

Señales y Sistemas

Análisis de Fourier con FFT

Instituto de Ingeniería Eléctrica



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

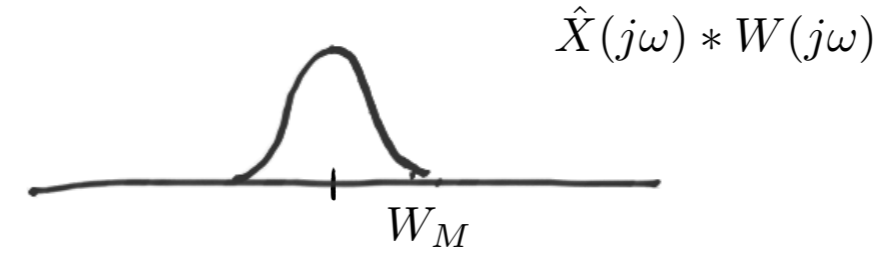
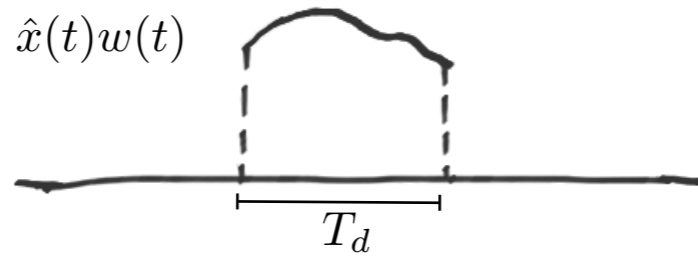
Análisis de Fourier con FFT

Esto es lo que creemos que analizamos →



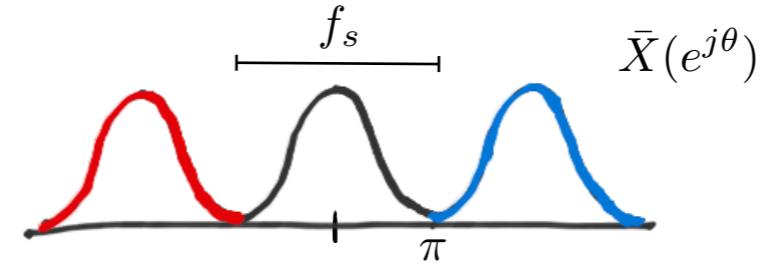
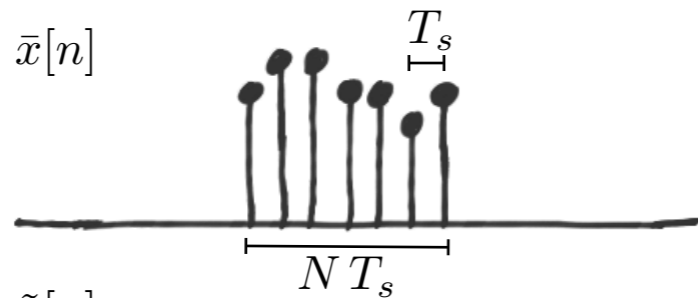
CTFT

Enventanado en el tiempo



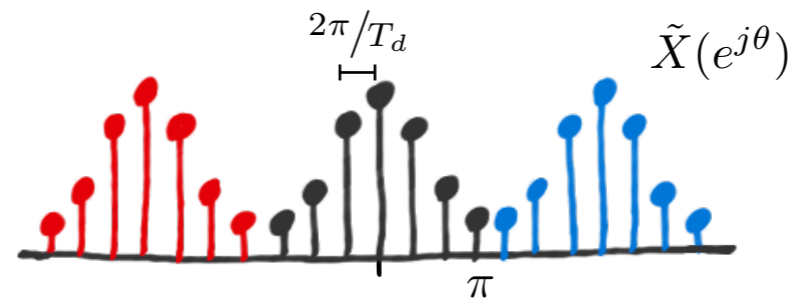
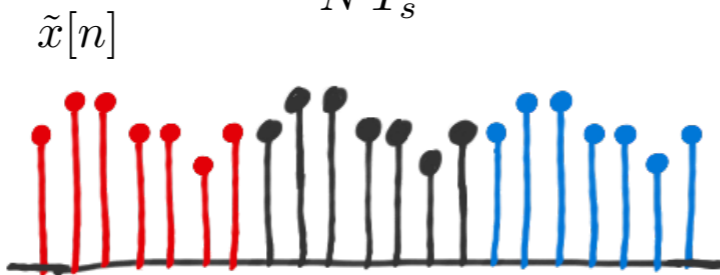
CTFT

Muestreo en el tiempo



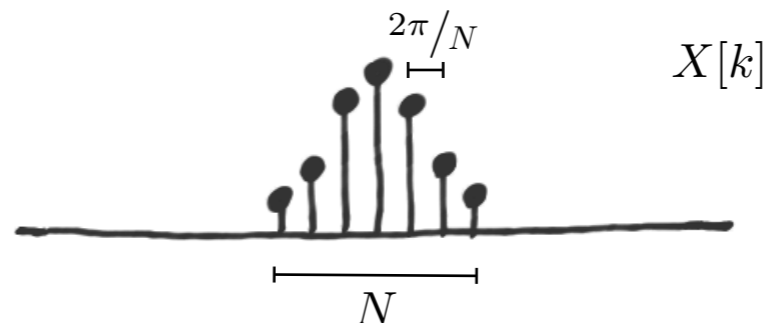
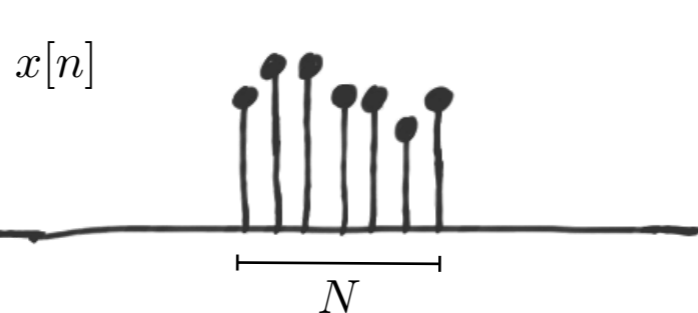
DTFT
(¿solapamiento?)

Muestreo en frecuencia



DTFT de señal periódica (SDF)

Esto es lo que analizamos con procesamiento digital →

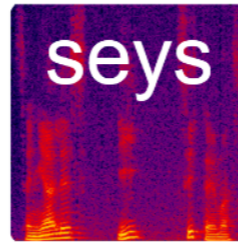


DFT (FFT)

En el análisis de una señal de tiempo discreto (secuencia de números) hay varios aspectos (enventanado, muestreo, solapamiento, resolución, ...) a tener en cuenta si queremos relacionarlo con una señal de tiempo continuo.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$



Señales y Sistemas

Diseño de Filtros

Instituto de Ingeniería Eléctrica

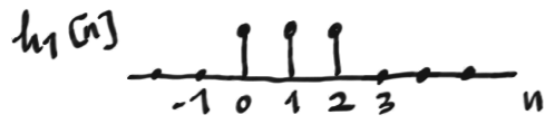


UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Linealidad de fase

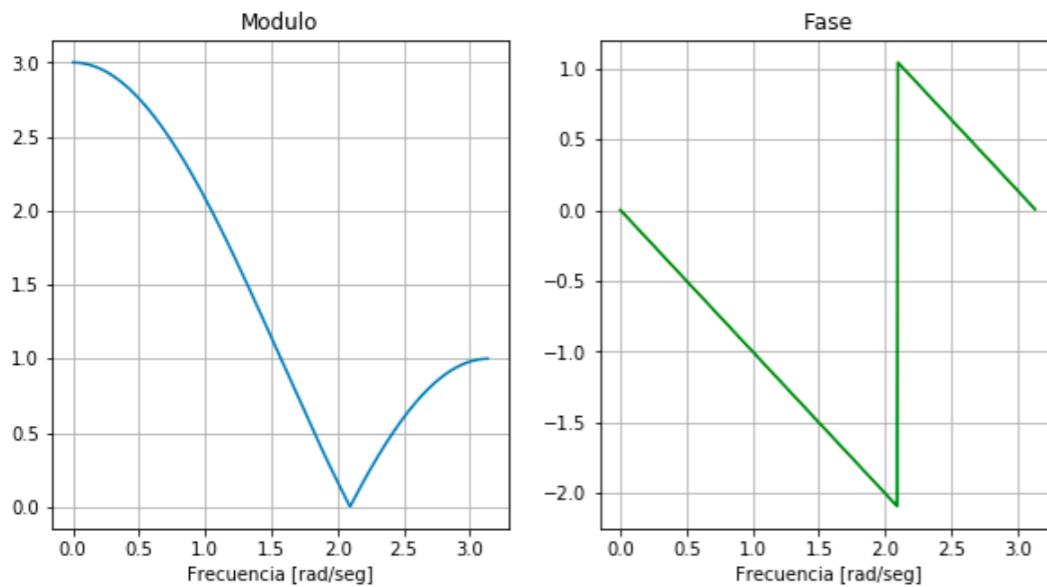
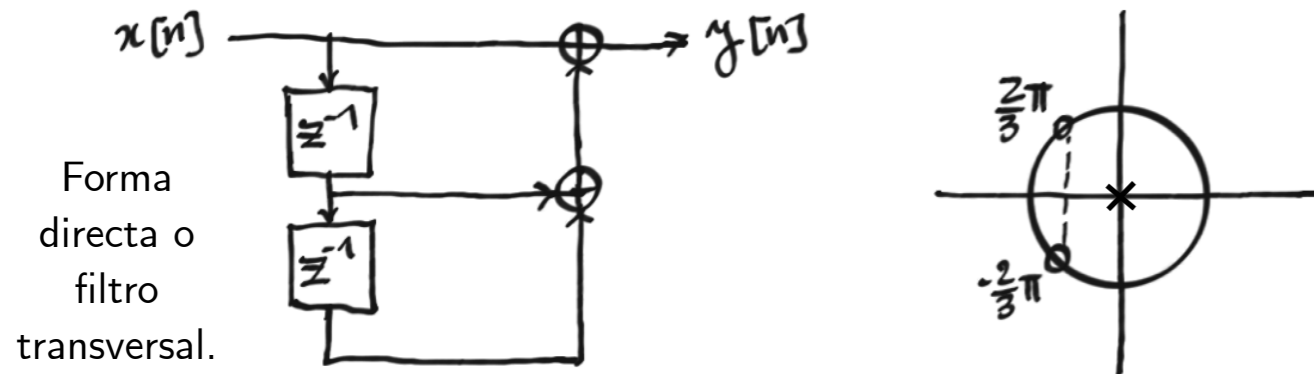
$$h_1[n] = \delta[n] + \delta[n - 1] + \delta[n - 2]$$

FIR (Finite Impulse Response): BIBO estable, no recursivo.



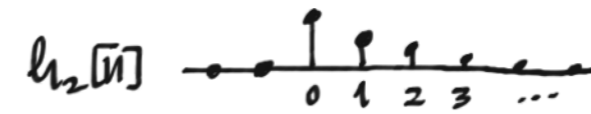
$$H_1(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$$

$$H_1(e^{j\theta}) = e^{-j\theta} (1 + 2 \cos \theta)$$



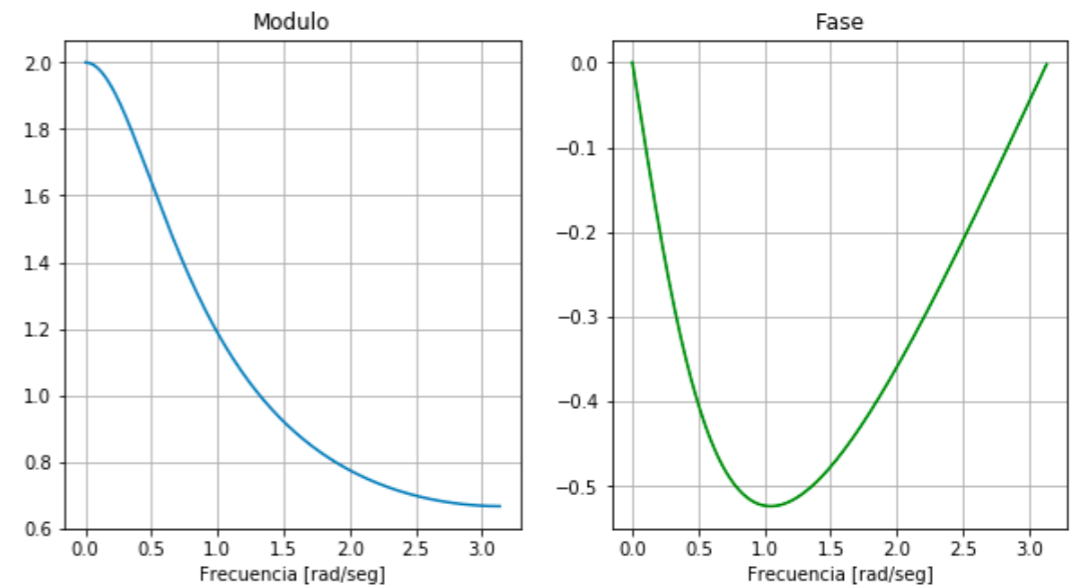
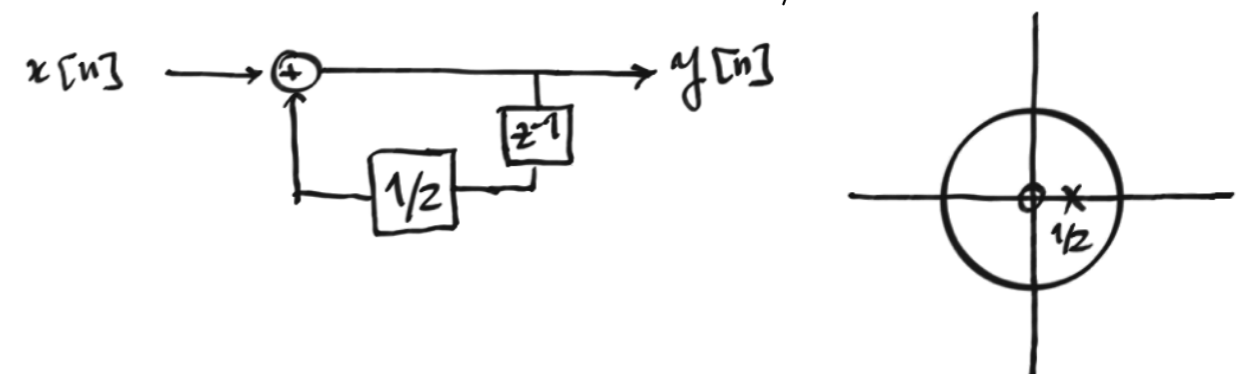
$$h_2[n] = (1/2)^n u[n]$$

