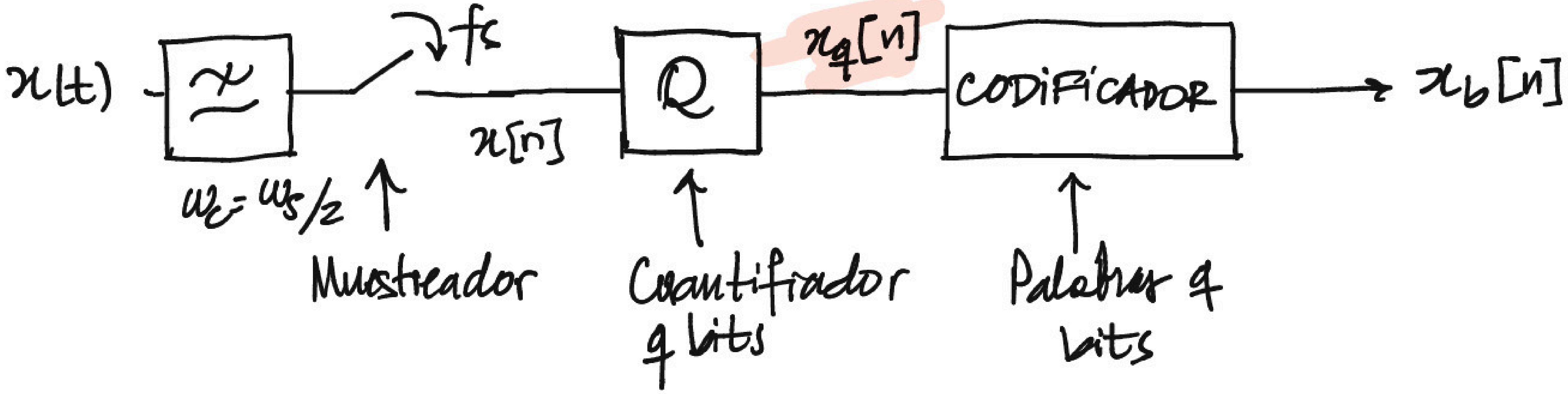
## MODELO CONCEPTUAL 2



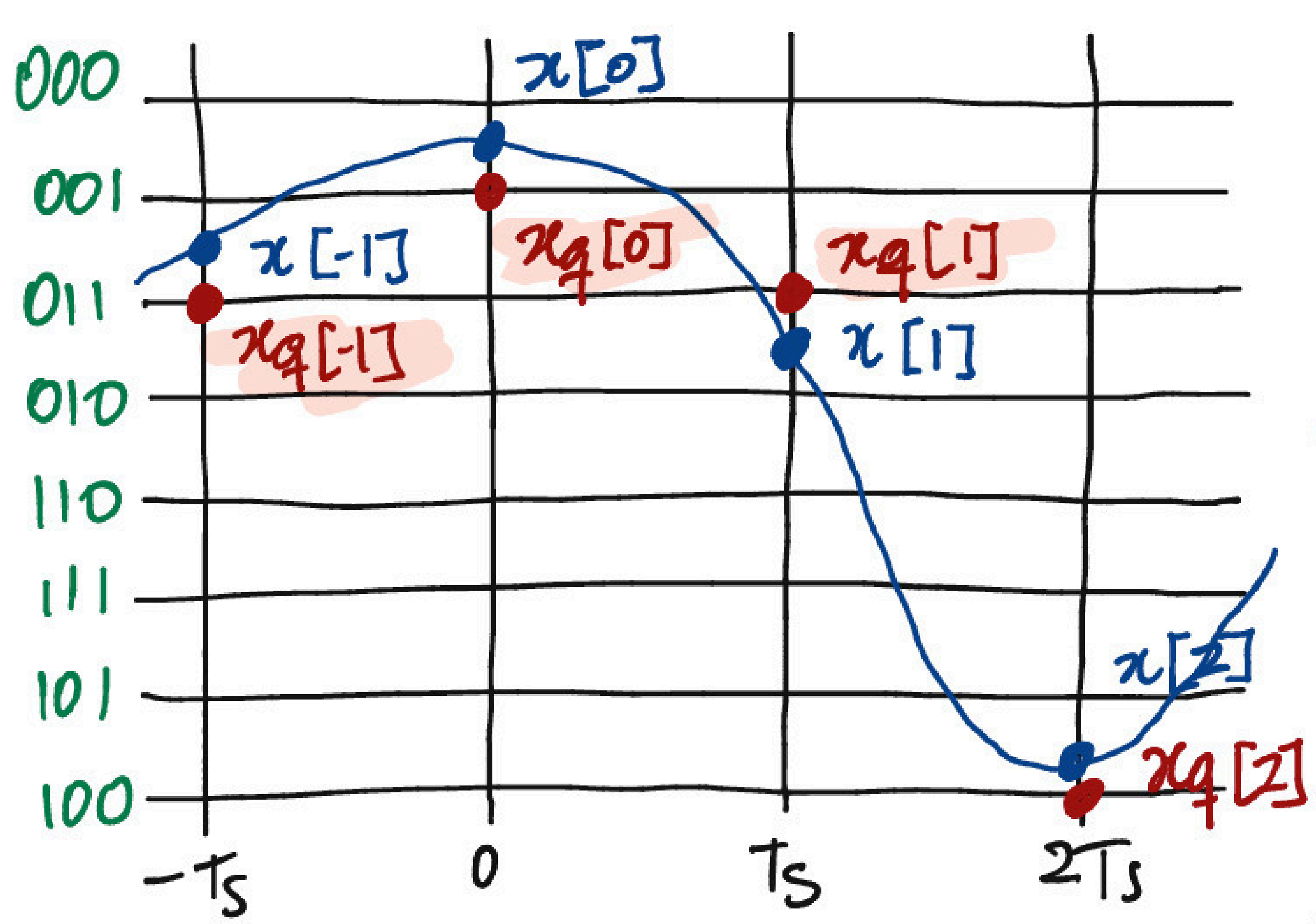

$x[n] = x(nT_s)$ Con esto nos alcanza para este curso.

Pero p(t) no existe, es una señal que no podemos construir. Veamos este modelo que sigue teniendo simplificaciones pero se aproxima a lo real.

Cuantificador ($2^q$ niveles)
q bits

$q = 3$, $2^3 = 8$ valores

Un valor de entrada se mapea en alguno de $2^q$ posibles valores de salida




Para la cuantificación podemos redondear o truncar, a alguno de los $2^q$ niveles válidos

VAMOS A COMETER UN ERROR DE CUANTIFICACIÓN

$$x_q[n] = x[n] + \varepsilon[n]$$

lo van a modelar en SAM.

