

# Comunicaciones Digitales

## Práctico 7

*Teoría de la Información: información mutua y canal binario simétrico*

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cuál indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala:  $\blacklozenge$  básica,  $\star$  media,  $\ast$  avanzada, y  $\blacklozenge$  difícil.

### $\blacklozenge$ Ejercicio 1

Demostrar que si  $X$  e  $Y$  son símbolos discretos, aleatorios e independientes, se cumple que su entropía conjunta es la suma de sus entropías.

### $\blacklozenge$ Ejercicio 2

Sean  $X$  e  $Y$  símbolos discretos, aleatorios e independientes. Las entropías condicional  $H\{X|Y\}$  y conjunta  $H\{X;Y\}$  se definen como:

$$\begin{aligned} H\{X|Y\} &= E\{\log_2 \frac{1}{p(x|y)}\} \\ H\{X;Y\} &= E\{\log_2 \frac{1}{p(x,y)}\} \end{aligned}$$

- Halle una expresión que relacione ambas definiciones y de una interpretación a dicha relación.
- Defina la información mutua  $I\{X;Y\}$  a partir de la expresión anterior y dé una interpretación a dicha definición.

### $\star$ Ejercicio 3

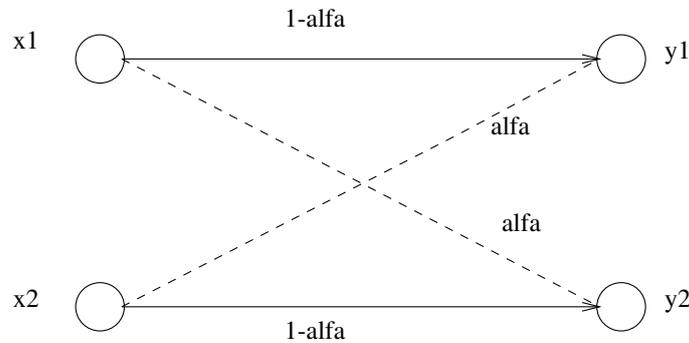
Sea  $p(x, y)$  dado por las siguientes probabilidades hallar:

		$Y$	
		0	1
$X$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	1	0	$\frac{1}{3}$

- $H\{X\}$  y  $H\{Y\}$ .
- $H\{X|Y\}$  y  $H\{Y|X\}$ .
- $H\{X, Y\}$ .
- $I\{X;Y\}$ .
- Realice un diagrama de Venn relacionando todas las cantidades anteriores.

### ★ Ejercicio 4

*Canal Binario Simétrico.* Considerar el modelo de un canal binario simétrico, representado en la figura:



donde:  $P(x_1) = p$  y  $P(y_1|x_2) = P(y_2|x_1) = \alpha$ .

- Calcular la información mutua en función de  $p$  y  $\alpha$
- Discutir qué valores toma  $\alpha$  cuando la potencia del ruido es muy pequeña o muy grande.

### \* Ejercicio 5

Se considera un archivo en una computadora de largo  $M$  bits (con  $M$  suficientemente grande a todos los efectos), tal que la ocurrencia de 0s y 1s son iid y con probabilidad de que un bit sea 0 igual a  $p_0$ . Dado que  $p_0$  es relativamente alto, se considera una codificación alternativa donde se indicará cuántos 0s sucesivos hay previo a cada 1 (una variación del denominado *Run-length encoding*, donde supondremos que todos los archivos terminan en 1). Por ejemplo, si el archivo comienza con 00110001, las primeras 3 salidas del codificador serán  $X_i = 2, 0, 3$  para  $i = 1, 2, 3$ .<sup>1</sup>

- Calcule el largo medio del archivo re-codificado en función de  $p_0$  y  $M$ . Grafíquelo en función de  $p_0$  junto con el largo promedio que obtendría un codificador binario óptimo y verifique que este último es mayor para muchos valores de  $p_0$ . Argumente por qué esto no contradice el teorema de codificación de fuente.
- Calcule la entropía del archivo re-codificado. Verifique que es igual a la del archivo original. Argumente por qué es esperable este resultado.

<sup>1</sup>Pueden ser útiles para el ejercicio las igualdades  $\sum_{k \geq 0} kp^{k-1} = 1/(1-p)^2$  y  $\sum_{k \geq 0} p^k = 1/(1-p)$ .