IIR (Infinite Impulse Response): ¿BIBO estable?, recursivo.



$$H_2(z) = \frac{1}{1 - 1/2 z^{-1}}, \quad |z| > 1/2$$

$$H_2(e^{j\theta}) = \frac{e^{j\theta}}{e^{j\theta} - 1/2}$$



Linealidad de fase

- No distorsión: $y(t) = A x(t - t_0)$, $y[n] = A x[n - n_0]$
- Mantiene la forma de la señal filtrada. Es un cambio de amplitud (amplificación o atenuación) y retardo (desfasaje) igual para todas las frecuencias.

$$H(j\omega) = A e^{-j\omega t_0}, \quad H(e^{j\theta}) = A e^{-j\theta n_0}$$

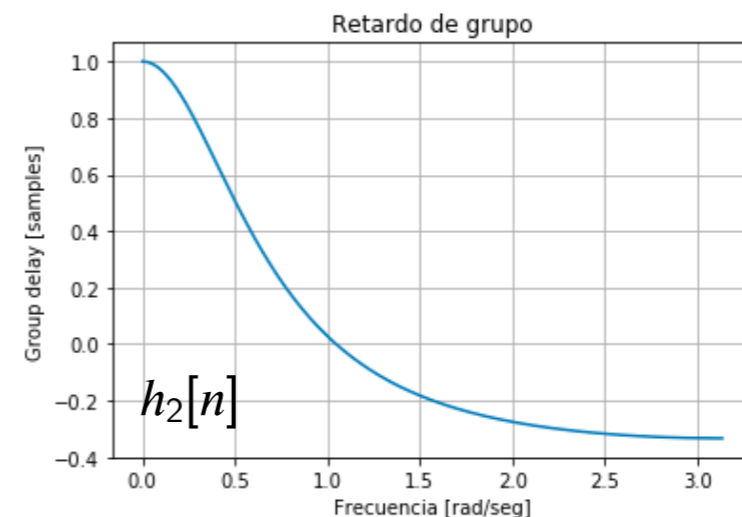
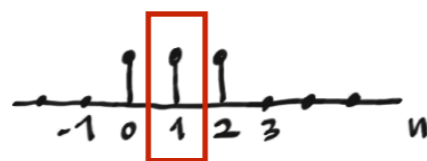
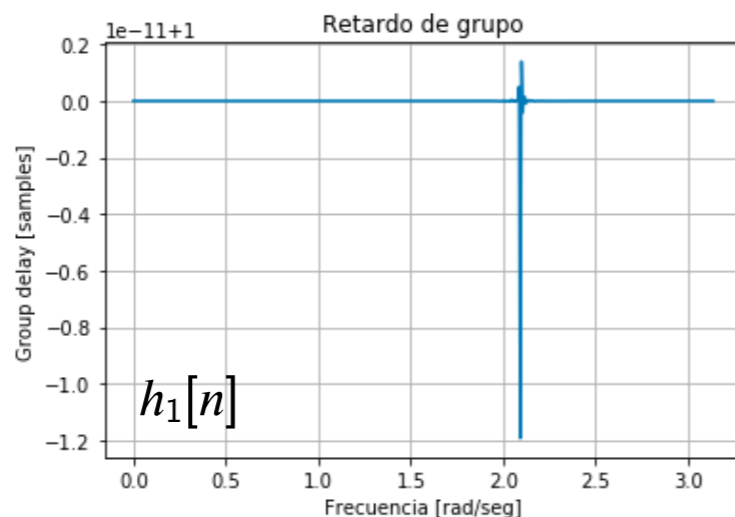
- Para tener un filtro que no distorsione debe tener **fase lineal**, o sea, la fase del filtro es de la forma

$$\angle H(e^{j\theta}) = -\alpha\theta$$

- **Retardo de grupo:**

$$\tau(\theta) = \text{grad} [H(e^{j\theta})] = -\frac{d}{d\theta} \{ \angle H(e^{j\theta}) \}$$

- En un filtro de fase lineal el retardo de grupo (en muestras) es constante (α)



Retardo diferente para diferentes frecuencias.

Linealidad de fase

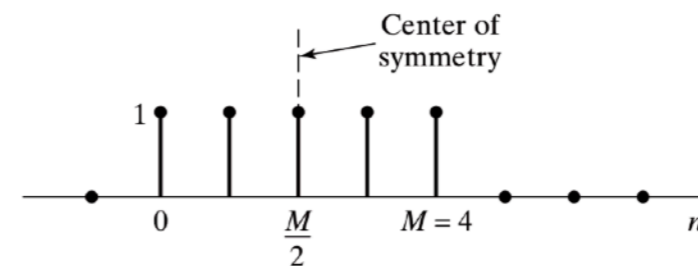
- **Fase lineal generalizada:** incluye saltos/discontinuidades y cambios signo.

$$\angle H(e^{j\theta}) = \beta - \alpha\theta + (\pm\pi) \Rightarrow \tau(\theta) = -\frac{d}{d\theta} \{ \angle H(e^{j\theta}) \} = \alpha$$

- En general serán filtros FIR con simetría en $h[n]$.
- **Tipos de filtros FIR** (M coeficientes) de fase lineal generalizada

- Tipo I: M par, simétrico

$$h[n] = h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M$$

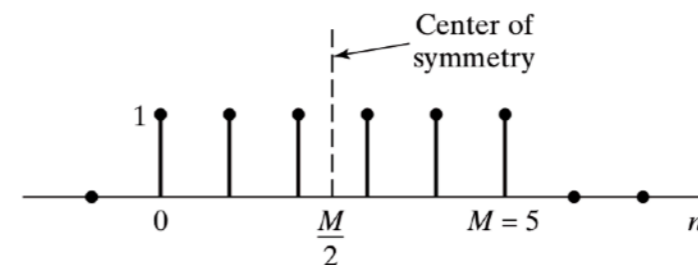


Tipo I

- Tipo II: M impar, simétrico

- Tipo III: M par, asimétrico

$$h[n] = -h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M$$

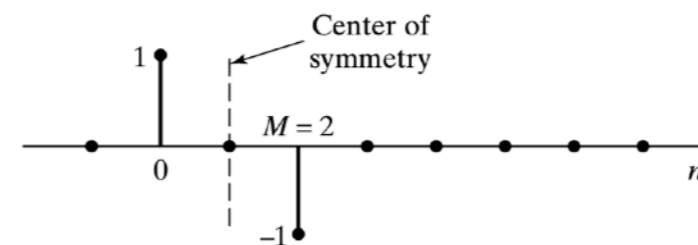


Tipo II

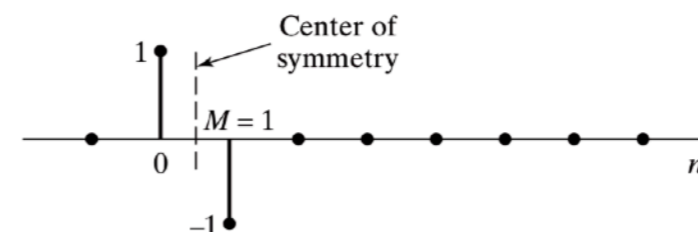
- Tipo IV: M impar, asimétrico

- I, II: similares a pasabajos

- III, IV: similares a pasaaltos

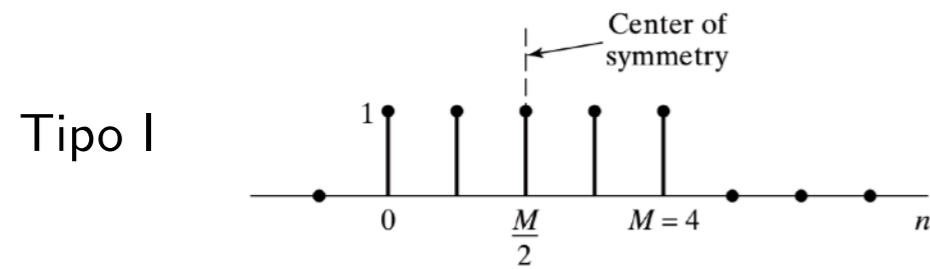


Tipo III

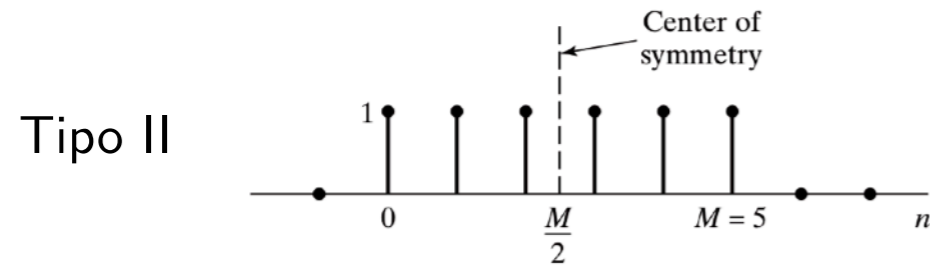


Tipo IV

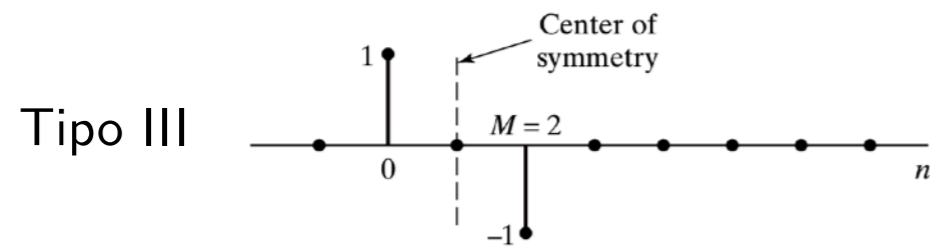
Linealidad de fase



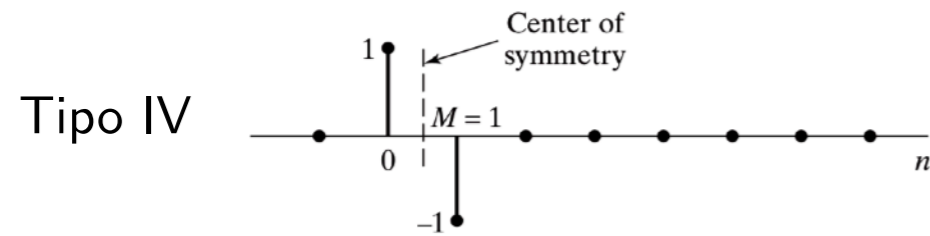
$$H(e^{j\theta}) = e^{-j2\theta} (h[0] \cos 2\theta + h[1] \cos \theta + h[2])$$



$$H(e^{j\theta}) = e^{-j\frac{5}{2}\theta} (h[0] \cos \frac{5}{2}\theta + h[1] \cos \frac{3}{2}\theta + h[2] \cos \frac{1}{2}\theta)$$



$$H(e^{j\theta}) = j2e^{-j\theta} h[0] \sin \theta$$



$$H(e^{j\theta}) = j2e^{-j\frac{1}{2}\theta} h[0] \sin \frac{1}{2}\theta$$

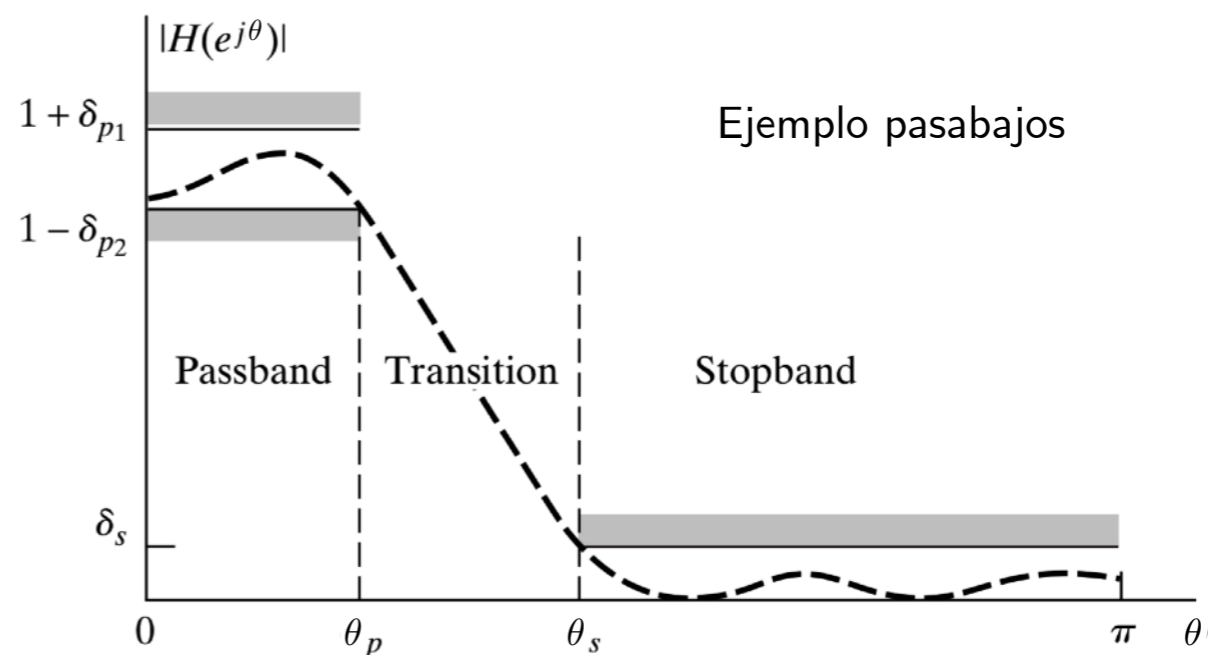
$$\sum_n h[n] = H(e^{j\theta})|_{\theta=0} = 0$$

Diseño de filtros

- Diseño de FIR
 - Hallar los coeficientes
 - Por ejemplo: diseño por ventanas
 - Generalmente son decenas de coeficiente (retardo!)
- Diseño de IIR
 - Basado en diseño de filtro de tiempo continuo $H_c(s) \implies H_d(z)$
 - Por ejemplo: diseño por transformación bilineal
 - Generalmente de menor orden (número de coeficientes)

Diseño de filtros

- Diseño de FIR
 - Hallar los coeficientes
 - Por ejemplo: diseño por ventanas
 - Generalmente son decenas de coeficiente (retardo!)
- Diseño de IIR
 - Basado en diseño de filtro de tiempo continuo $H_c(s) \implies H_d(z)$
 - Por ejemplo: diseño por transformación bilineal
 - Generalmente de menor orden (número de coeficientes)
- **Especificaciones** del filtro a diseñar
 - Requerimientos de la respuesta en frecuencia en diferentes bandas de frecuencia.
 - Otras posibles restricciones: fase lineal, menor retardo, ...