Codificador (palabras de q bits)

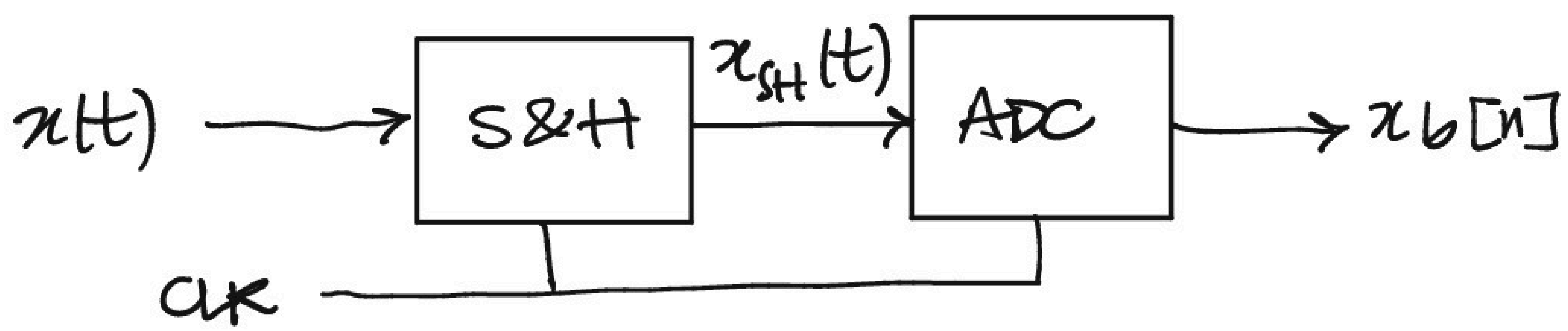
El codificador mapea cada uno de los niveles a su entrada ($2^q$) en "palabras" de q bits ($2^q$ palabras).

Siguiendo con el ejemplo, podemos usar un código de Gray

000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100

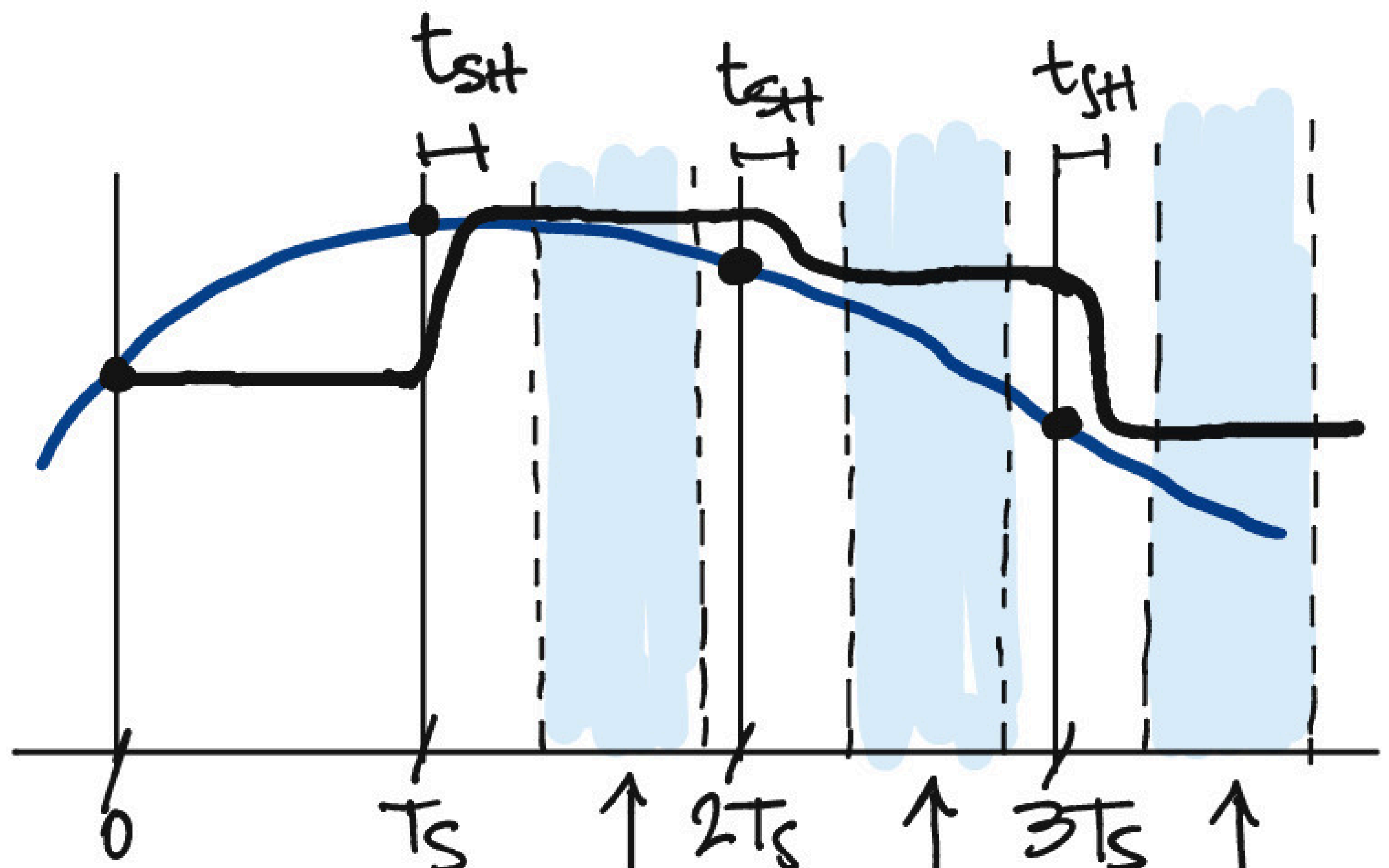
De esta forma ya tenemos en $x_b[n] = b_0 b_1 b_2$ una palabra de $q = 3$ bits y se puede almacenar digitalmente

# MODELO CONCEPTUAL 3




Este diagrama de bloques es "real", se pueden comprar los bloques de S&H y ADC.

El S&H (sample and hold) mantiene la señal constante entre "muestras" dadas por el clk. El ADC compara la entrada con niveles, cuantiza y codifica.




Durante estas "ventanas" donde la salida del S&H es constante, funciona el ADC.

