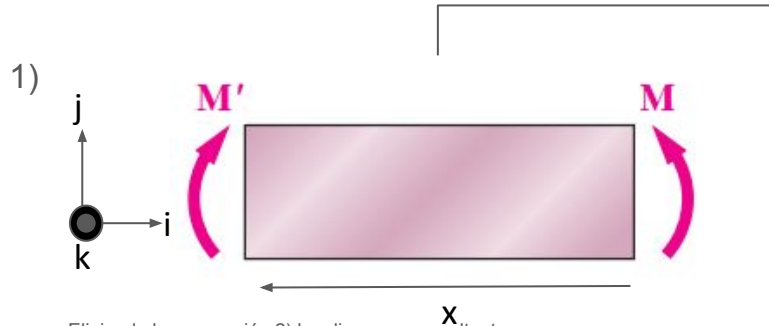


Figura 4.18

Procedimiento:

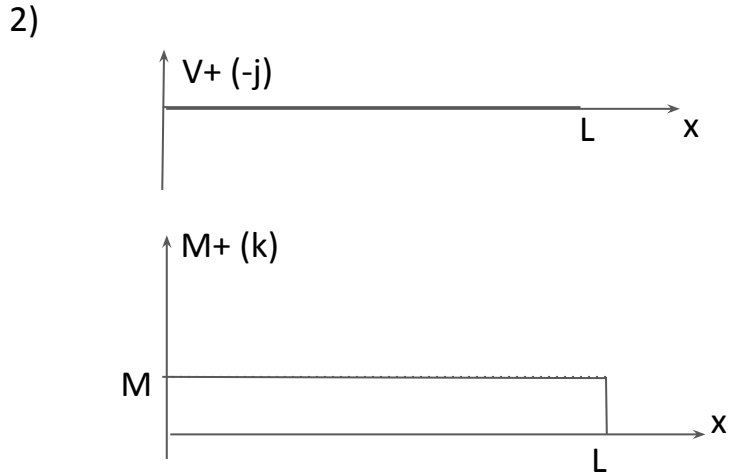
1. Realizar el DCL de la barra
2. Construir los diagramas de cortante y momento flector.
3. Estudiar qué sección es la que presenta más momento flector y dibujarla.
4. Analizar cuál es el esfuerzo máximo en esa sección según el momento interno y la geometría
5. Igualar ese esfuerzo máximo al esfuerzo máximo soportado (S_y) y obtener así el momento M permisible

Según el procedimiento anterior:

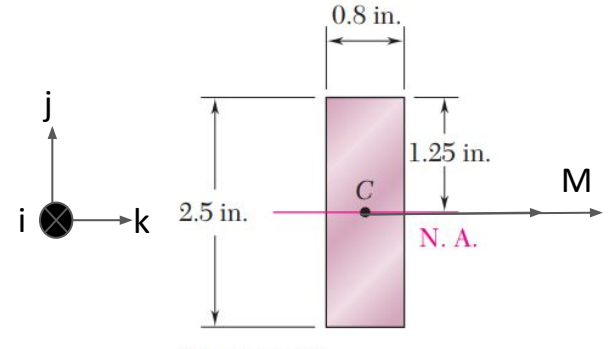


Planteando el equilibrio de momentos según k $M' = M$

El momento interno es constante igual al momento externo M



3) Sección más comprometida: Cualquiera entre 0 y L



4) El esfuerzo máximo se da en la fibra superior e inferior tanto de tracción como de compresión. El esfuerzo ahí vale:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = 1.25 \text{ in}$$

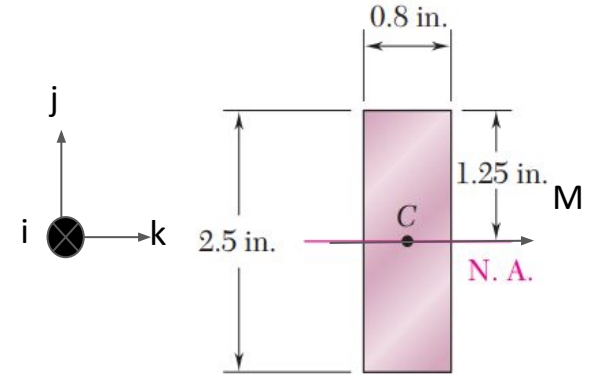
5) Calculando la inercia según el eje del momento (eje k) se tiene:

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(0.8 \text{ in.})(2.5 \text{ in.})^3 = 1.042 \text{ in.}^4$$

Igualando el esfuerzo máximo al esfuerzo S_y y despejando el momento M se llega a:

$$M = \frac{I}{c}\sigma_m = \frac{1.042 \text{ in.}^4}{1.25 \text{ in.}}(36 \text{ ksi})$$