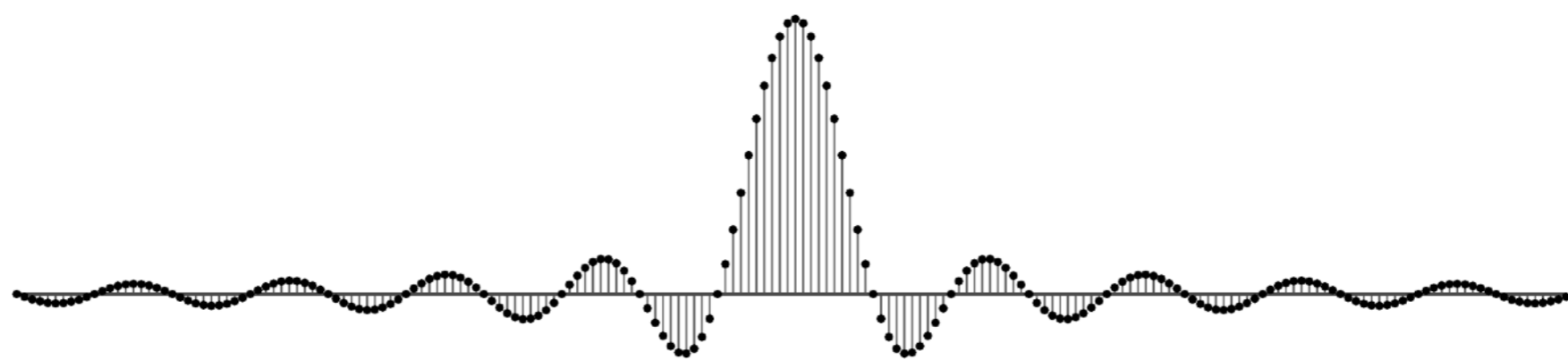
Diseño de filtro FIR por ventanas

- Partimos de un filtro ideal H_I que cumple las restricciones y sus coeficientes

$$H_I(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_I[n]e^{-j\theta n} \Leftrightarrow h_I[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_I(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta$$

- Ejemplo: pasabajos ideal (desplazado $M/2$ muestras)

$$H_{\text{LPF}}(e^{j\theta}) = \begin{cases} e^{-j\theta M/2}, & |\theta| < \theta_c \\ 0, & \theta_c < |\theta| \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow h_{\text{LPF}}[n] = \frac{\sin[\theta_c(n - M/2)]}{\pi(n - M/2)}$$

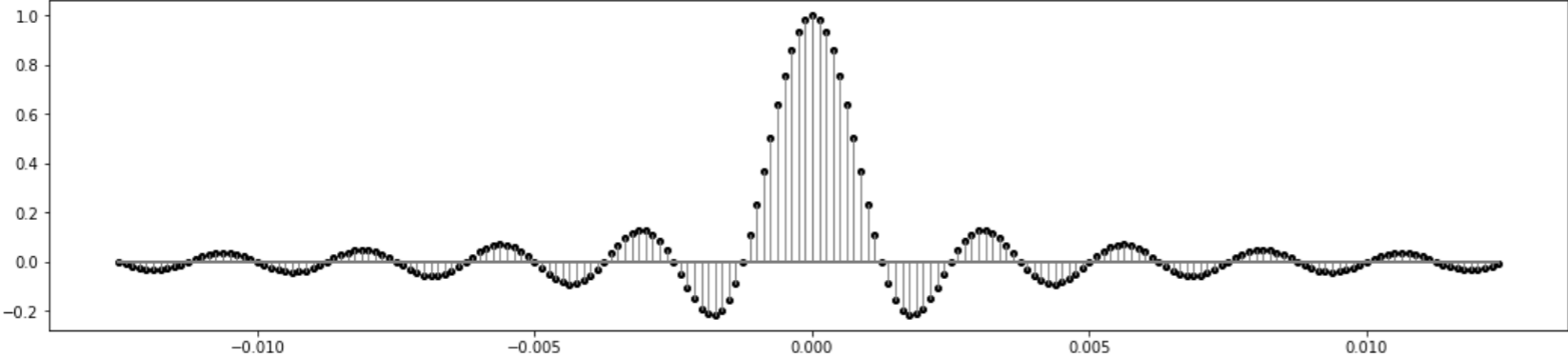


- Problema: Son infinitos coeficientes!
- Solución: Enventanamos (recortamos) la respuesta $h_d[n] = h_{\text{LPF}}[n] \times w[n]$ con $2N+1$ coeficientes, con $w[n]$ una *ventana*. Y luego se hace causal (retardo).

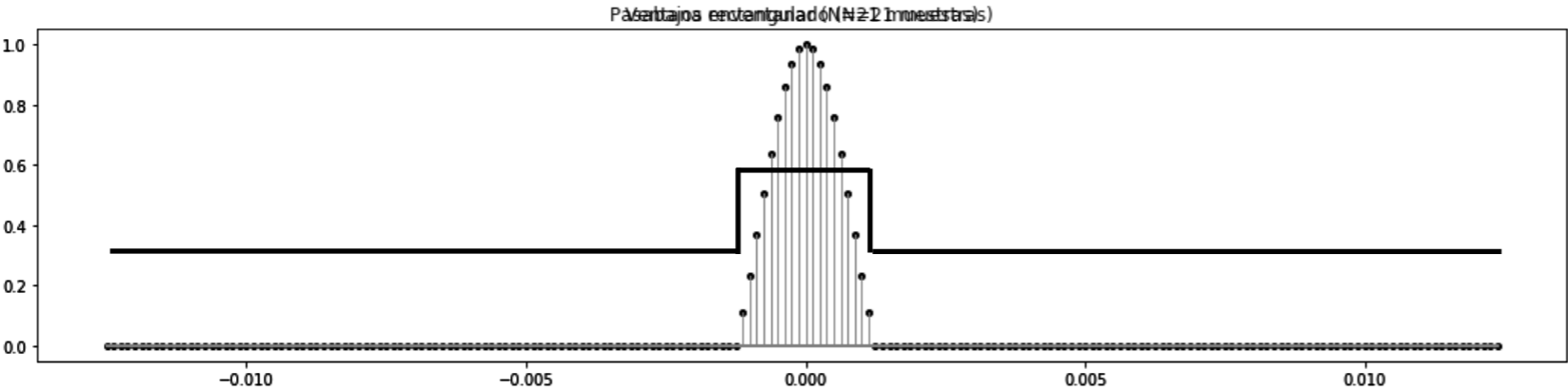
$$H_d(e^{j\theta}) = H_{\text{LPF}}(e^{j\theta}) * W(e^{j\theta})$$

Diseño de filtro FIR por ventanas

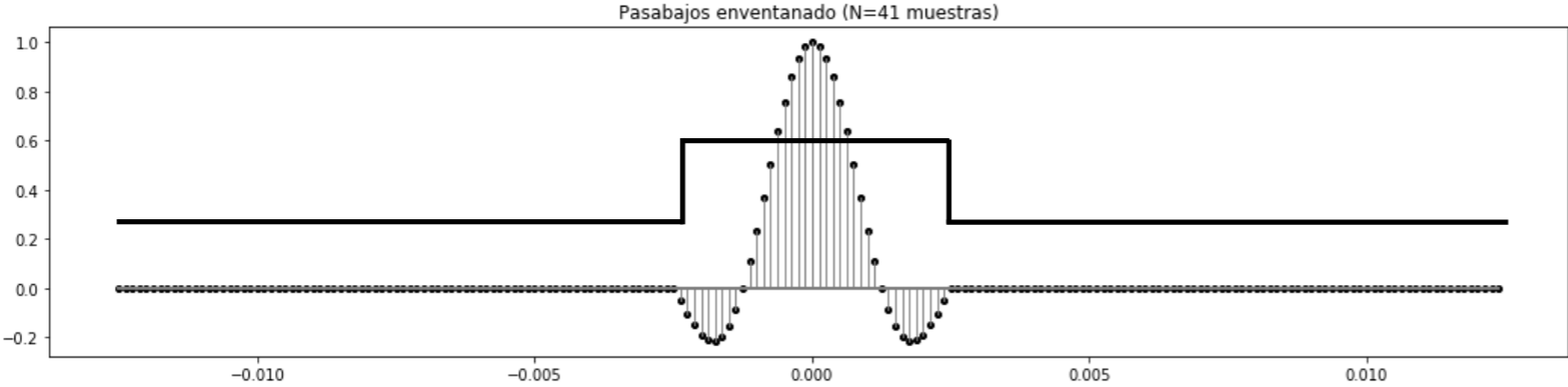
$$H_d(e^{j\theta}) = H_{\text{LPF}}(e^{j\theta}) * W(e^{j\theta})$$