$t_{SH}$ : tiempo de respuesta del S&H

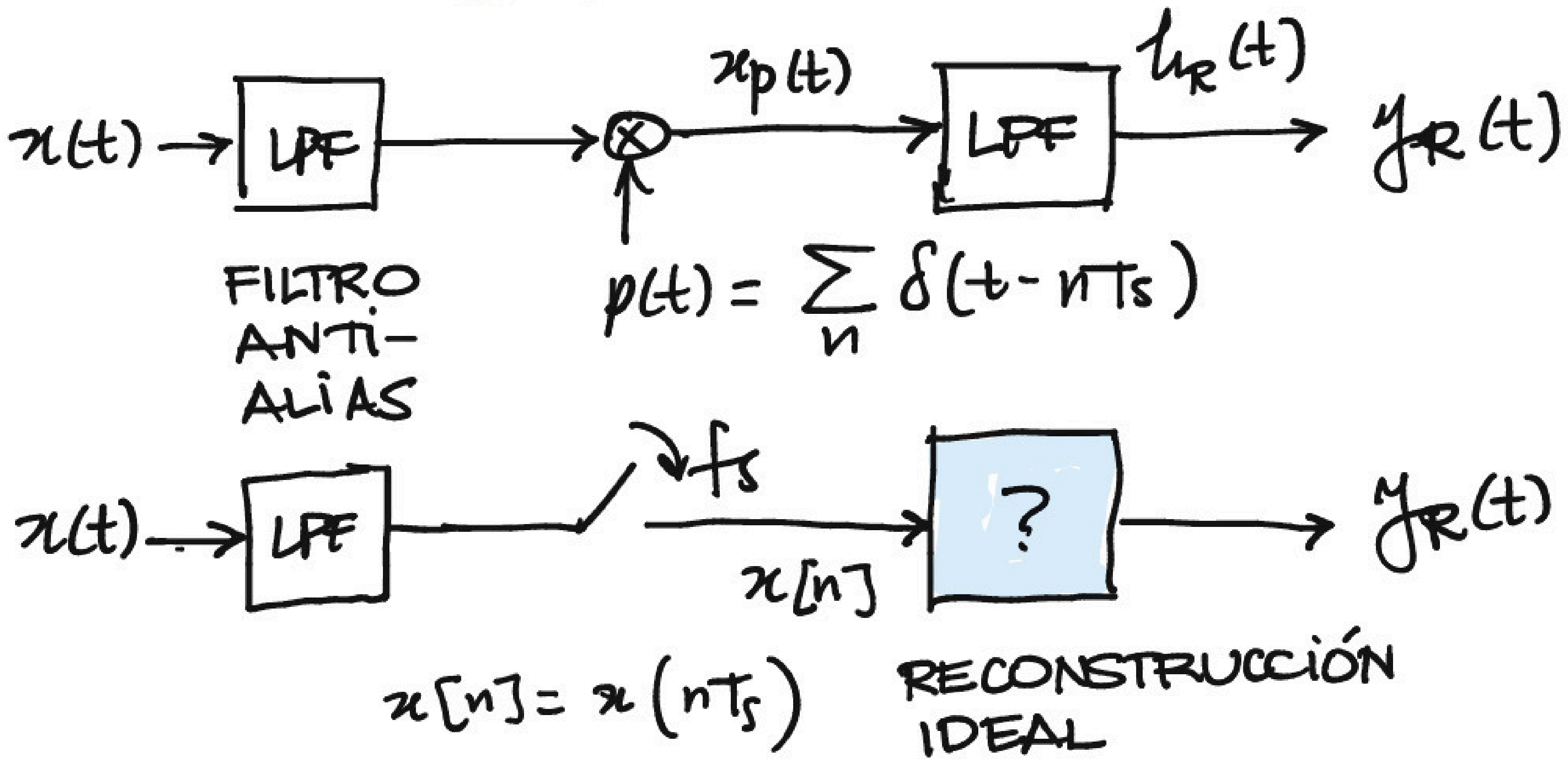
El ADC es un comparador con $2^q$ niveles de salida.

* Linealidad
* velocidad
* q

Hacen a la calidad y precio del ADC

# Reconstrucción de una señal a partir de sus muestras

# RECONSTRUCCIÓN DE UNA SEÑAL A PARTIR DE SUS MUESTRAS




Vimos en la demostración del TM que podemos recuperar la señal con un LPF ($\omega_c = 1/2\,\omega_s$, $G = T_s$)

$$x_p(t) = \sum_k x[k]\,\delta(t - kT_s)$$

$$y_R(t) = x_p(t) * h_R(t) \qquad h_R(t): \text{LPF}\left(\omega_c = \omega_s/2 = \pi/T_s,\ G = T_s\right)$$

$$H_R(j\omega) = T_s\,\Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$$

RECORDAR $\Pi(\omega/2W) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{W}{\pi}\,\text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$

$\text{sinc}\,\alpha = \dfrac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi}$ Y SE ANULA EN $\alpha \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow h_R(t) = \frac{\omega_c T_s}{\pi}\,\text{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

$$y_R(t) = x_p(t) * \text{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right)$$

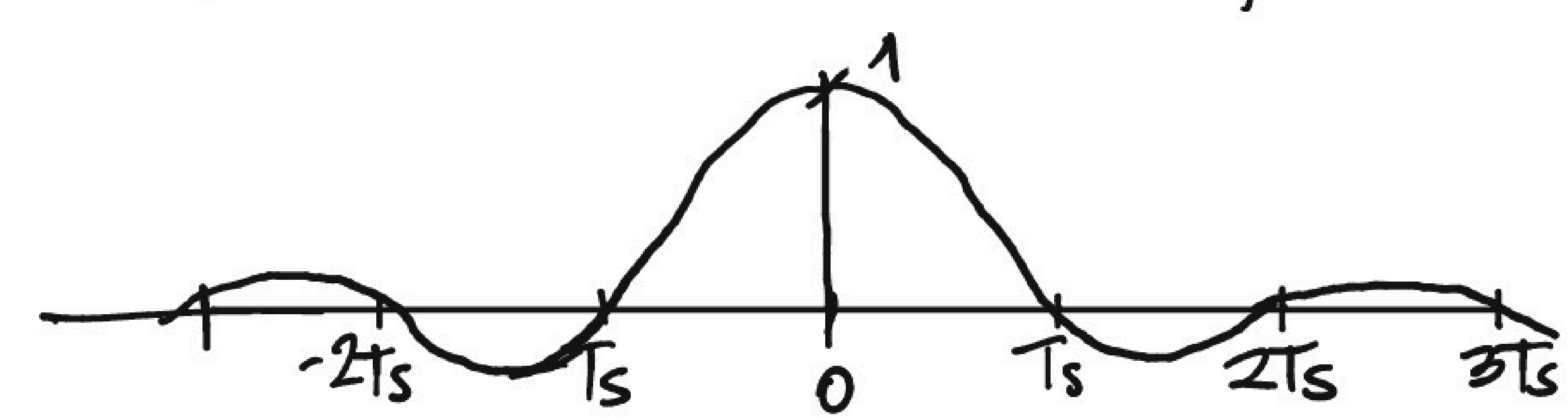
$$= \sum_k x[k]\,\delta(t - kT_s) * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

$$= \sum_k x[k]\,\text{sinc}\left(\frac{t - kT_s}{T_s}\right) = y_R(t)$$

FÓRMULA DE RECONSTRUCCIÓN IDEAL

Esta fórmula nos dice que para obtener $y_R(t)$ hacemos una INTERPOLACIÓN de las muestras $x[n]$ con una función sinc( ). Esta es una función de soporte no acotado, es <u>ideal</u>, $\nexists$.