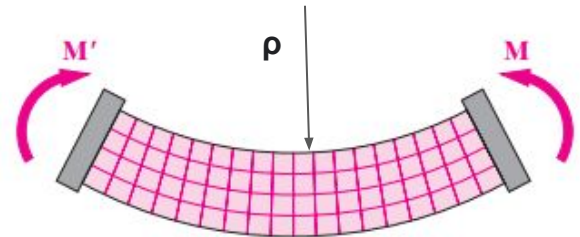
$$M = 30 \text{ kip} \cdot \text{in.}$$



Para calcular el radio de curvatura aplicamos esta ecuación:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$$\rho = 1,23 \text{ in}$$

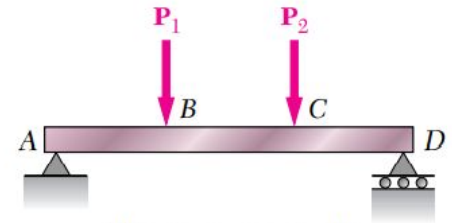
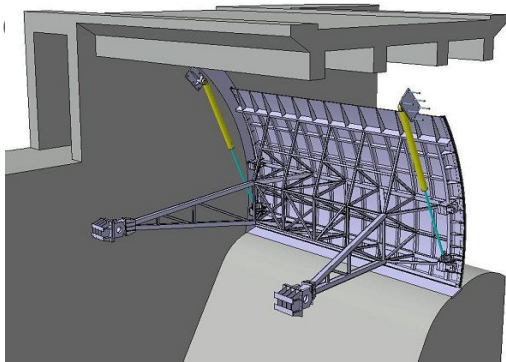


Carga distribuida y concentrada

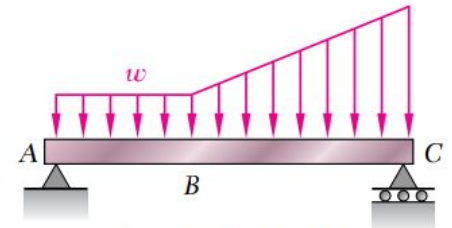
La carga transversal de una viga puede consistir en **cargas concentradas** P_1, P_2, \dots , expresadas en newtons, libras o sus múltiplos, kilonewtons y kips (figura 5.2a).

Las cargas concentradas son un modelado de cargas que se distribuyen y ejercen dentro de una determinada área A . Estas cargas reciben el nombre de **cargas distribuidas** w , expresada en N/m , kN/m , lb/ft o $kips/ft$ (figura 5.2b), o una combinación de ambas. Cuando la carga w por unidad de longitud tiene un valor constante a lo largo de parte de la viga (como se dice que la carga está uniformemente

viga



a) Cargas concentradas



b) Carga distribuida

Figura 5.2

Ejemplo carga distribuida

Dibujemos los diagramas de cortante y de momento flector para una viga AB en voladizo con un claro L que soporta una carga uniformemente distribuida w (figura 5.10).

Se corta la viga en un punto C entre A y B y se dibuja el diagrama de cuerpo libre de AC (figura 5.11a) dirigiendo V y M según la convención. Denotando con x la distancia de A a C y reemplazando la carga distribuida sobre AC **por su resultante** wx aplicada en el punto medio de AC, se escribe:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: V = -wx$$

$$+\curvearrowright \Sigma M_C = 0: \quad wx \left(\frac{x}{2} \right) + M = 0 \quad M = -\frac{1}{2} wx^2$$

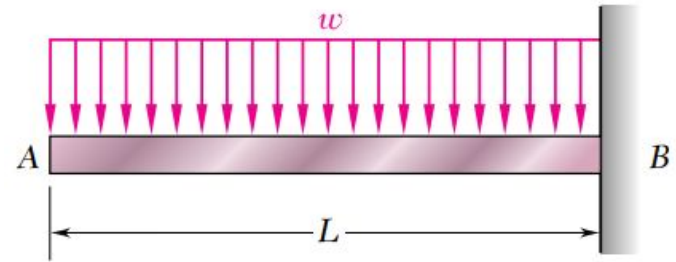
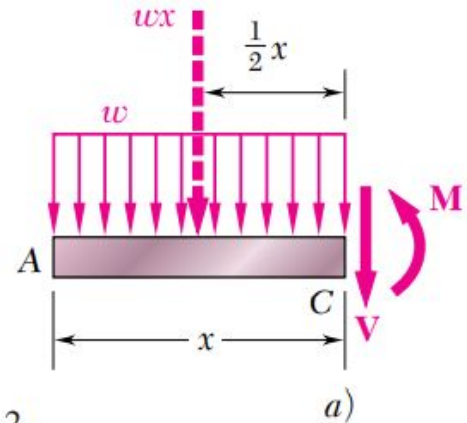


Figura 5.10



Ejemplo carga distribuida

Observamos que el diagrama de cortante se representa con una línea recta oblicua (figura 5.11b) y el diagrama de momento flector con una parábola (5.11c). Los valores máximos de V y M ocurren, ambos, en B, donde se tiene:

$$V_B = -wL \quad M_B = -\frac{1}{2}wL^2$$

Podemos apreciar i drático).