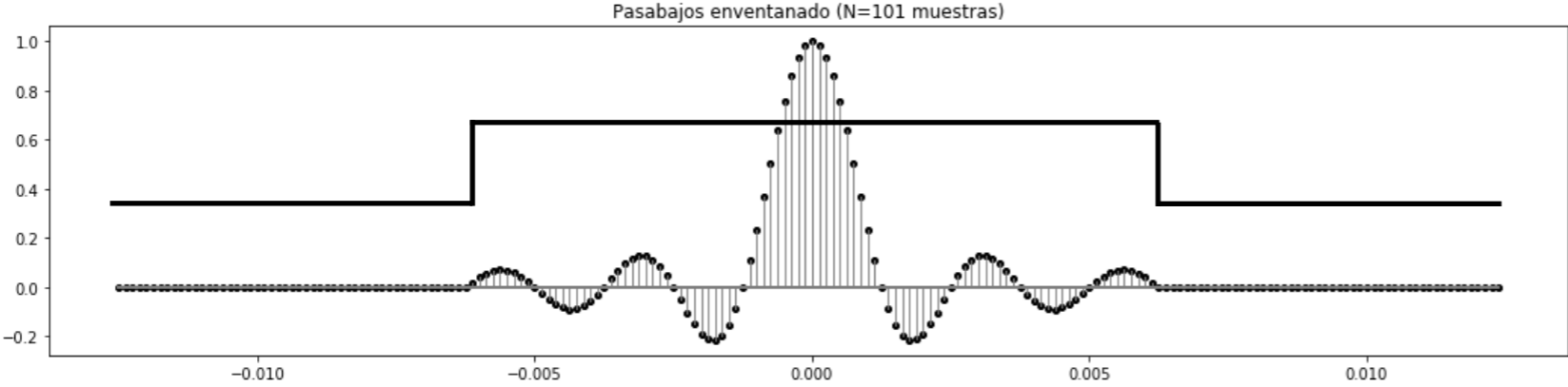
$$h_{\text{LPF}}[n]$$



$$h_d[n] = h_{\text{LPF}}[n]w_1[n]$$

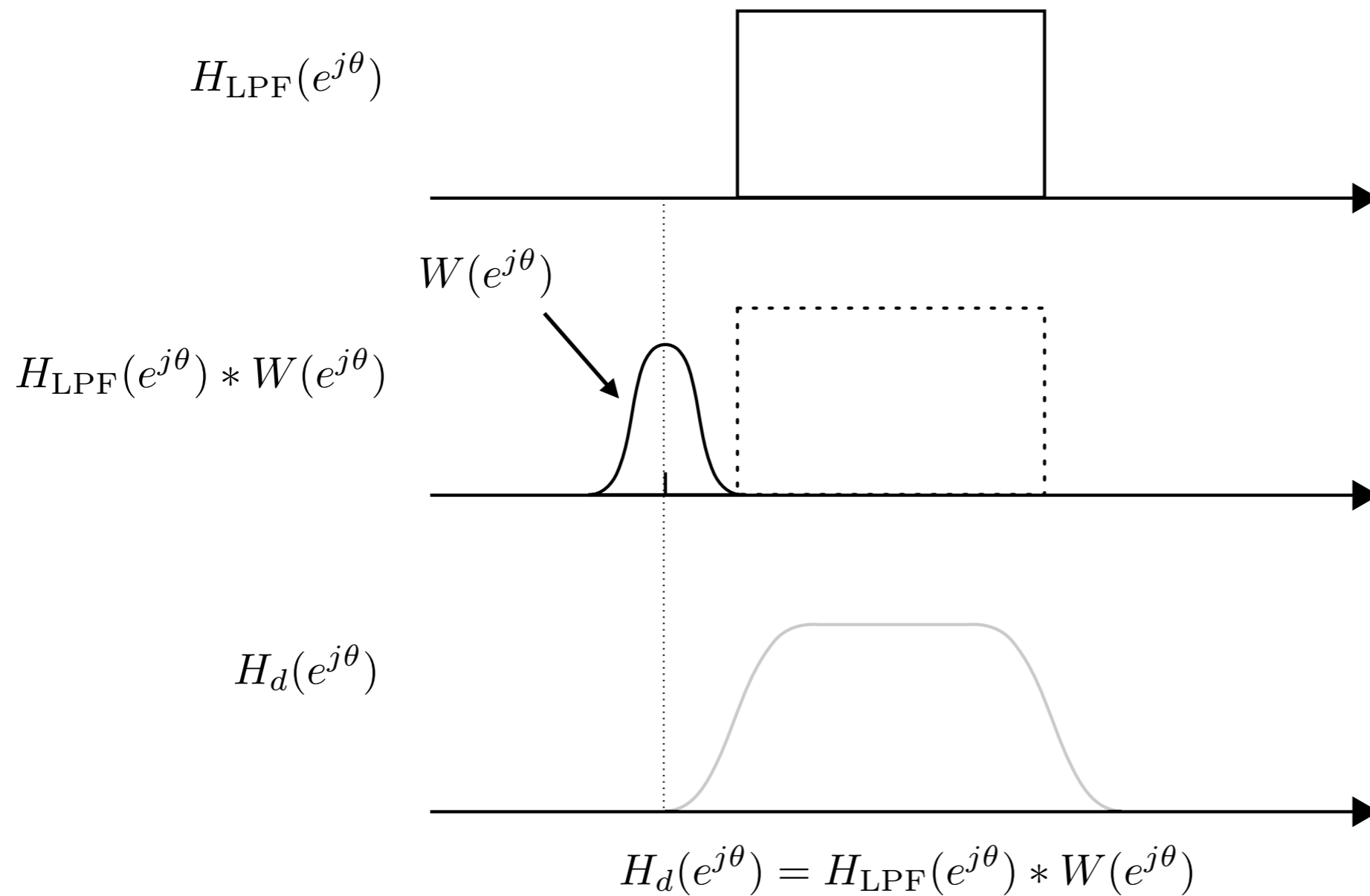


$$h_d[n] = h_{\text{LPF}}[n]w_2[n]$$

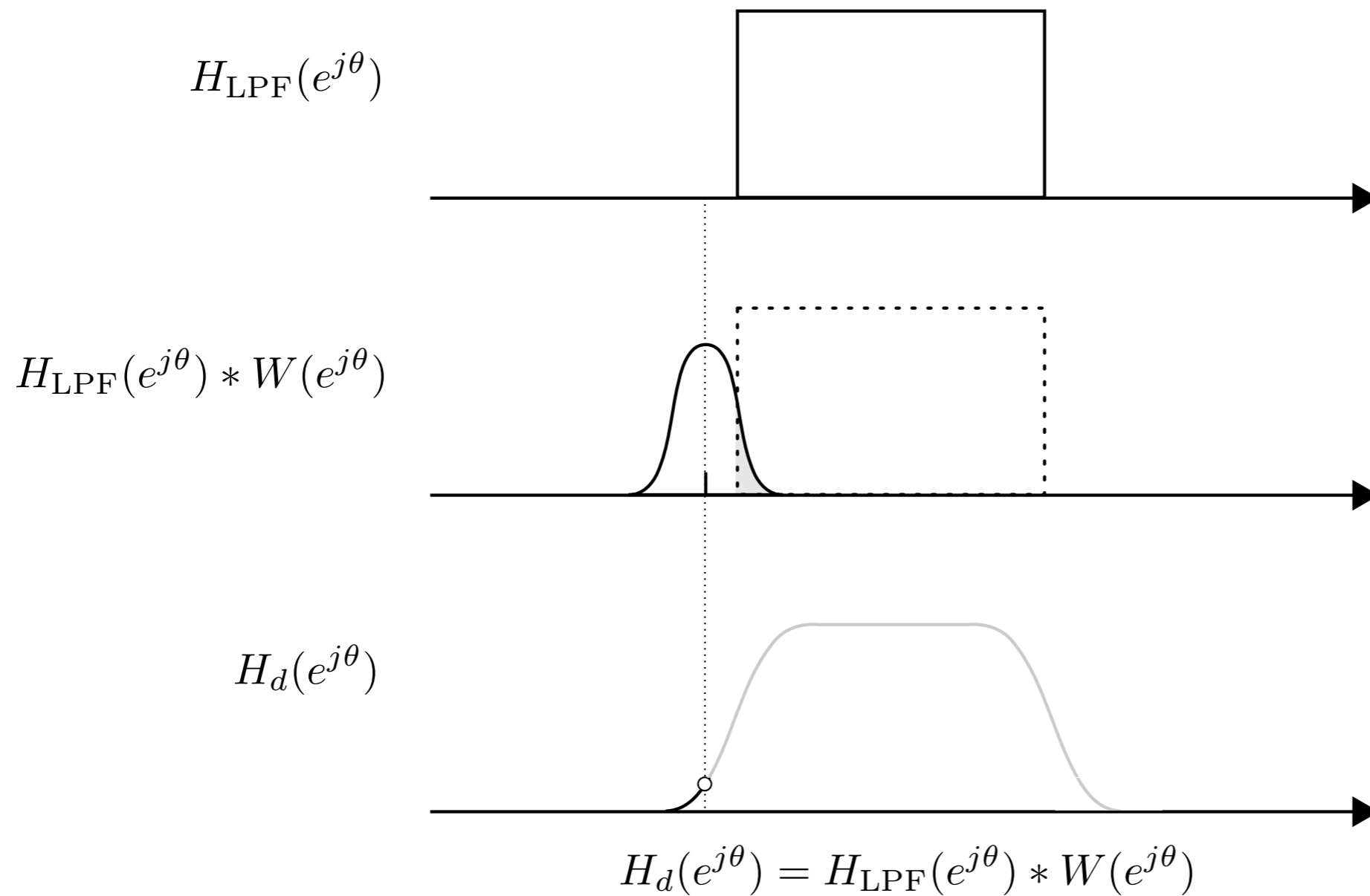


$$h_d[n] = h_{\text{LPF}}[n]w_3[n]$$

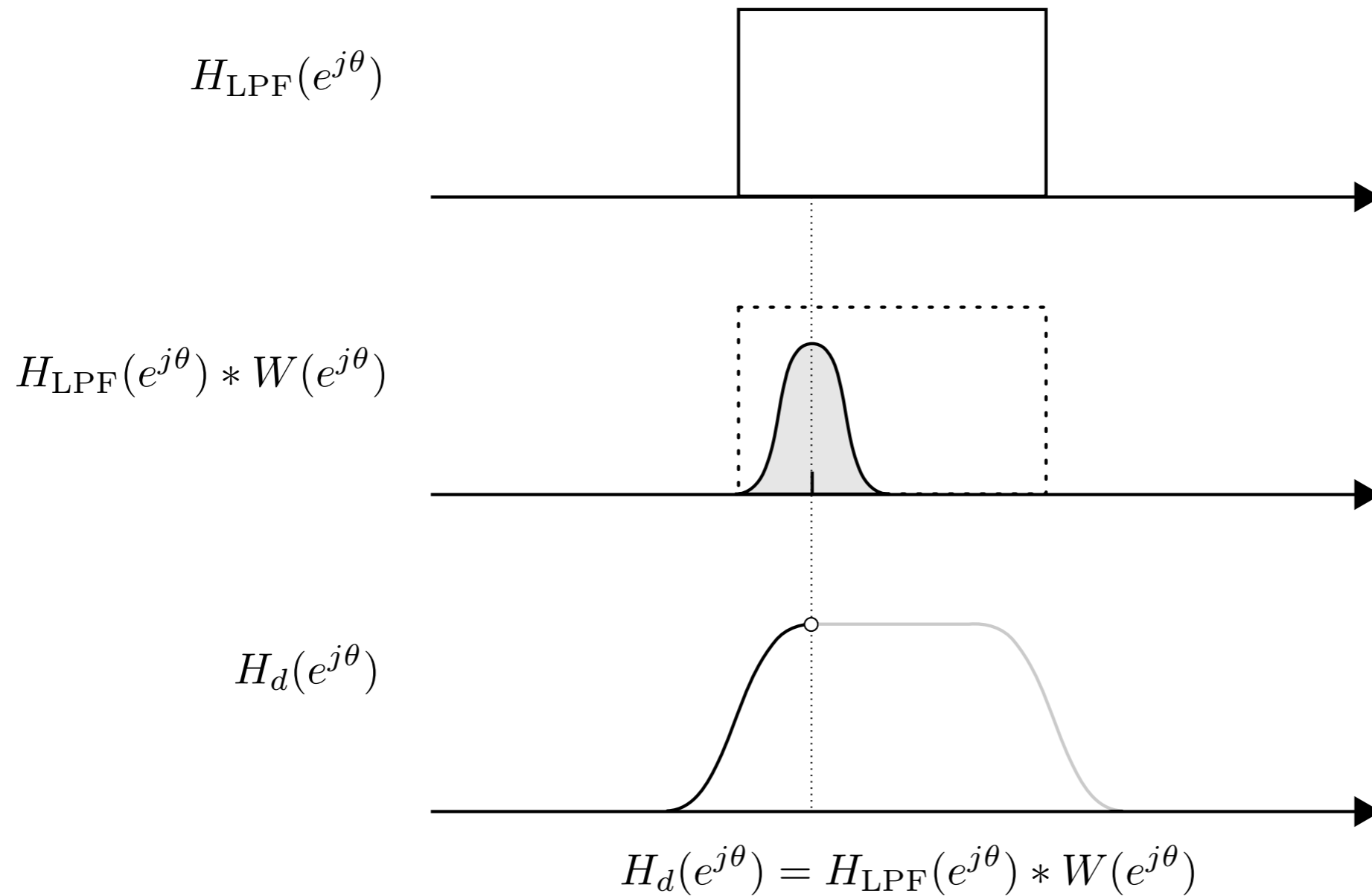
Diseño de filtro FIR por ventanas



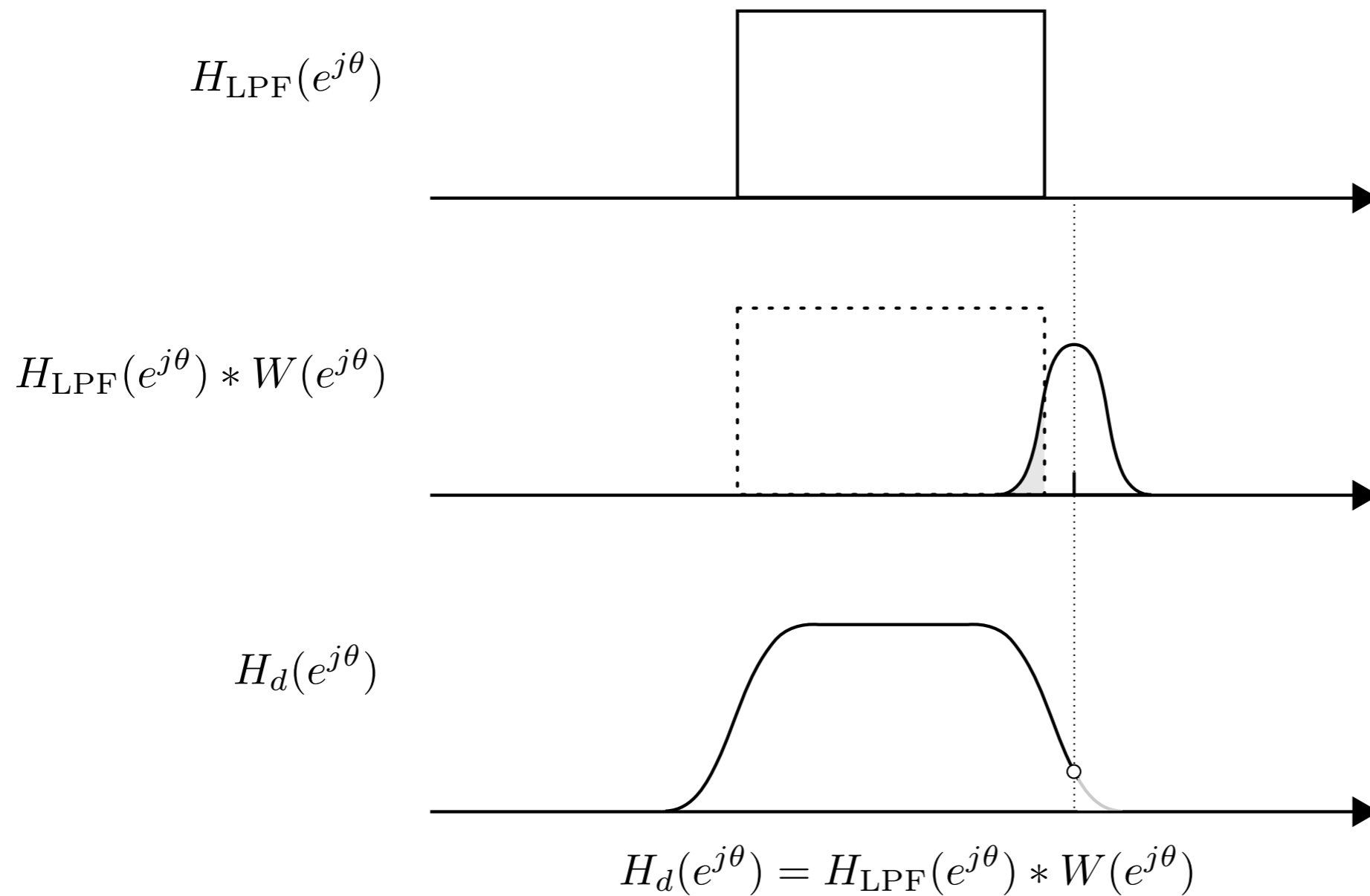
Diseño de filtro FIR por ventanas



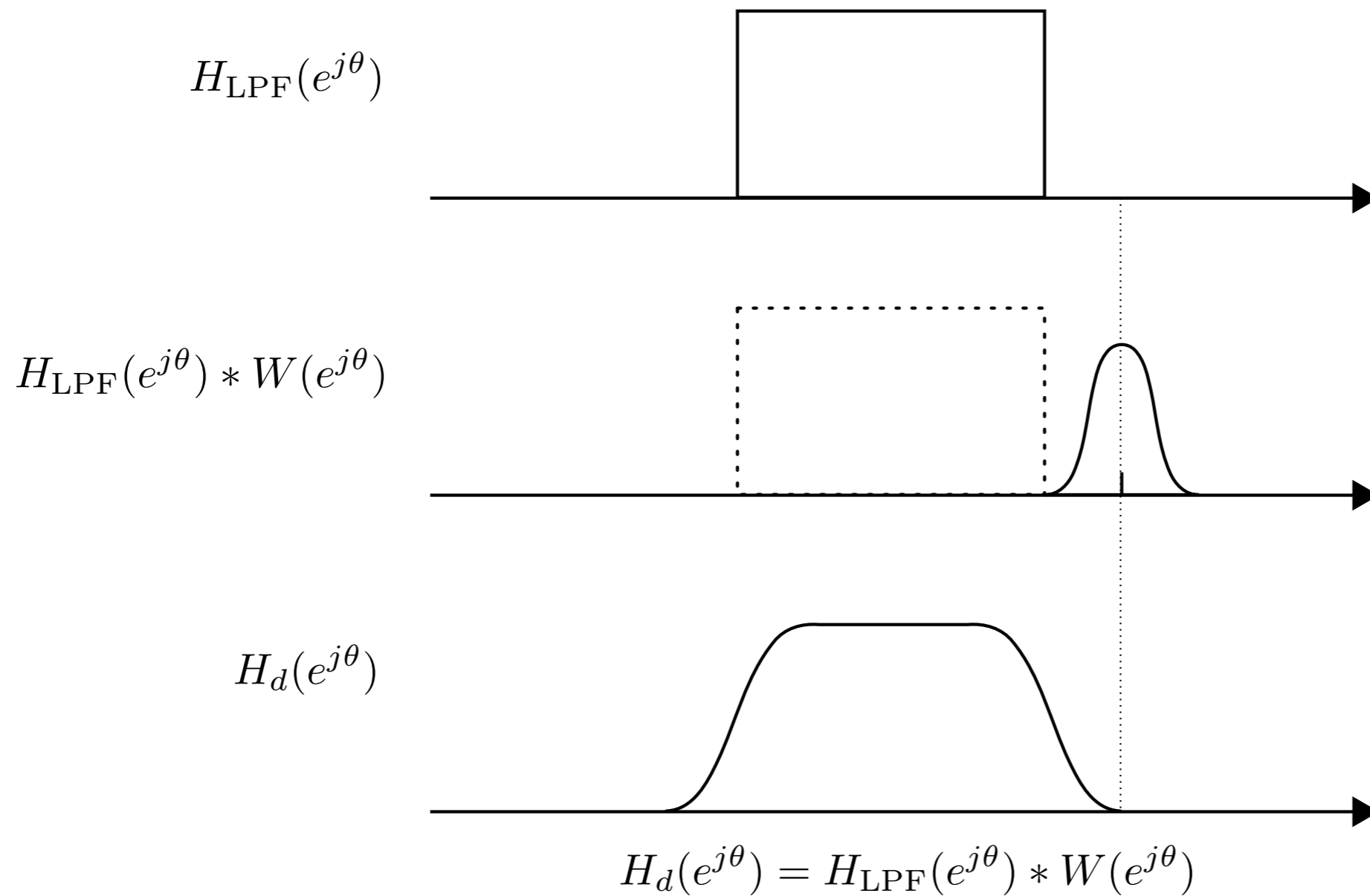
Diseño de filtro FIR por ventanas



Diseño de filtro FIR por ventanas

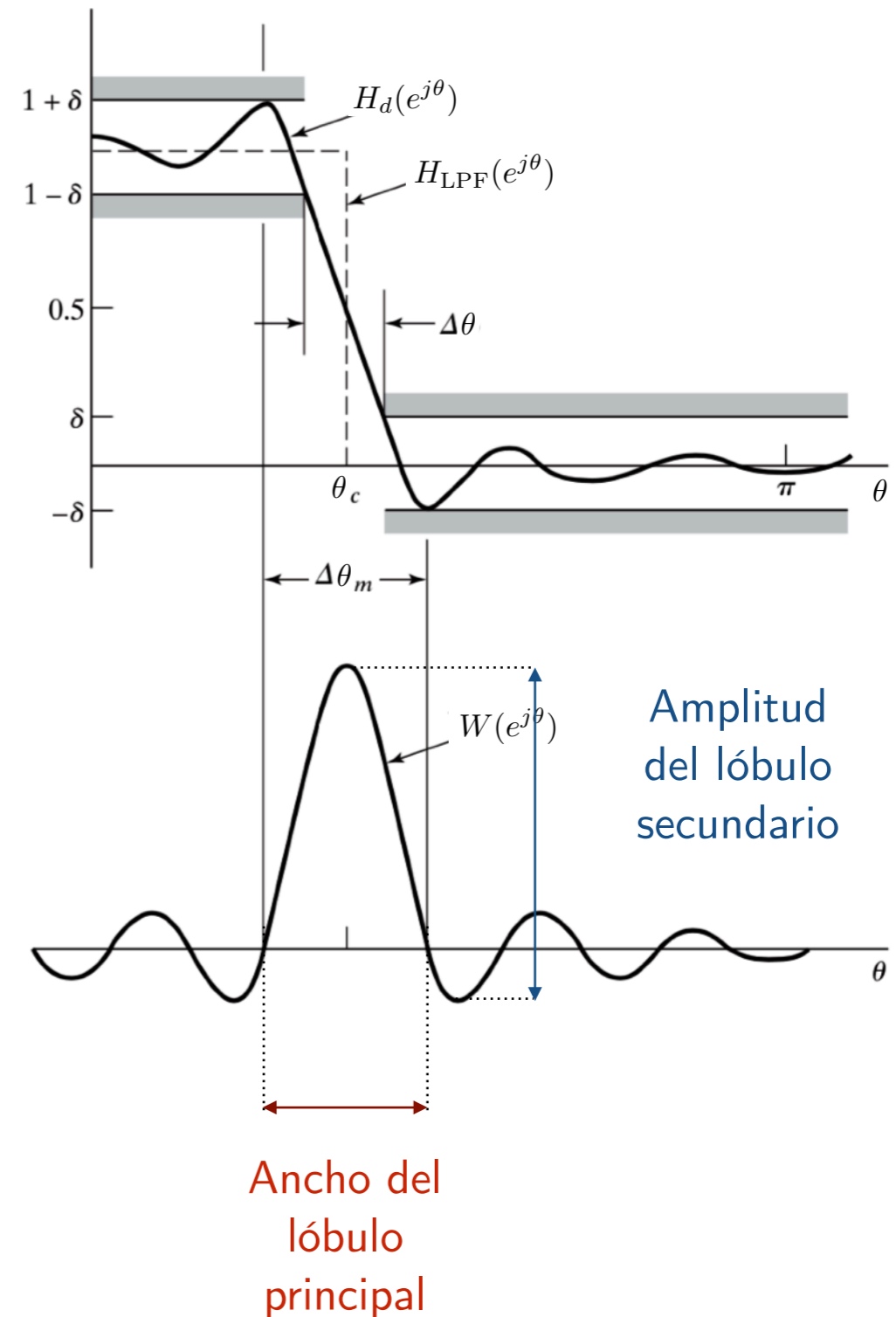