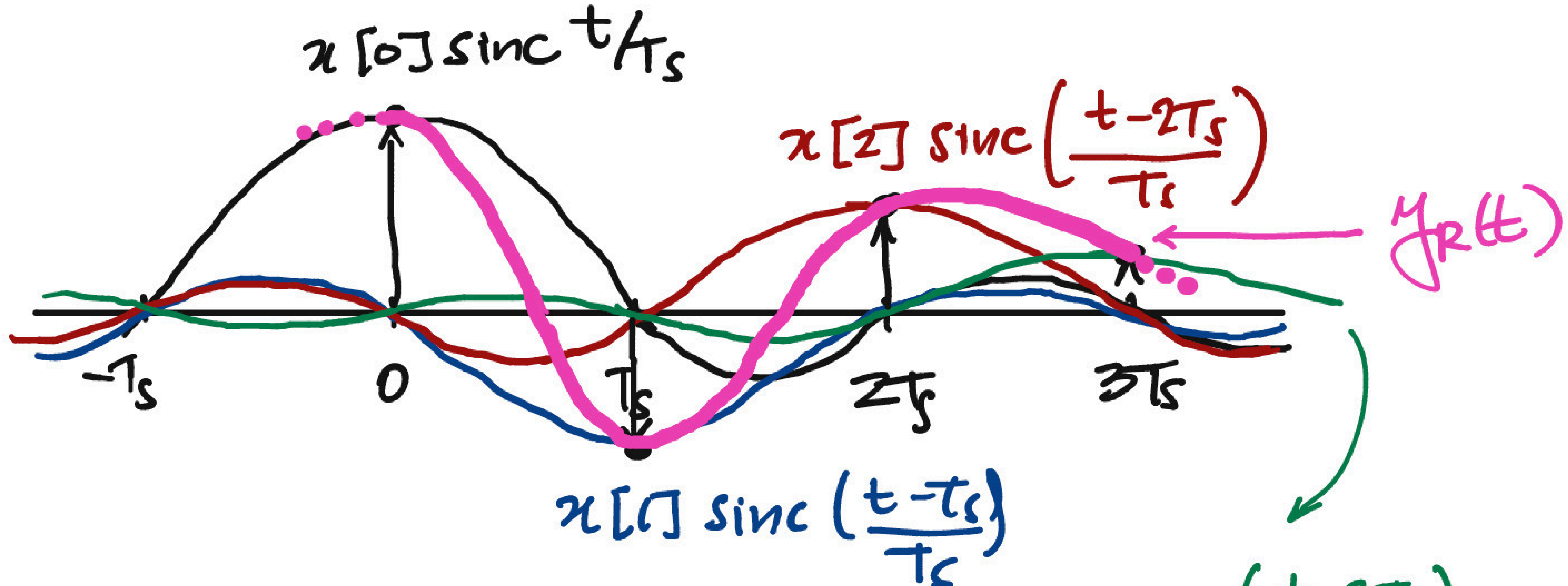
En la práctica se utilizan otras funciones.




sinc $\dfrac{t}{T_s}$ se anula en $\dfrac{t}{T_s} = \pm k$, $t = \pm kT_s$

# Reconstrucción (interpolación) ideal

VEAMOS CÓMO ES LA RECONSTRUCCIÓN




$y_R$ PASA POR $x[n]$

La interpolación con un LPF($\omega_s/2$) se conoce como INTERPOLACIÓN DE BANDA LIMITADA

En la práctica se usan otras funciones de soporte acotado con menor complejidad

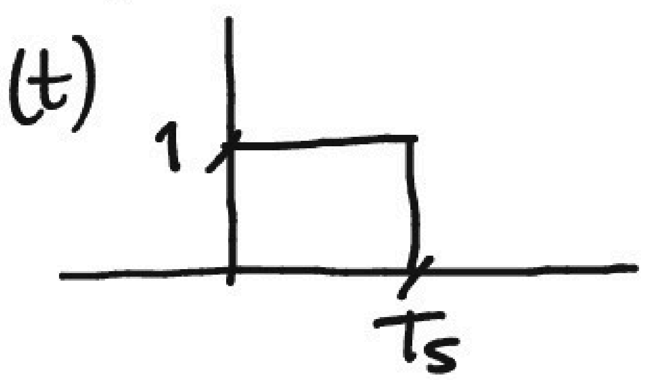
Se puede interpretar como el filtrado con filtros pasabajos reales, con una caída lenta, no ideal.

# Reconstrucción (interpolación) en la práctica

## ZERO-ORDER HOLD

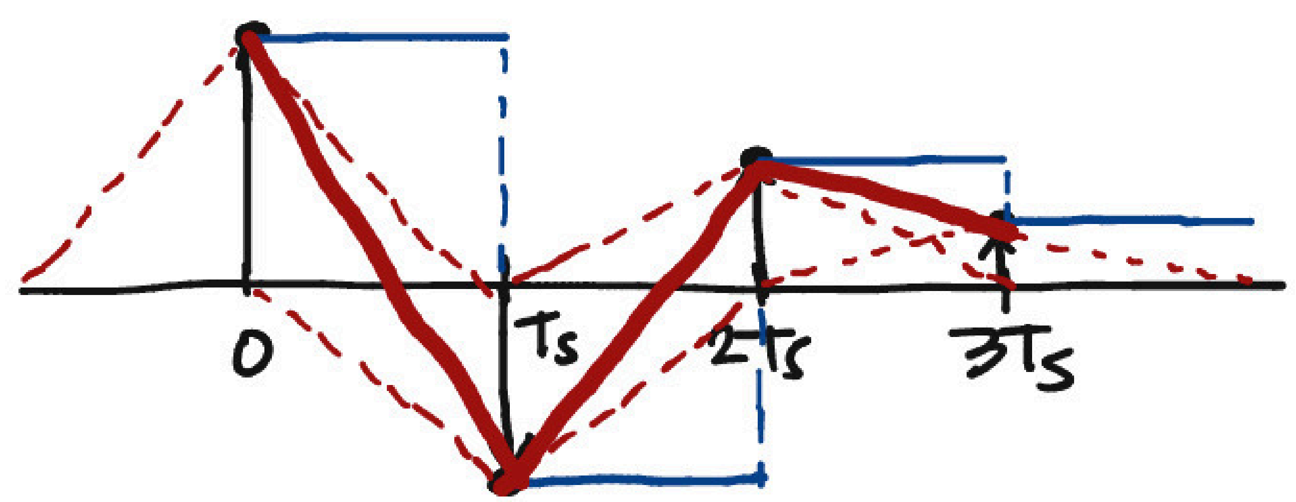
Interpolación simple usando un S&H

$h_0(t)$




$$H_0(j\omega) = e^{-j\frac{\omega T_s}{2}}\, T_s \,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T_s}{2\pi}\right)$$

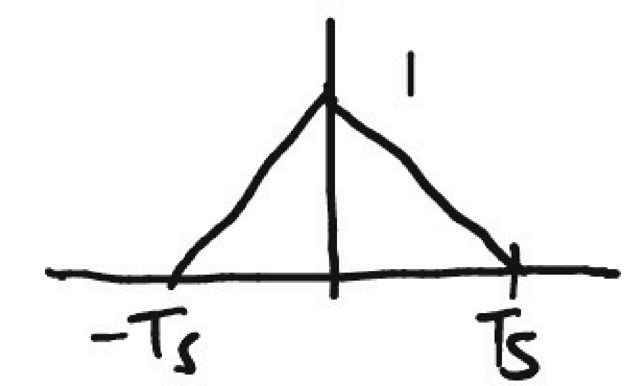
$$h_0(t) = \Pi\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right) \qquad \frac{\omega T_s}{2\pi} = \frac{\omega}{\omega_s}$$




## FIRST-ORDER HOLD

Es el interpolador lineal. Necesita memoria para conocer los valores vecinos.