Esto nos permite definir también un diagrama de carga según la siguiente convención:

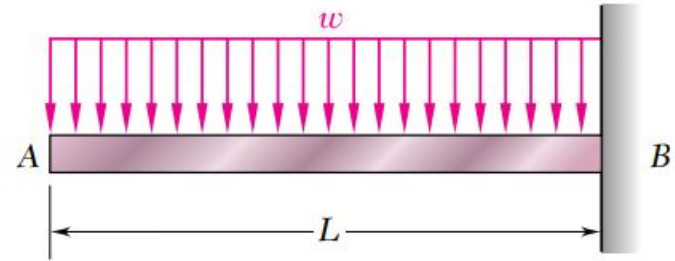
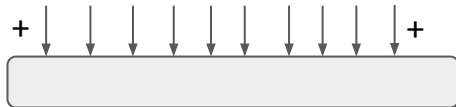


Figura 5.10

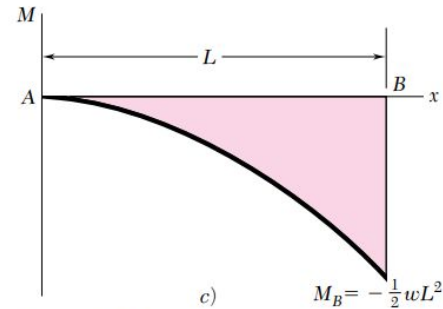
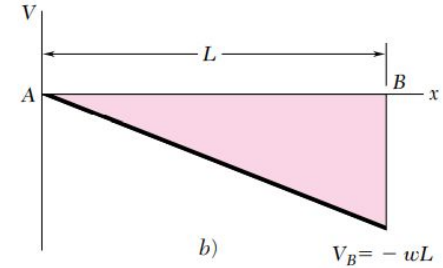


Figura 5.11

Relación carga-cortante-momento

Cuando una viga lleva más de dos o tres cargas concentradas, o cuando lleva cargas distribuidas, el método a partir DCL para graficar el cortante y el momento flector resulta muy complicado. La construcción del diagrama de cortante y, especialmente, del diagrama de momento flector **se facilitará en gran medida si se toman en consideración ciertas relaciones que existen entre la carga, el cortante y el momento flector.**

Considere una viga simplemente apoyada AB que lleva una carga distribuida w por unidad de longitud (figura 5.12a), y sean C y C' dos puntos en la viga a una distancia x uno del otro. El cortante y el momento flector en C se denotarán por V y por M , respectivamente, y se supondrán positivos; el cortante y el momento flector en C' $V + \Delta V$ y por $M + \Delta M$

Planteando eq de fuerzas a un elemento diferencial se tiene:

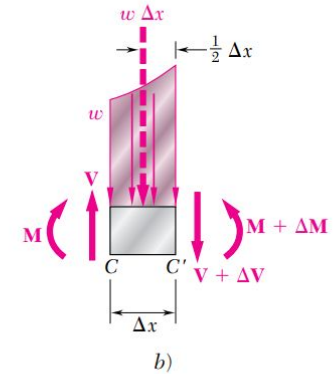
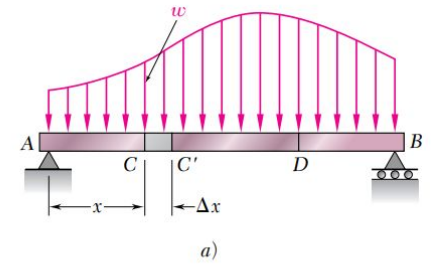


Figura 5.12

$$\Delta V = -w \Delta x$$

$$\frac{dV}{dx} = -w$$

La integral de la carga es el cortante

Relación carga-cortante-momento

Eso significa que si conocemos la función $w(x)$ entonces podemos calcular por el teorema fundamental del cálculo de Newton la diferencia entre los cortantes en los extremos del integrando.

$$V_D - V_C = - \int_{x_C}^{x_D} w \, dx$$

$$V_D - V_C = -(\text{área bajo la curva de carga entre } C \text{ y } D)$$

Regresando al diagrama de cuerpo libre de la figura 5.12b, y escribiendo ahora que la suma de momentos en C es nula, se tiene:

$$+\uparrow \Sigma M_{C'} = 0: \quad (M + \Delta M) - M - V \Delta x + w \Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Delta M = V \Delta x - \frac{1}{2} w (\Delta x)^2$$

Dividiendo entre DeltaX y tomando el límite tendiendo a 0

$$\frac{dM}{dx} = V$$

Análogamente:

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V \, dx$$

$$M_D - M_C = \text{área bajo la curva de cortante entre } C \text{ y } D$$

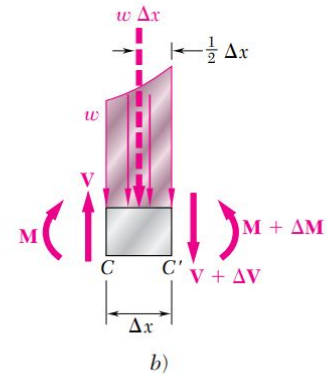


Figura 5.12

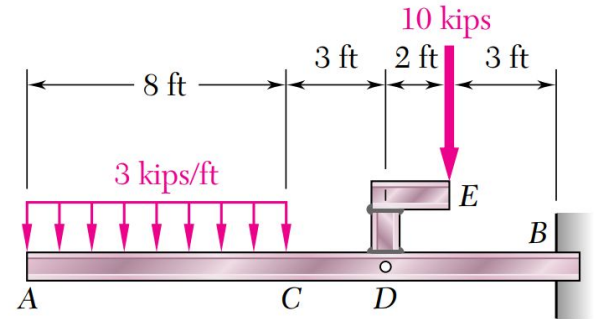
Ejemplo:

La estructura mostrada en la figura consiste de una viga W10 112 de acero laminado AB y de dos elementos cortos soldados y añadidos a la viga.

- Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y la carga dada.
- Determine el esfuerzo normal máximo en las secciones justo a la izquierda y justo a la derecha del punto D.

Procedimiento:

- Realizar el DCL de la barra ACDB
- Construir los diagramas de carga cortante y momento flector.
- Estudiar qué sección es la que presenta más momento flector y dibujarla.
- Analizar cuál es el esfuerzo máximo en esa sección según el momento interno y la geometría



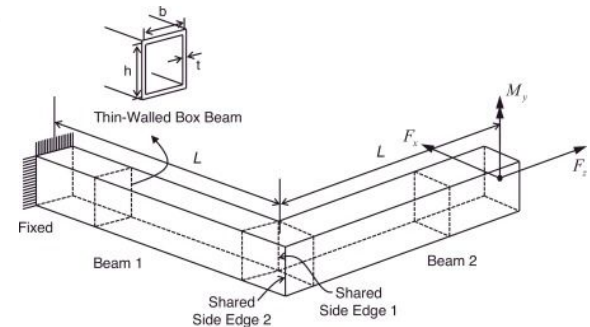
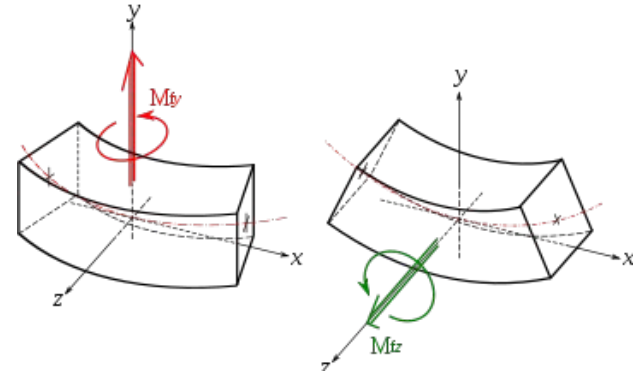
Flexión en dos planos

Hasta ahora hemos visto fuerzas de cortante distribuidas y concentradas que se aplican en plano pero no siempre esto es así. De hecho en la mayoría de los elementos de máquinas de transmisión como engranajes las fuerzas cortantes en los diferentes planos están relacionadas entre sí.

COMO ESTAMOS ANTE UN PROBLEMA LINEAL PODEMOS APLICAR SUPERPOSICIÓN

Esto consiste en separar los diferentes planos, resolverlos por separado y luego sumar las soluciones a ambos problemas logrando así modelar el efecto completo.

Para vigas circulares se pueden sumar las fuerzas cortantes y los momentos si caen en diferentes planos debido a la simetría de revolución que poseen las vigas. Para el caso de vigas con sección con asimetría de revolución (rectangulares, triangulares, etc) **no es así**.



Ejemplo de parcial 2020

El tornillo sinfin ilustrado en la figura a izquierda, es un elemento que se utiliza para transmitir potencia, además permite cambiar el sentido de rotación de un eje a 90° . En el contacto entre el engranaje y el tornillo se producen fuerzas, una manera simplificada de modelado se plantea en la figura de la derecha. Para $P= 200 \text{ N}$, $Q= 300 \text{ N}$ y un diámetro y largo de gusano $d=1 \text{ cm}$, $L=20 \text{ cm}$ calcule el valor máximo del esfuerzo en toda la pieza y en qué punto se encuentra.