Diseño de filtro FIR por ventanas



Diseño de filtro FIR por ventanas

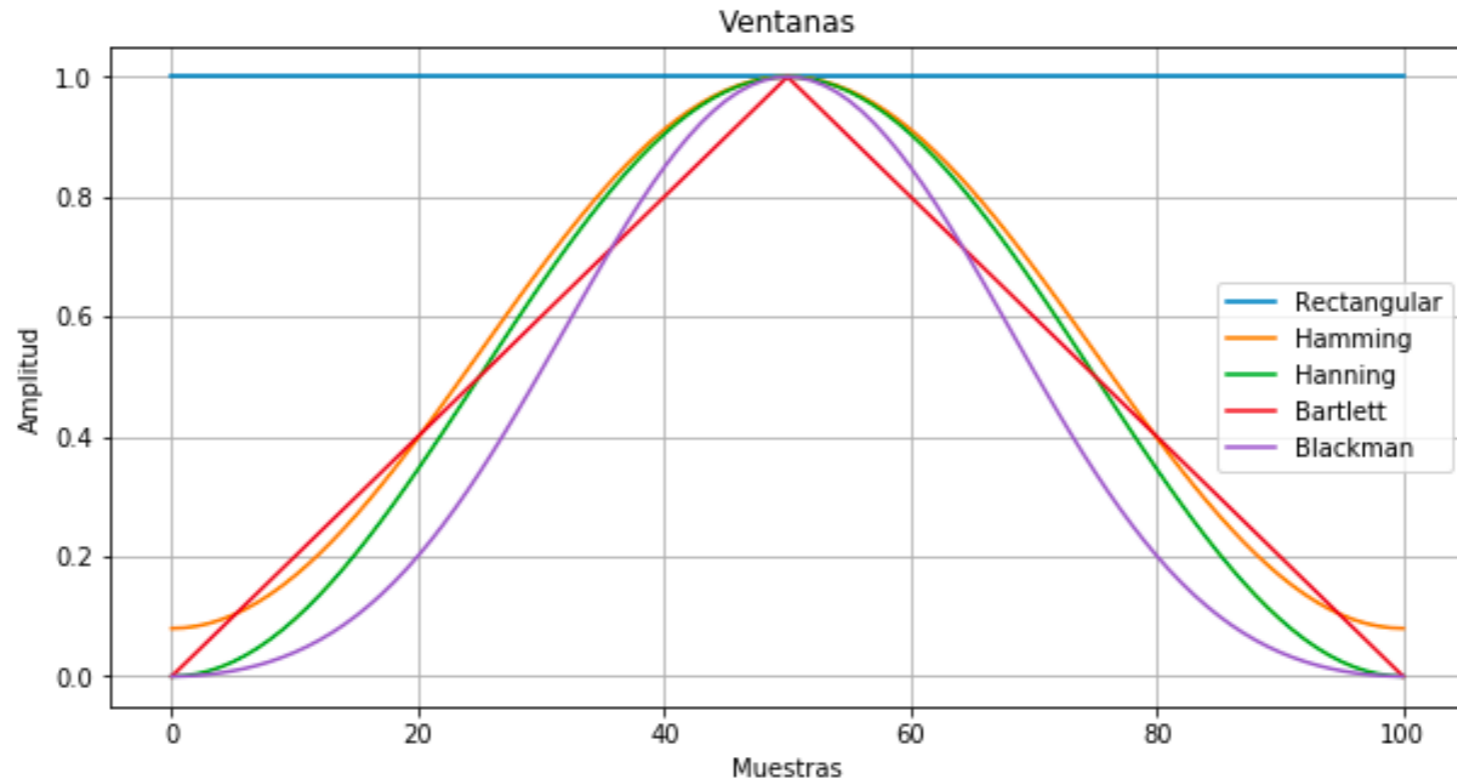
- La elección del tipo de ventana afecta la respuesta del FIR realizado.
- Ripple
- Número de coeficientes
- Ancho lóbulos: caída
- Deseado:
 - Ancho de lóbulo principal chico
 - Amplitud lóbulo secundario baja
- Debemos garantizar **causalidad**.
 - Es necesario retardar la respuesta enventanada $h_d[n]$.
 - Retardo de grupo.



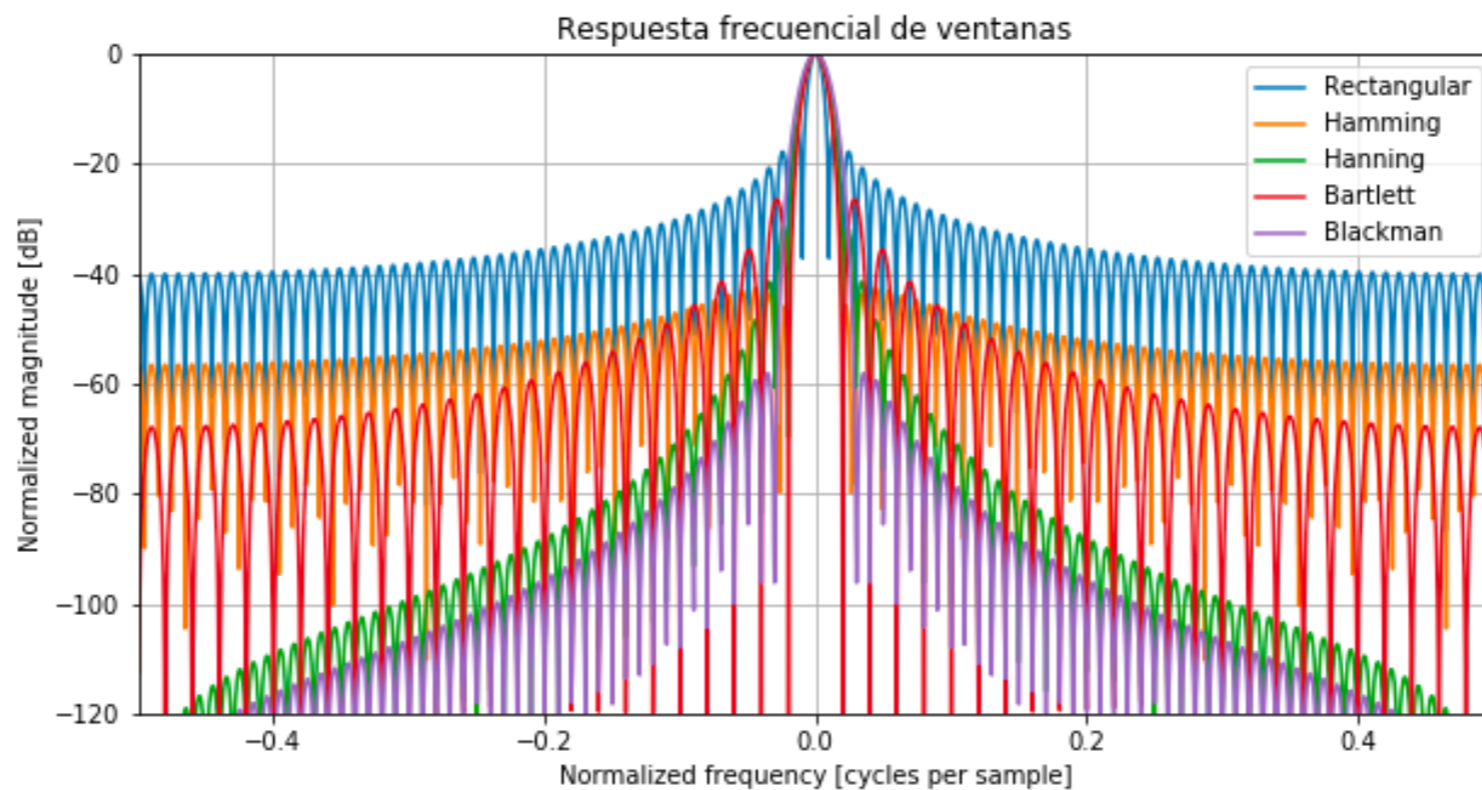
Funciones de ventanas

Algunas secuencias de ventanas:

- Rectangular,
- Hamming,
- Hann,
- Blackman,
- Bartlett, ...