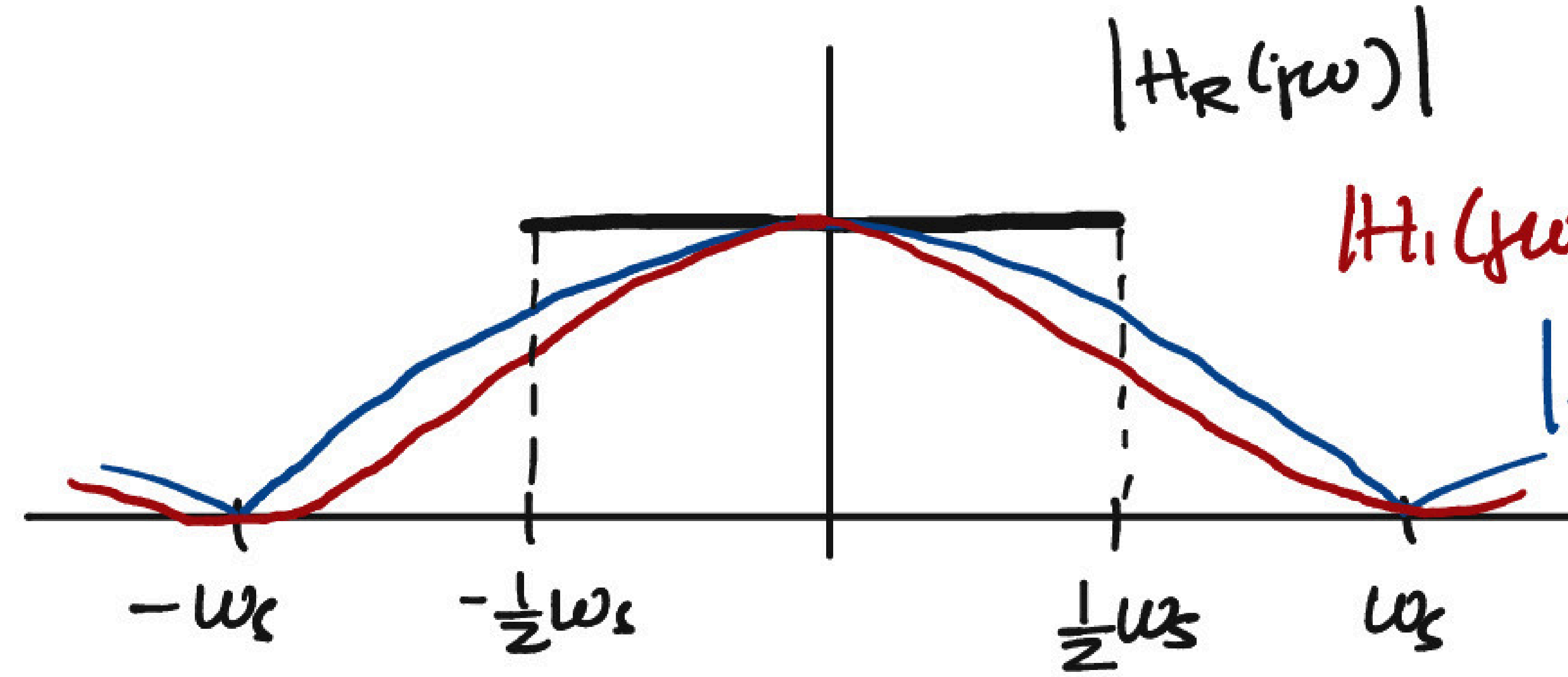
$h_1(t)$




$$h_1(t) = \Lambda\left(t/T_s\right)$$

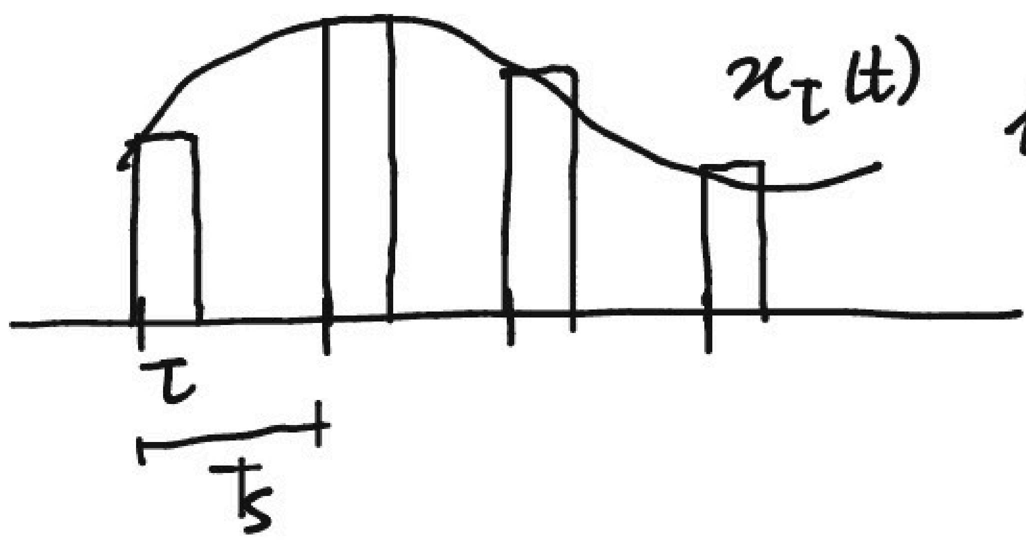
$$H_1(j\omega) = T_s \,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega T_s}{2\pi}\right) \qquad \frac{\omega T_s}{2\pi} = \omega/\omega_s$$

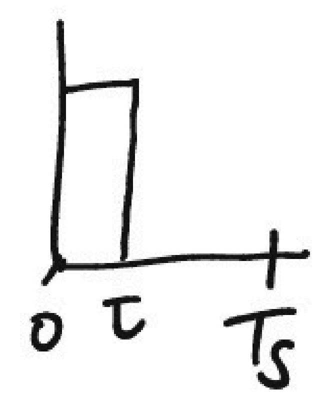
Comparando los filtros de interpolación en frecuencia



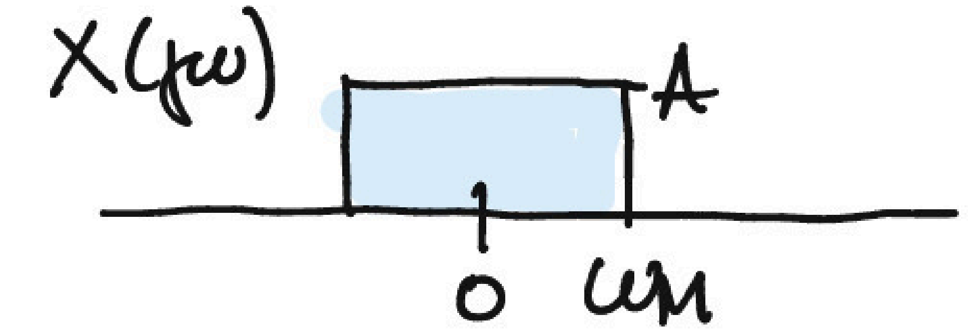
# Muestreo (real) en la práctica

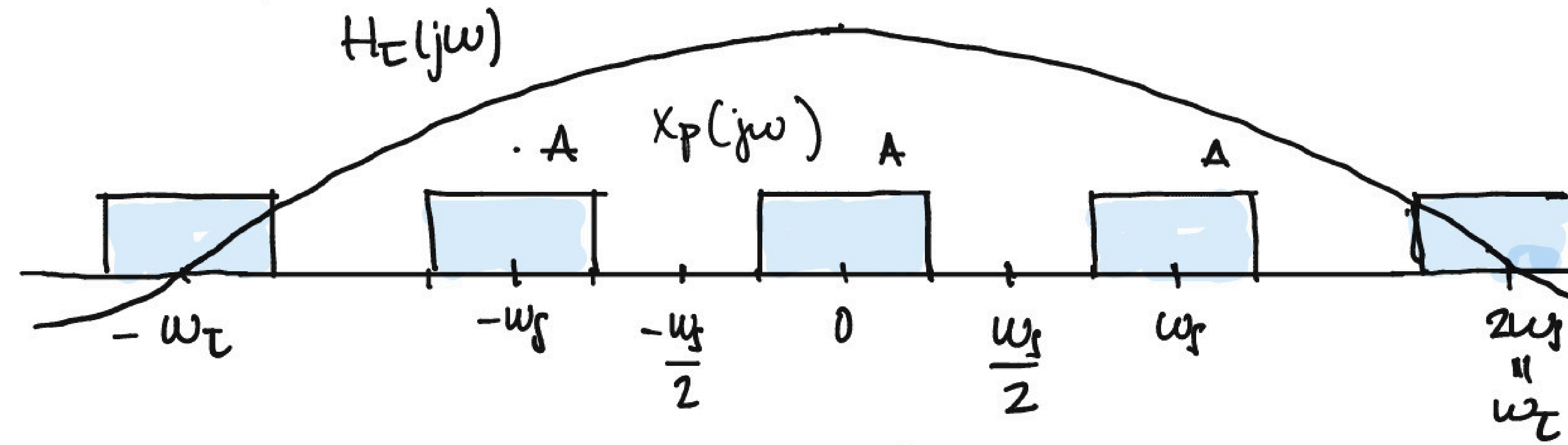
# MUESTREO CON S&H (FLAT TOP)



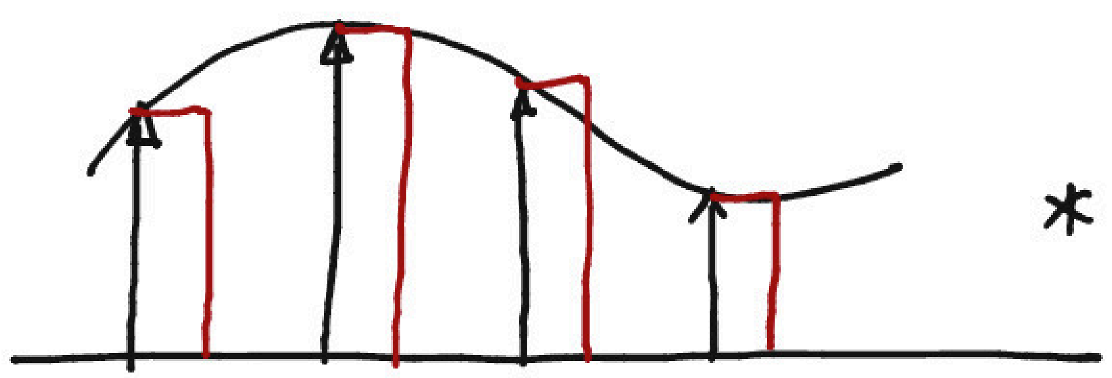




$$h_\tau(t) = \Pi\left(\frac{t-\tau/2}{\tau}\right)$$

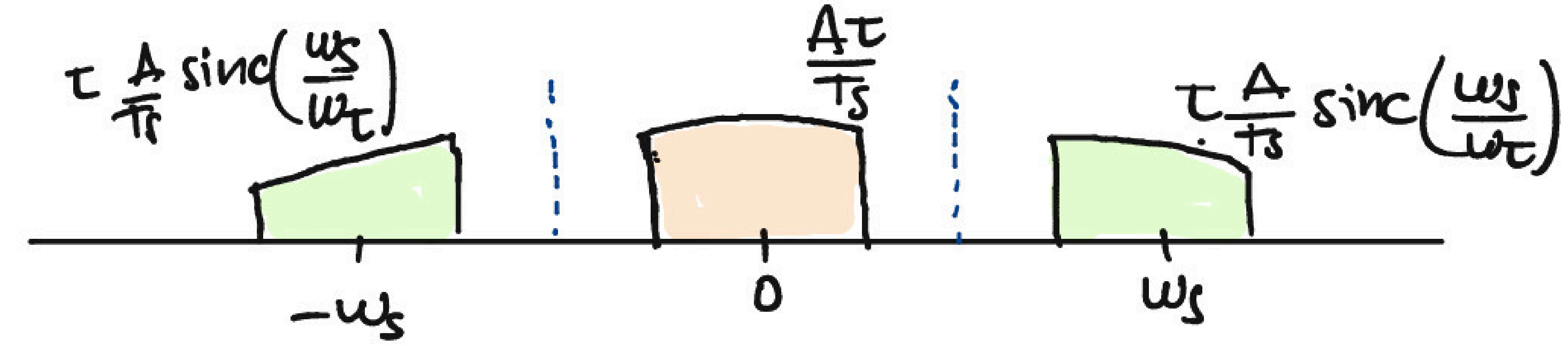



$$H_\tau(j\omega) = e^{-j\omega\tau/2}\,\tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$