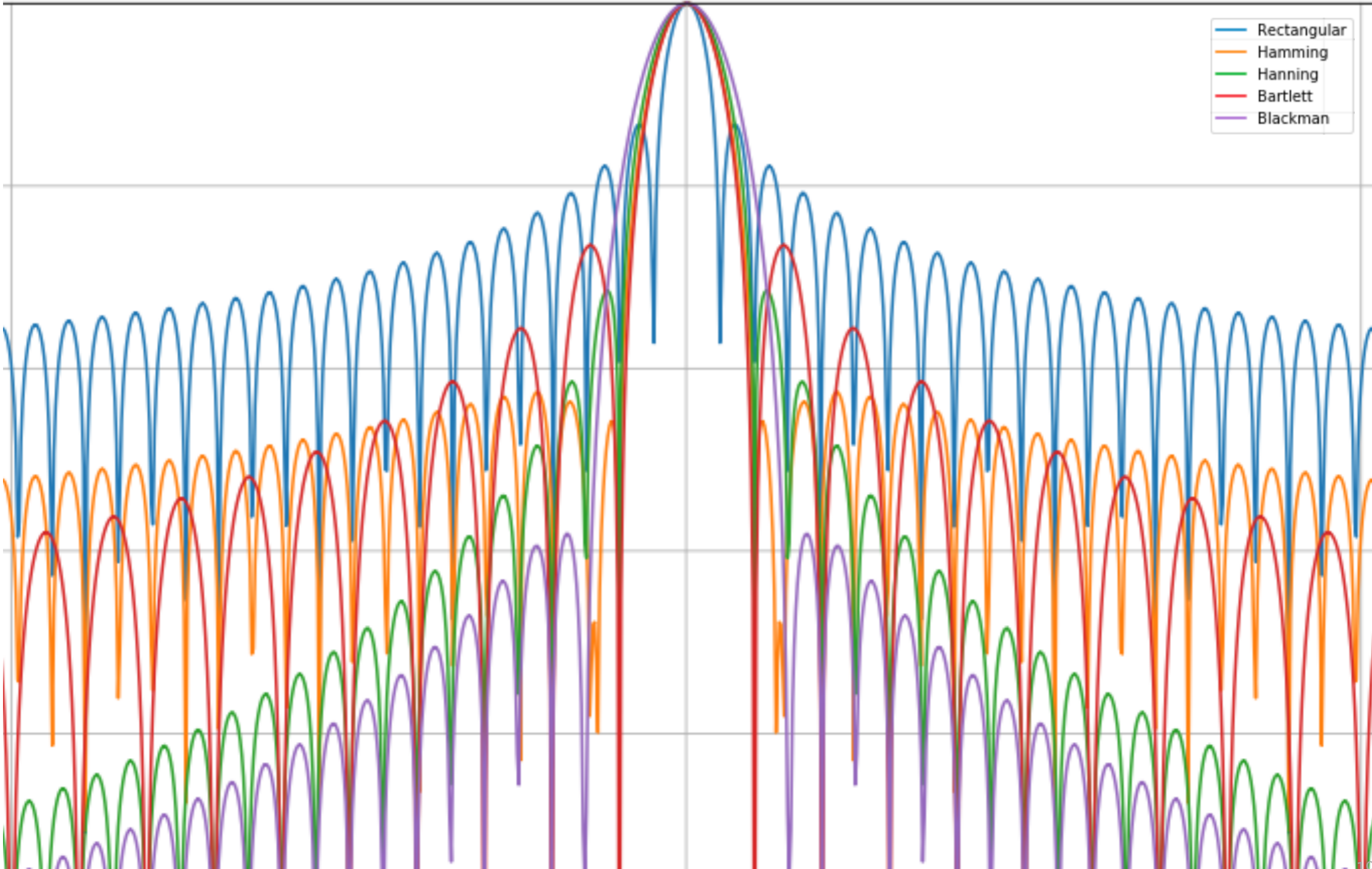
Atención: son ventanas de tiempo discreto, están graficadas *continuas* solamente para su visualización.



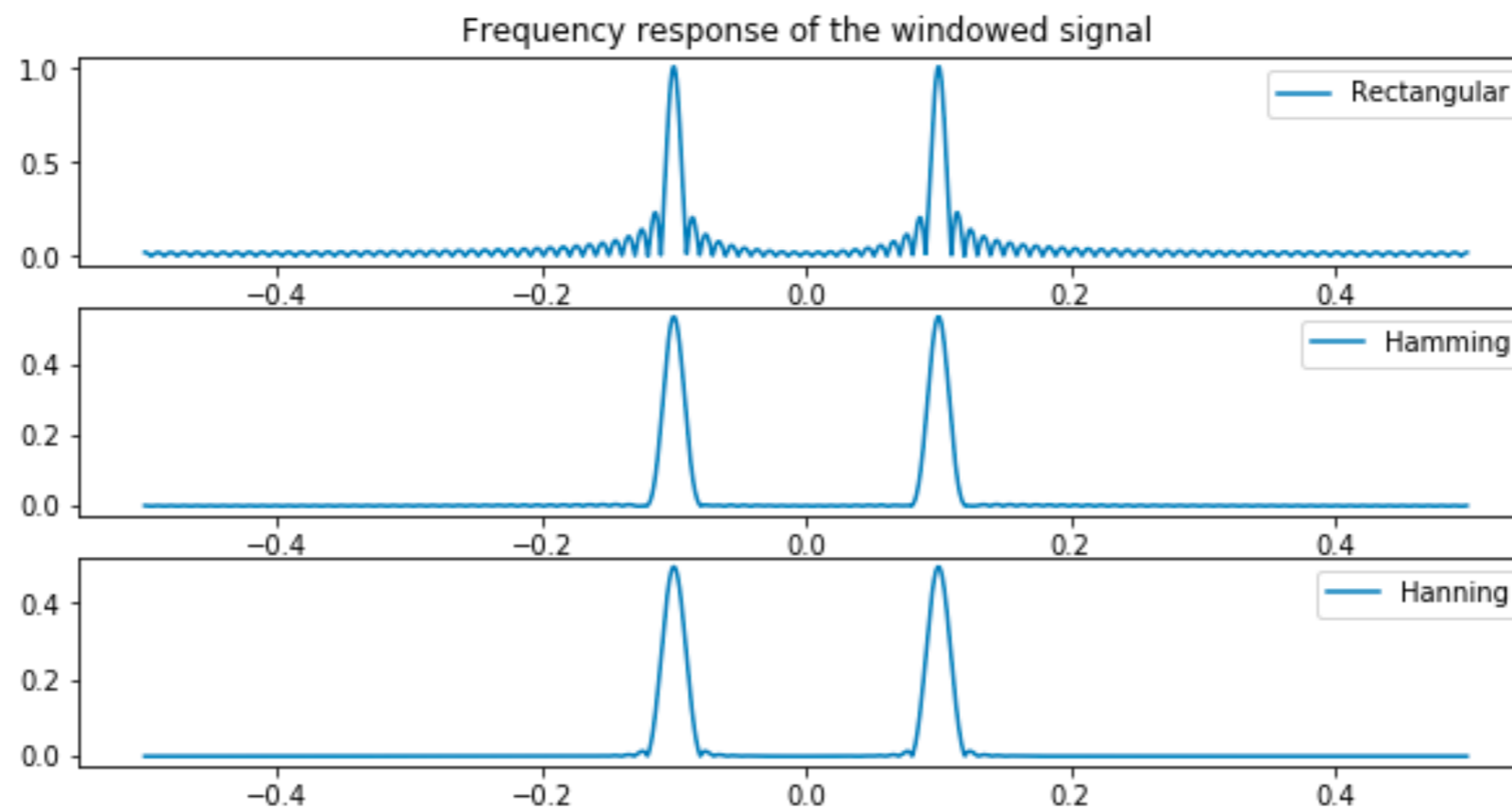
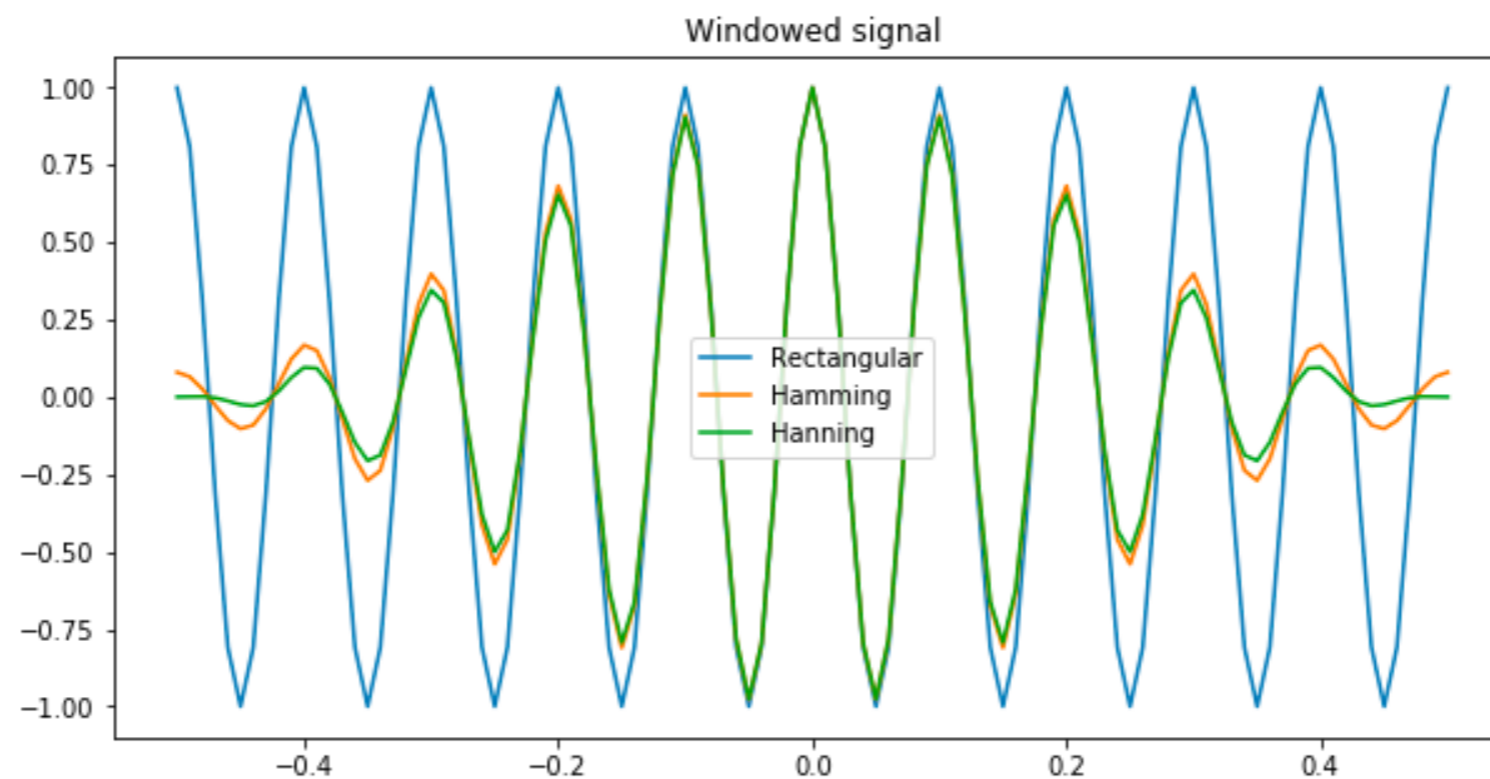
- ¿Cuál es la ventana *ideal*? Respuesta frecuencial $\delta(e^{j\theta})$