$* \; h_\tau(t)$

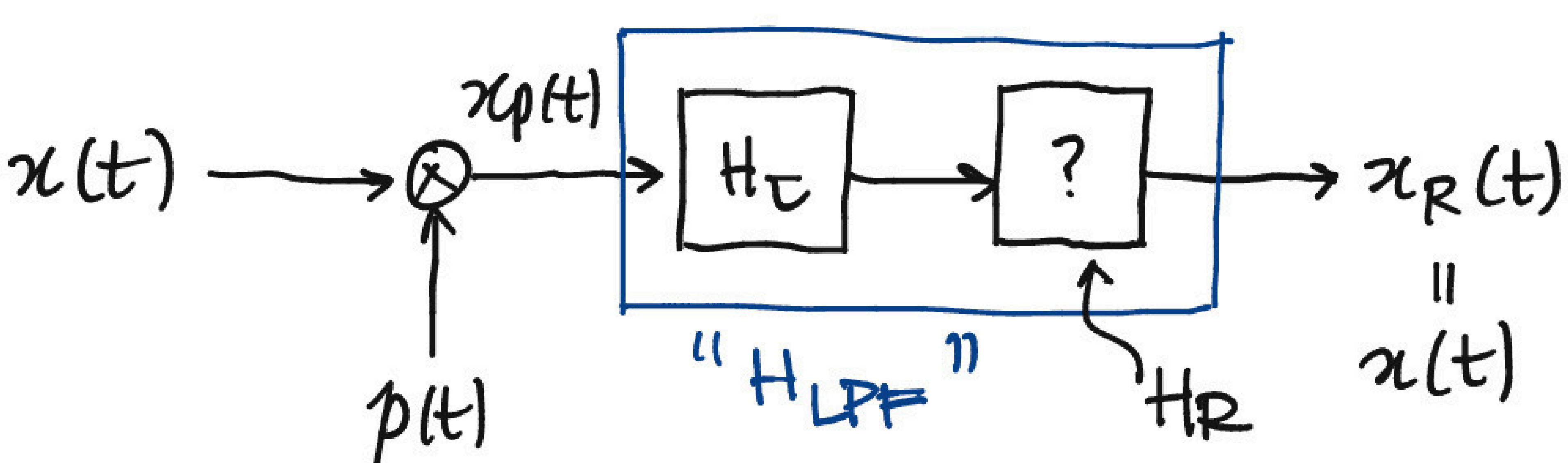



$$x_\tau(t) = x_p(t) * h_\tau(t)$$

$$X_\tau(j\omega) = X_p(j\omega)\cdot H_\tau(j\omega)$$

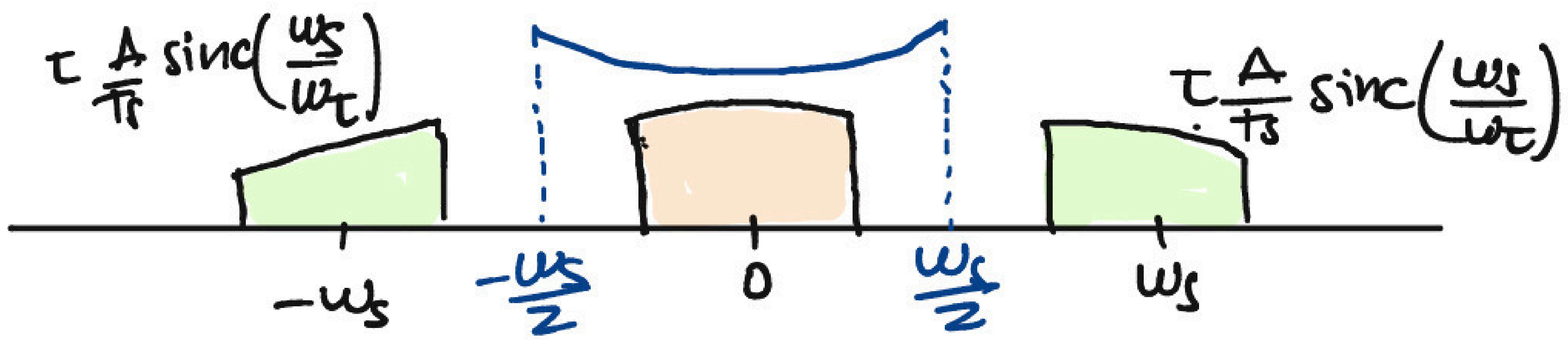
$$\tau < T_s \Rightarrow \frac{2\pi}{\tau} = \omega_\tau > \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

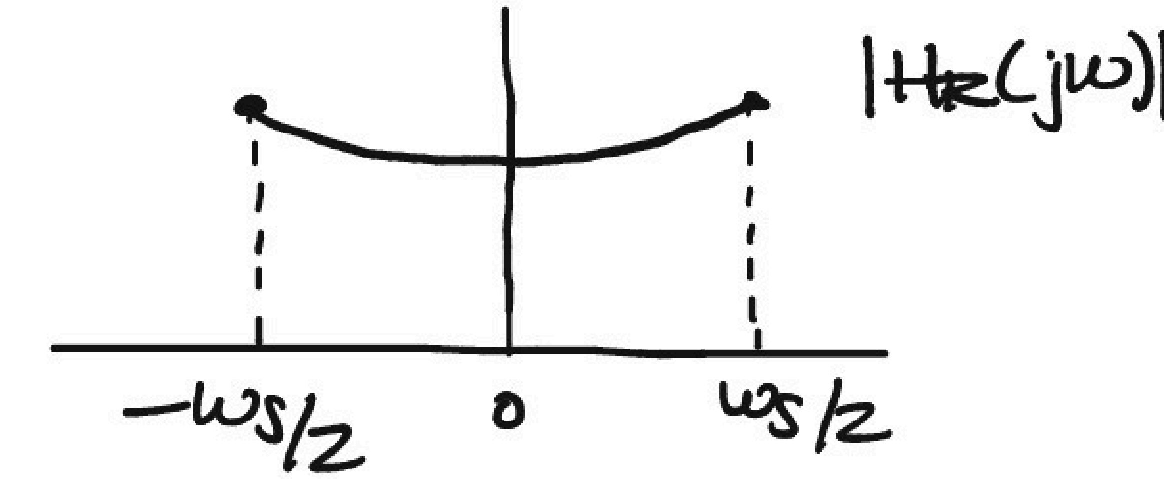
EN ESPECTRO ES DEFORMADO POR USAR UN PULSO $h_\tau$ COMO APROXIMACIÓN DE UNA $\delta$. ¿ESTÁ TODO PERDIDO?




$$H_{LPF}(j\omega) = H_\tau(j\omega)\,H_R(j\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)T_s$$

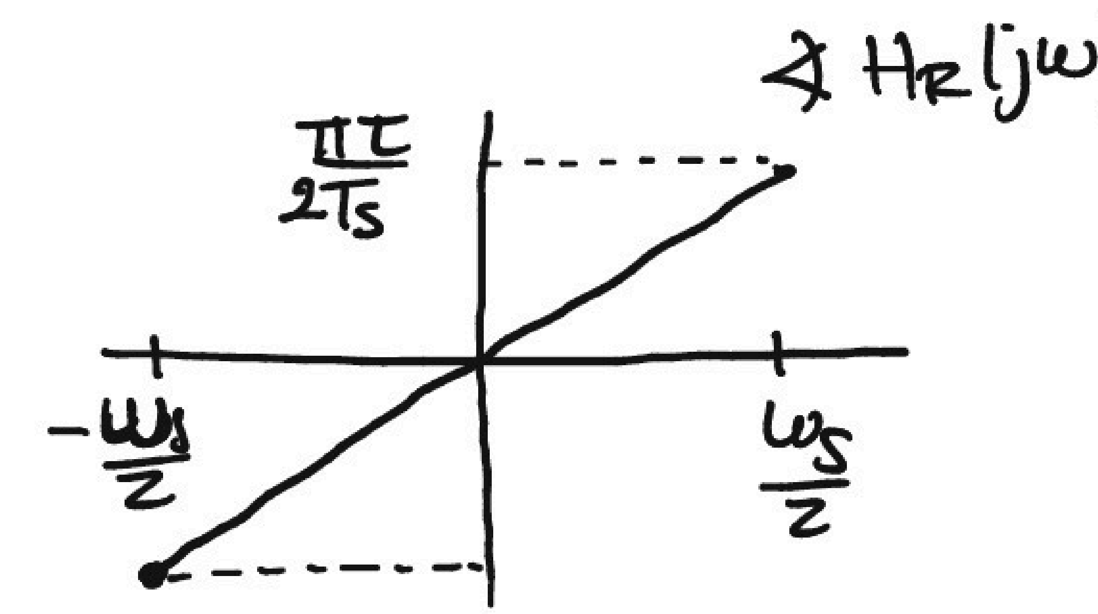
$$H_R(j\omega) = \frac{H_{LPF}(j\omega)\,e^{j\omega\tau/2}}{\tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)} = \frac{e^{j\omega\tau/2}}{\tau\,\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}} = \frac{\omega}{2}\,\frac{e^{j\omega\tau/2}}{\sin\frac{\omega\tau}{2}}$$