Funciones de ventanas

Respuesta frecuencial de ventanas

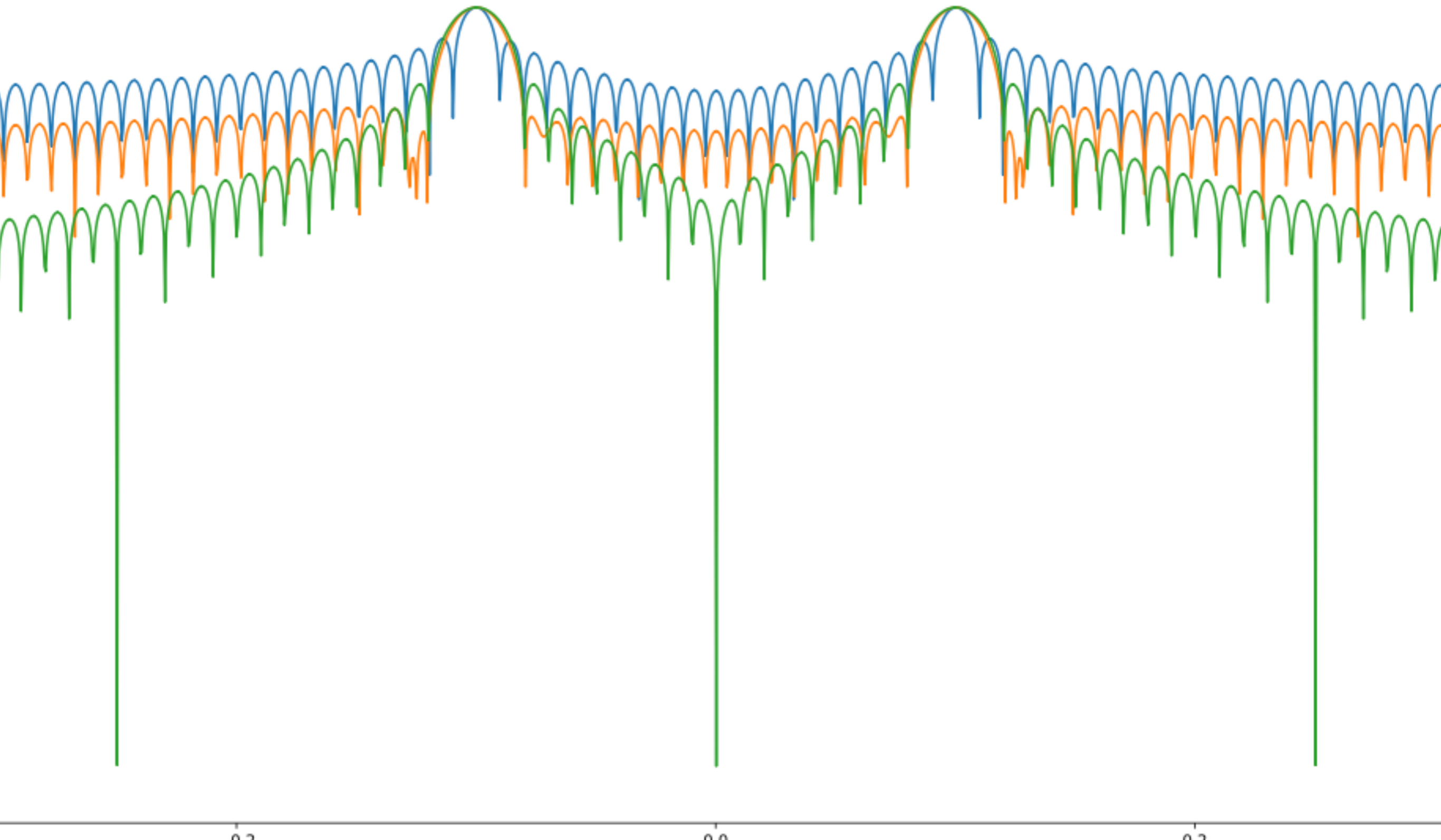


Análisis de un coseno enventanado

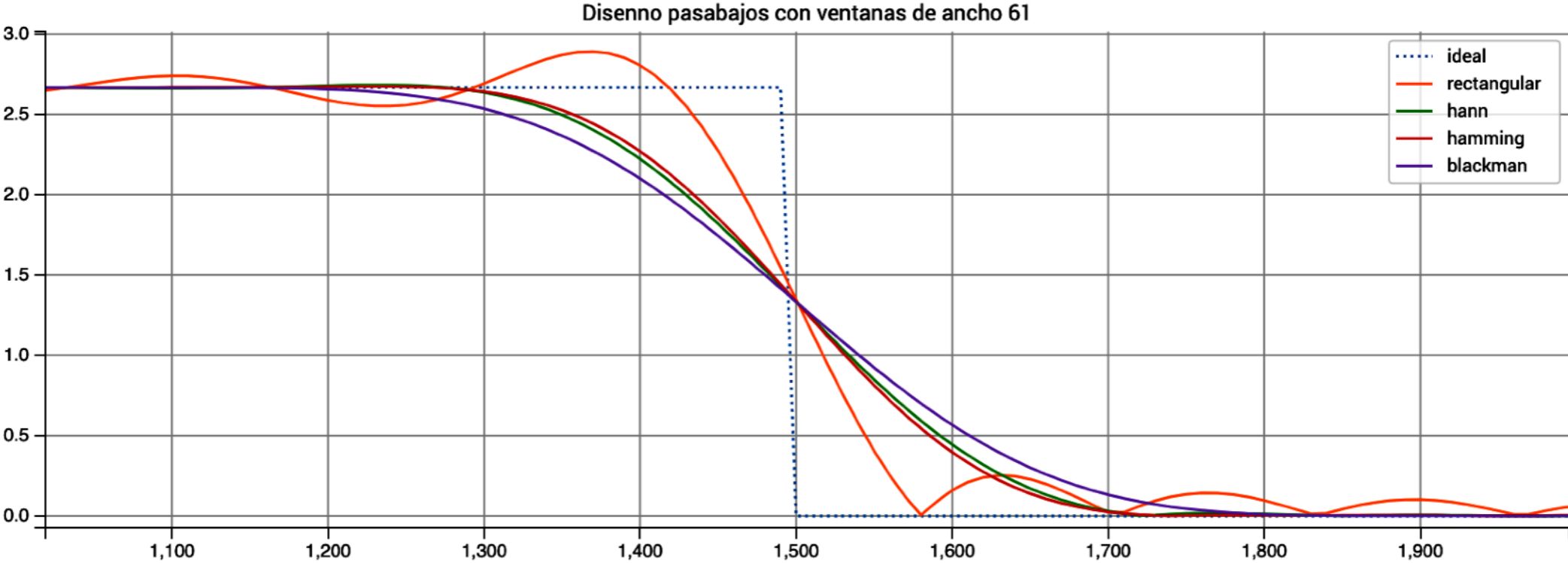
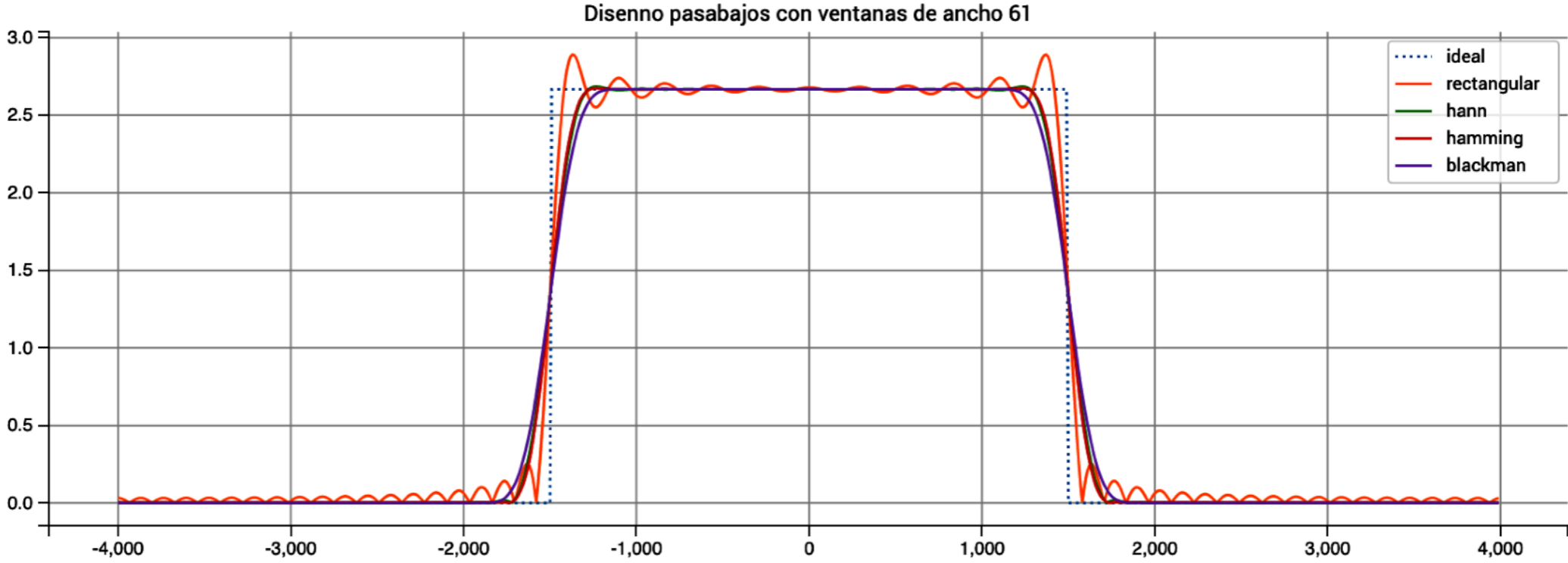


Análisis de un coseno enventanado

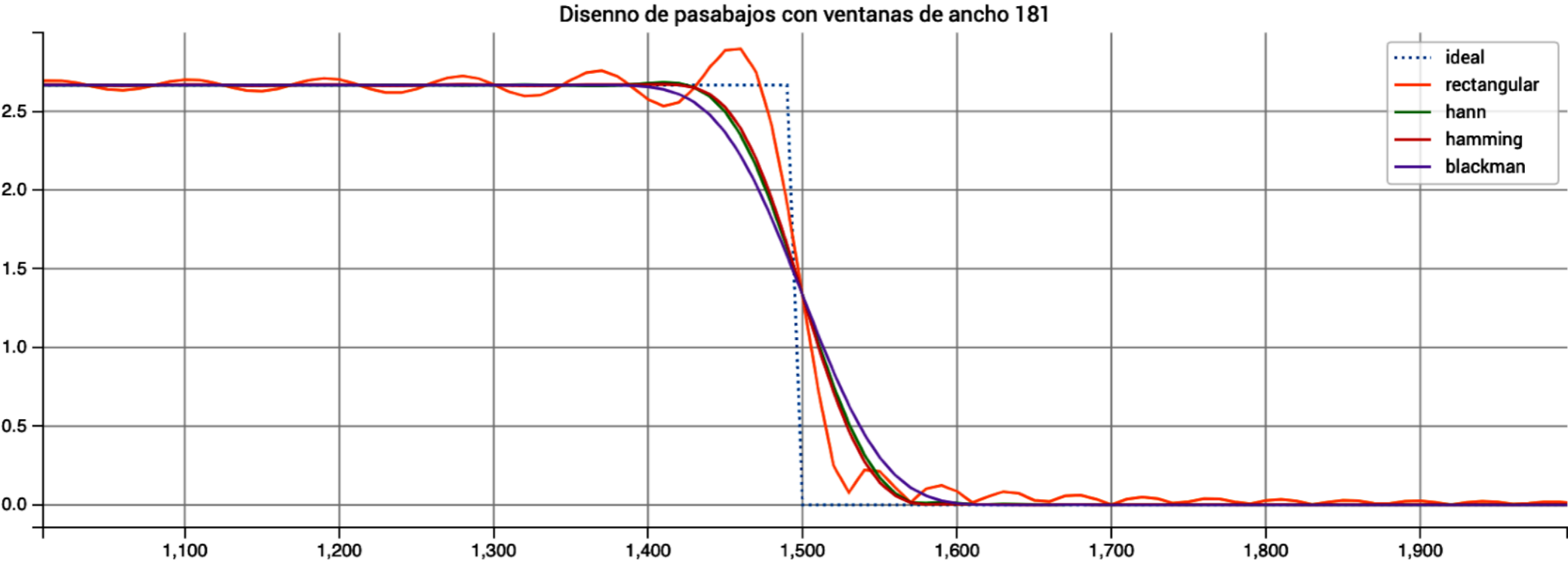
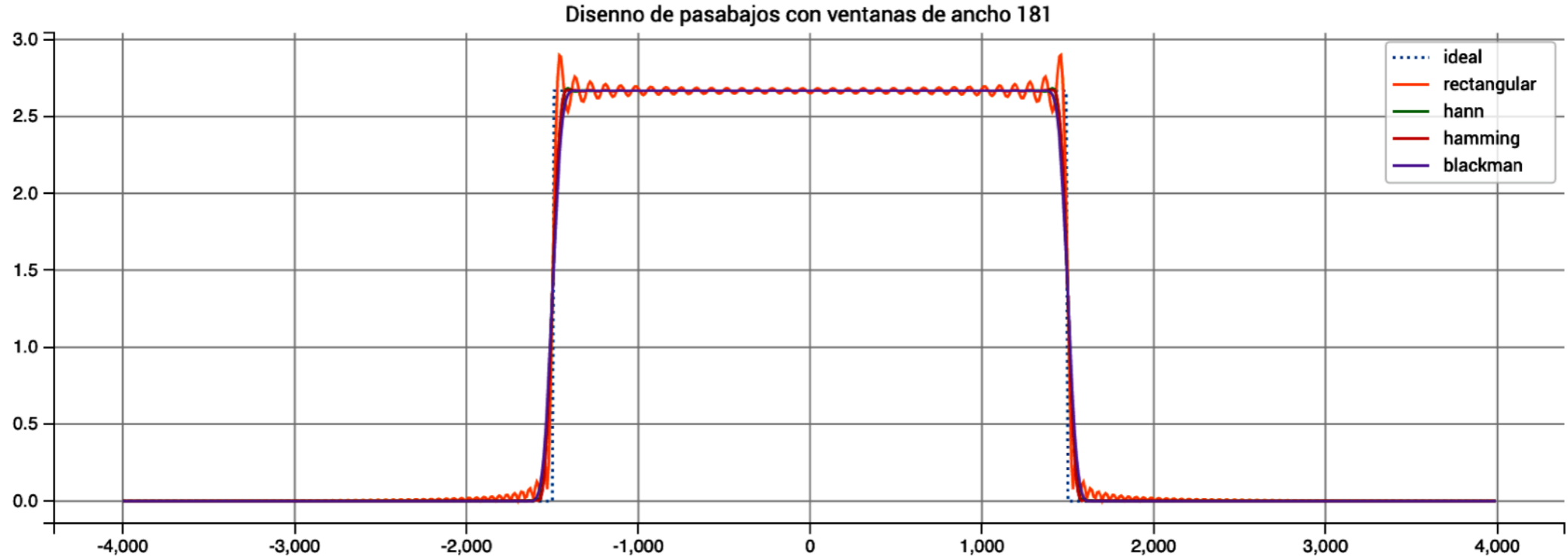
Frequency response of the windowed signal