TIENE LA FORMA INVERSA EN LA BANDA DE INTERÉS. $\longrightarrow$ I. COMPENSA LA DISTORSIÓN DEL ESPECTRO

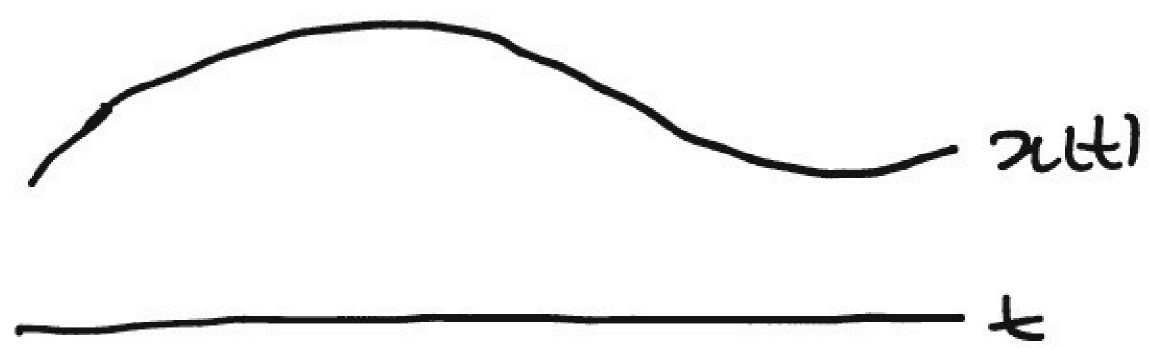
II. ELIMINA COMPONENTES $|\omega| > \omega_s/2$

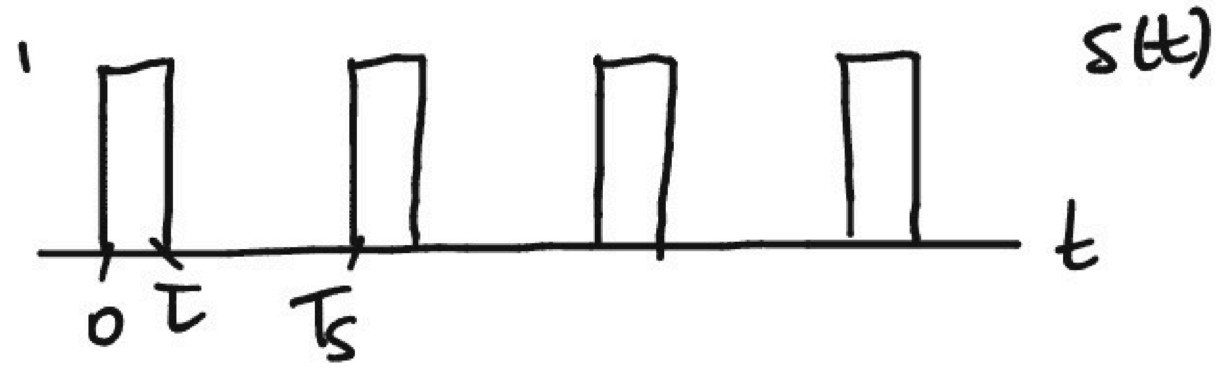



$$-\frac{1}{2}\frac{\omega_s}{2}\tau = -\frac{\pi\tau}{2T_s}$$

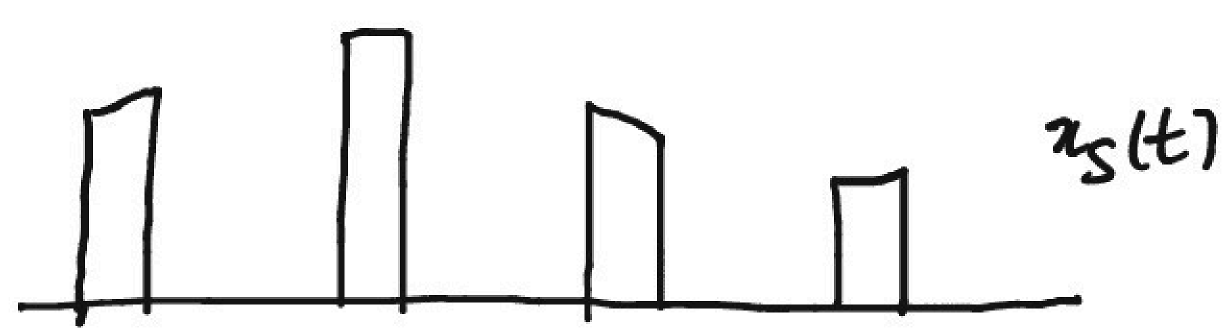
$$\Longrightarrow x_R(t) = x(t)$$

## MUESTREO "CHOPPEADO" (S&H)




$$s(t) = \sum_k \Pi\left(\frac{t - \tau/2 - kT_s}{\tau}\right)$$




$$x_s(t) = x(t)\, s(t)$$

$s(t)$ PERIÓDICA $\rightarrow$ SdeF

$$s(t) = a_0 + 2\sum_k a_k \cos n\omega_s t$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

VER EJEMPLO 3.5 DEL LIBRO

$$\frac{2\pi\tau}{2T_s} = \frac{\pi\tau}{T_s}$$

$$a_0 = \frac{\tau}{T_s}$$

$$a_k = \frac{1}{T_s}\int_0^{\tau} e^{-jk\omega_s t}\,dt = \frac{\tau}{T_s}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k\tau}{T_s}\right) e^{-j\pi\frac{\tau}{T_s}}$$

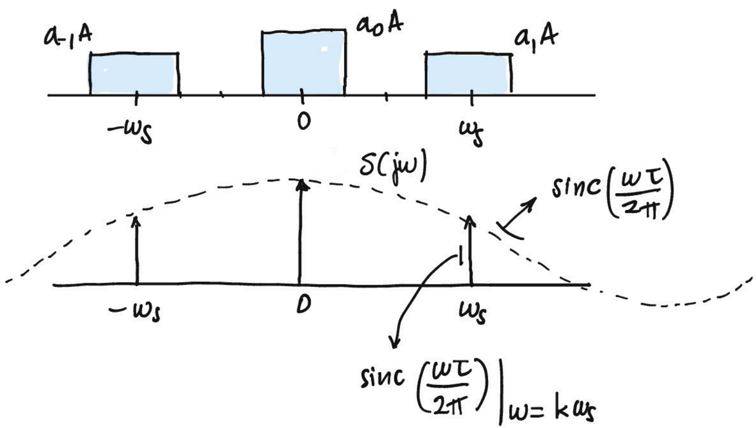
$$= -\frac{1}{jk\omega_s T_s}\left(e^{-jk\omega_s\tau} - 1\right)$$

$$= e^{-j\omega_s\tau/2}\,\frac{2}{k\omega_s T_s}\,\frac{e^{+jk\omega_s\tau/2} - e^{-jk\omega_s\tau/2}}{2j}$$

$$= e^{-j\omega_s\tau/2}\,\frac{2\sin k\omega_s\tau/2}{k\omega_s T_s} = e^{-j\omega_s\tau/2}\,\frac{\tau}{T_s}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k\omega_s\tau}{2\pi}\right)$$

$$S(j\omega) = \sum_k a_k\,\delta(\omega - k\omega_s)$$

$$X_S(j\omega) = X(j\omega) * S(j\omega)$$
$$= X(j\omega) * \sum_k a_k \delta(\omega - k\omega_s)$$




EN ESTE CASO PODEMOS RECUPERAR LA SEÑAL $x(t)$ CON UN FILTRO LPF, PUES NO HAY DISTORSIÓN DEL ESPECTRO, CON LA G ADECUADA.