Diseño de un pasabajos por ventanas



Diseño de un pasabajos por ventanas

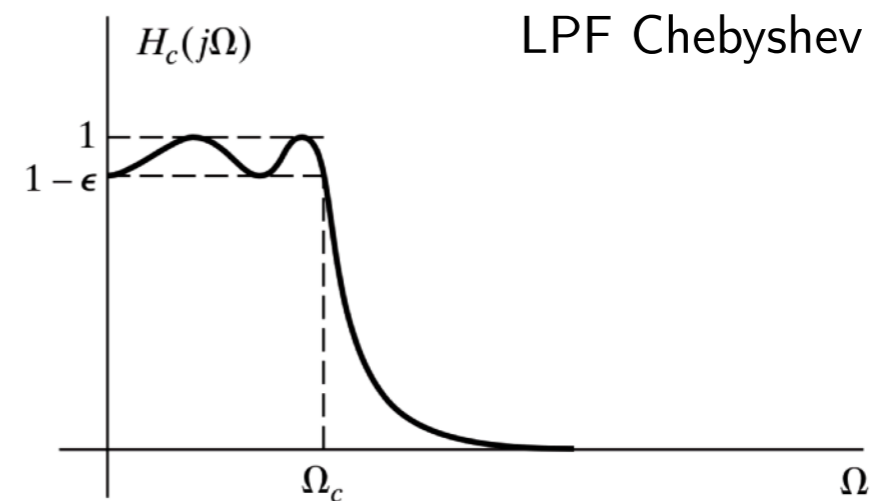
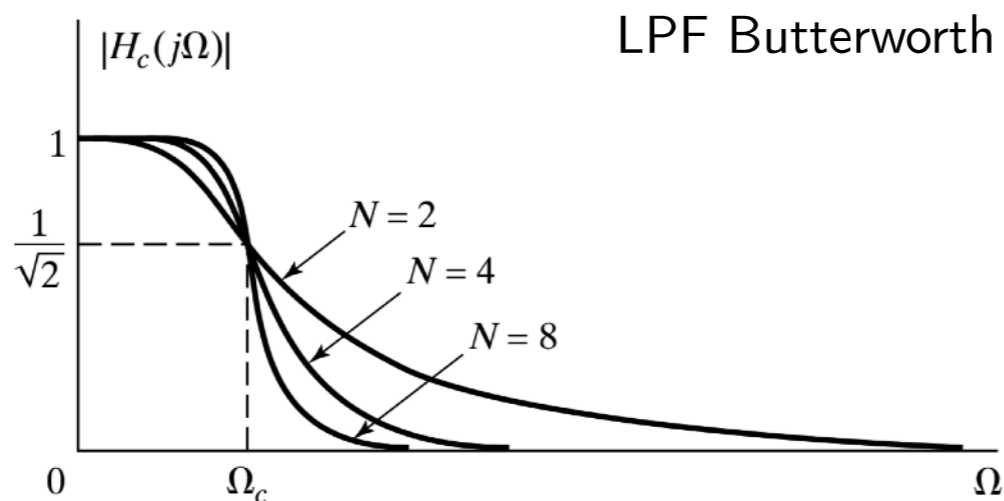


Diseño por ventanas: resumen

- Método:
 1. respuesta frecuencial ideal,
 2. respuesta al impulso ideal $h_i[n]$,
 3. $h_d[n]$ enventanando $h_i[n] \times w[n]$ (elección de $w[n]$) y retardo (causal).
- Si $h_i[n]$ es de fase lineal ($w[n]$ simétrica), $h_d[n]$ es de fase lineal.
- Son FIR, son BIBO estables.
- Orden (número de coeficientes) muy alto.
 - CPU, memoria y *ruido de operaciones*.
 - Retardo de grupo $MT_s/2$ (puede ser alto).
- El proceso de diseño es iterativo, partiendo de un M bajo y se aumenta hasta que cumple los requerimientos.
 - Se puede estimar a partir de la respuesta ideal.

Diseño de IIR a partir de filtros de tiempo continuo

- Método de diseño basado en filtros de tiempo continuo.
- Amplios antecedentes y métodos para el diseño de filtros en tiempo continuo.
- Familias de filtros tiempo continuo paramétricos (orden, puntos de interés, ...): Butterworth, Chebyshev, ...
- Transformación de $H(s)$ a $H(z)$
 - Transformación bilineal
 - Invarianza de la respuesta al impulso
 - Muestreo de respuesta: $h_d[n] = T h_c(nT)$

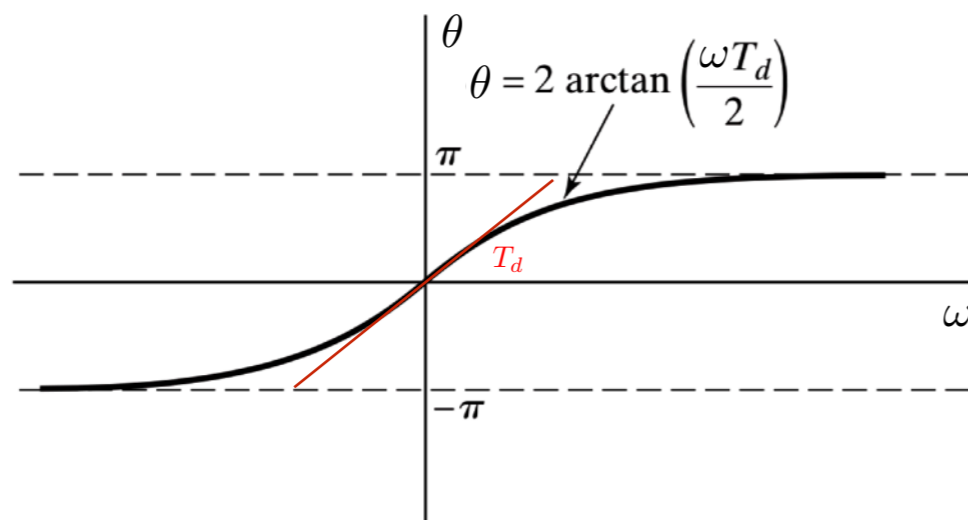


Diseño de filtros IIR

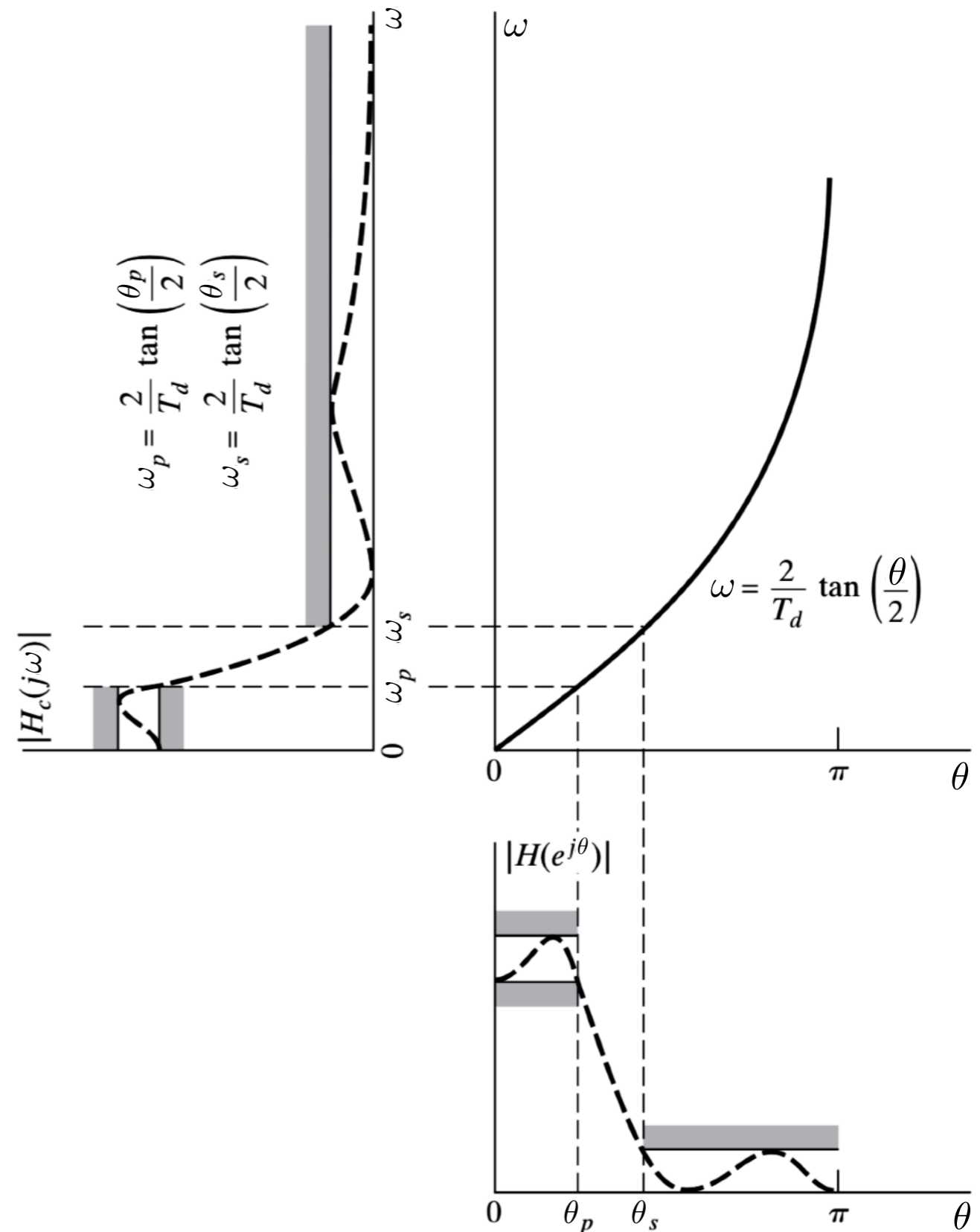
- ¿Cómo se relacionan las respuestas frecuenciales $H_c(j\omega)$ y $H_d(e^{j\theta})$?

$$s = j\omega = \frac{2}{T_d} \left(\frac{1 - e^{-j\theta}}{1 + e^{-j\theta}} \right) = j \frac{2}{T_d} \tan \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

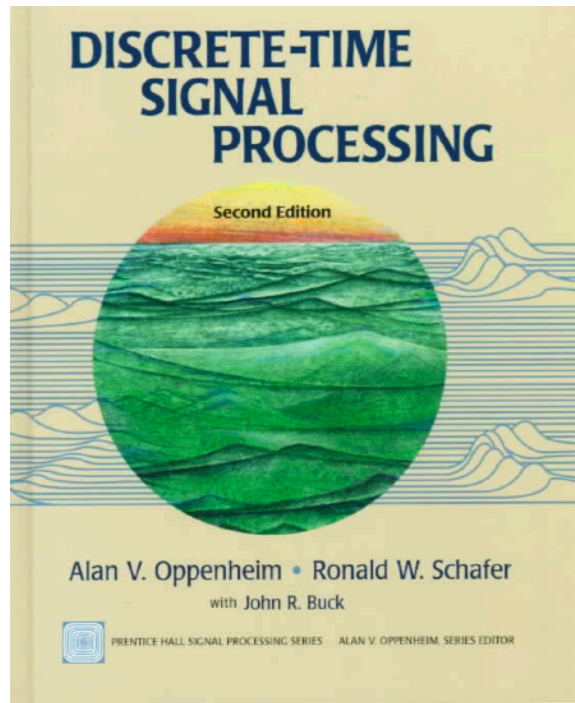
$$\begin{aligned} H_d(e^{j\theta}) &= H_c \left(\frac{2j}{T_d} \tan \frac{\theta}{2} \right) \\ &= H_c(j\omega) \Big|_{\omega = \frac{2}{T_d} \tan \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$



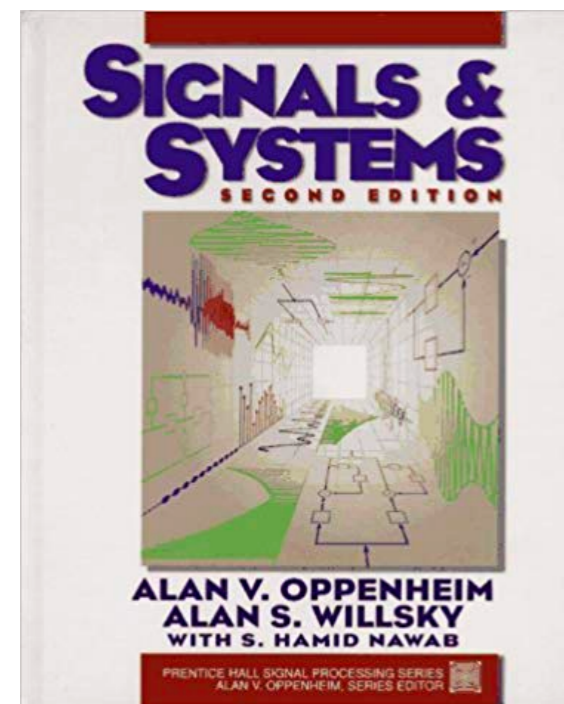
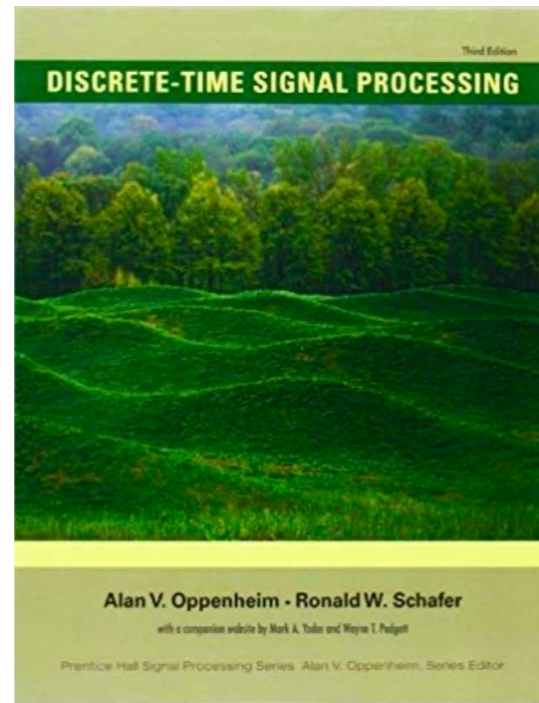
Relación no lineal entre ω y θ .



Referencias



Discrete-Time Signal Processing, Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer



Signals and Systems, Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid

