FUNDAMENTOS DE LA WEB SEMANTICA – 2023

UNIDAD 6: Lógica Descriptiva

Edelweis Rohrer InCo- Fing - Universidad de la República

Parte I – Sintaxis y semántica

Sintaxis – Familia de lógicas, descripción de conceptos

Para representar los principales bloques de construcción de las diferentes lógicas descriptivas partimos de nombres de conceptos atómicos A, B, …., nombres de roles atómicos R, S, … y nombres de individuos a, b, … . A partir de ellos, se construyen descripciones de conceptos y axiomas. Cada lógica permite construir conceptos con diferente expresividad, y declarar diferentes tipos de axiomas. Como se puede ver en el siguiente cuadro, cada lógica se nombra con un conjunto de letras, que determinan su nivel de expresividad. Una de las lógicas más básicas es $\mathcal{ALC}$, y cada letra que se agrega a $\mathcal{ALC}$ provee más constructores para la representación de conocimiento. Por ejemplo, la lógica $\mathcal{ALCQ}$ agrega restricciones de cardinalidad a la capacidad de expresión de $\mathcal{ALC}$.

> $\mathcal{ALC}$**:** $\top, \bot, \sqcap, \sqcup, \exists, \forall, \neg$
>
> $\mathcal{S}$**:** $\mathcal{ALC}$ + roles transitivos Trans(*R*)
>
> A $\mathcal{S}$ se agregan constructores que se representan por diferentes letras:
>
> $\mathcal{H}$**:** inclusión de roles, $\mathcal{O}$**:** nominales $\{a\}$, $\mathcal{I}$**:** roles inversos,
>
> $\mathcal{N}$**:** restricciones numéricas, $\mathcal{Q}$**:** restrictions numéricas calificadas,
>
> $\mathcal{R}$: Dis(*R*, *S*) roles disjuntos, Irr(*R*) roles irreflexivos,
>
> Aserciones de negación de roles: ¬*likes*(*John*, *Mary*),
>
> Axiomas de inclusión de roles complejos: $R \circ S \sqsubseteq Q$, universal role *U*, ∃*R.Self*

La lógica $\mathcal{ALCQ}$ permite construir descripciones de conceptos de la forma:

$C, D := \bot \mid \top \mid A \mid \neg C \mid C \sqcap D \mid C \sqcup D \mid \forall R.C \mid \exists R.C \mid {>=}nR.C$ donde:

$\bot$ representa al concepto vacío y $\top$ representa todo el dominio.

¬*C* representa la negación de un concepto, es decir todos los elementos del dominio que no son instancias del concepto *C*.

C* ⊓ *D representa la conjunción de conceptos, es decir todos los elementos del dominio que son instancias de *C* y *D*.

C* ⊔ *D representa la disjunción de conceptos, es decir todos los elementos del dominio que son instancias de alguno de los conceptos *C* o *D*.

∀*R.C* representa una restricción universal, es decir todos los elementos del dominio que, en caso de estar vinculados a algún elemento a través del rol *R*, dicho elemento debe ser una instancia del concepto *C*. La restricción universal se cumple trivialmente, es decir, los elementos que no están vinculados a ningún elemento a través de *R* también son instancias de ∀*R.C.*

∃*R.C* representa una restricción existencial, es decir todos los elementos del dominio que están vinculados a algún elemento del concepto *C* a través del rol *R*.

>=*nR.C* representa una restricción de cardinalidad, es decir, todos los elementos del dominio que están vinculados con al menos *n* elementos del concepto *C* a través del rol *R*.

Las diferentes lógicas que se identifican por letras en el cuadro anterior determinan diferentes niveles de expresividad para describir conceptos, pero también para declarar axiomas acerca de conceptos, roles e individuos, los cuales se describen en la sección Base de conocimiento de este documento.

En particular, la letra $\mathcal{O}$ permite describir conceptos que contienen una única instancia, por ejemplo **{*Uruguay*}**.

El significado de cada uno de los constructores de conceptos y axiomas que se pueden declarar los encuentran también en **[1].**

Algunos ejemplos

A continuación, se presentan algunos ejemplos de descripciones de conceptos usando los constructores de la lógica $\mathcal{ALCQ}$, partiendo de los conceptos atómicos *Persona*, *Madre*, *Padre, Mujer* y del rol *tieneHijo*.

Conjunto de todos los elementos que **no** son personas: ¬***Persona***

Conjunto de todos los elementos que son padres o madres: ***Padre* ⊔ *Madre***

Conjunto de todos los elementos que, en caso de tener hijos, éstos son todos personas: **∀*tieneHijo.Persona***

Tener en cuenta que los elementos que NO tienen hijos también pertenecn a este conjunto.

Conjunto de todos los elementos que tienen por lo menos dos hijos: >=***2tieneHijo.Persona:***

Conjunto de todos los elementos que son personas y tienen como máximo tres hijos:

***Persona* ⊓ <=3*tieneHijo.*⊤**

Conjunto de todos los elementos que son personas y no tienen ningún hijo que sea una persona: ***Persona* ⊓ ¬∃ *tieneHijo.Persona***

Para pensar: ¿existe otra forma de expresarlo?

Conjunto de todos los elementos que son padres o son mujeres que no tienen hijas mujeres:

***Padre* ⊔ (*Mujer* ⊓ ¬∃*tieneHijo.Mujer*)**

Base de conocimiento

Una base de conocimiento consta de dos grupos de axiomas principales: *Tbox* y *Abox.*

Los **axiomas de *Tbox*** describen conocimiento intensional de un dominio y son de la forma:

C* ⊑ *D, siendo *C* y *D* descripciones de conceptos, que pueden ser atómicos. Estos axiomas expresan que el conjunto de elementos que satisfacen concepto *C* es un subconjunto del conjunto de elementos que satisfacen el concepto *D*.

Los **axiomas de *Abox*** describen conocimiento extensional de un dominio y son de la forma:

C*(*a*) *R*(*a, b*) *a* = *b* *a* ≠ *b, siendo *C* y *D* descripciones de conceptos, *R* un rol atómico, y *a*, *b*, individuos. Estos axiomas expresan que el individuo *a* es una instancia del concepto *C*, los individuos

a y b están en la relación R, los individuos a y b representan el mismo elemento del dominio, y los individuos a y b representan diferentes elementos del dominio.

Consideremos la base de conocimiento $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$ con Tbox $\mathcal{T}$ y Abox $\mathcal{A}$, que se describe a continuación.

$\mathcal{T}$ = {*Mujer* ⊑ *Persona*, *Persona* ≡ *Mujer* ⊔ *Hombre*, *Madre* ≡ *Mujer* ⊓ ∃*tieneHijo.Persona*,

Padre ≡ *Hombre* ⊓ ∃*tieneHijo.Persona*}

Donde ***C* ≡ *D* → *C* ⊑ *D* y *D* ⊑ *C***

$\mathcal{A}$ = {*Mujer*(*maria*), *tieneHijo*(*maria*, *diego*)}

Si queremos agregar a $\mathcal{K}$ un axioma que exprese:

"Una abuela es una madre que tiene al menos un hijo que es padre ó madre."

Se agrega el siguiente axioma a $\mathcal{T}$:

***Abuela* ≡ *Madre* ⊓ ∃*tieneHijo*.(*Padre* ⊔ *Madre*)**

Para ejercitar, agregar axiomas que expresen:

"Todas las madres son personas que tienen al menos un hijo."

"Todas las mujeres que no tienen hijos no son hombres."

Volviendo al conjunto completo de lógicas, repetimos aquí el cuadro que las resume:

$\mathcal{ALC}$**:** ⊤, ⊥, ⊓, ⊔, ∃, ∀, ¬

$\mathcal{S}$**:** $\mathcal{ALC}$ + roles transitivos Trans(*R*)

A $\mathcal{S}$ se agregan constructores que se representan por diferentes letras:

$\mathcal{H}$**:** inclusión de roles, $\mathcal{O}$**:** nominales $\{a\}$, $\mathcal{I}$**:** roles inversos,

$\mathcal{N}$**:** restricciones numéricas, $\mathcal{Q}$**:** restrictions numéricas calificadas,

$\mathcal{R}$: Dis(*R*, *S*) roles disjuntos, Irr(*R*) roles irreflexivos

Aserciones de negación de roles: ¬*likes*(*John*, *Mary*),

Axiomas de inclusión de roles complejos: $R \circ S \sqsubseteq Q$, universal role U, ∃*R.Self*

Algunas letras como $\mathcal{S}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{R}$, permiten expresar afirmaciones acerca de roles (recordemos que los axiomas de Tbox permiten expresar conocimiento acerca de conceptos). Para entender el significado de estos constructores, a continuación se presentan algunos ejemplos.

$\mathcal{S}$: *Trans*(*tieneDescendiente*)

$\mathcal{H}$: *tieneHijo* ⊑ *tieneDescendiente*

$\mathcal{I}$: *hijo* = *padre*$^{-}$

$\mathcal{R}$: *Dis*(*esAmigoDe*, *esEnemigoDe*) *Irr*(*tieneHijo*) *esHermano* ∘ *esPadre* ⊑ *esTio*

Obsérvese que *Trans*(*R*) → $R \circ R \sqsubseteq R$

Los **axiomas de Rbox** describen conocimiento intensional acerca de roles, es decir, permiten realizar afirmaciones sobre el conjunto de pares de elementos del dominio. Corresponden a los constructores anteriormente mencionados, y corresponden a lógicas con alto nivel de expresividad.

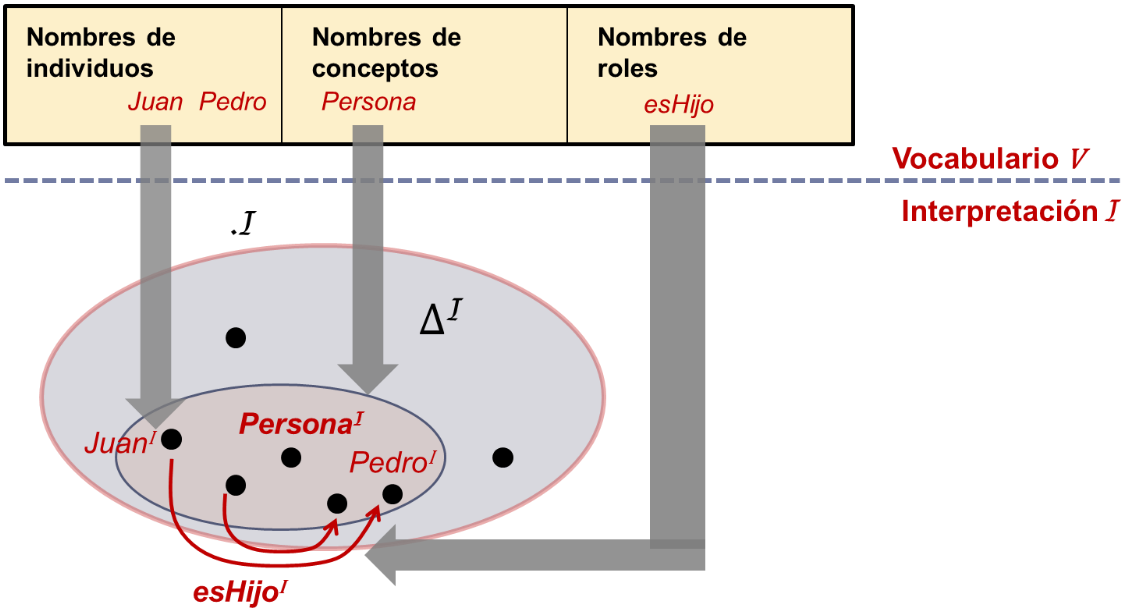
Semántica – interpretaciones

La semántica de una base de conocimiento se define formalmente a través del concepto de *interpretación*.

Una interpretación $\mathrm{I} = (\Delta^{\mathrm{I}}, \cdot^{\mathrm{I}})$ se compone de:

- Un conjunto de elementos no vacío Δ^{I}, llamado *dominio de interpretación*,
- Una *función de interpretación* $\cdot^{\mathrm{I}}$ que asocia:
    - A cada **concepto *A*** un conjunto $A^{\mathrm{I}} \subseteq \Delta^{\mathrm{I}}$
    - A cada **rol *R*** una relación binaria $R^{\mathrm{I}} \subseteq \Delta^{\mathrm{I}} \times \Delta^{\mathrm{I}}$
    - A cada **individuo *a*** un elemento $a^{\mathrm{I}} \in \Delta^{\mathrm{I}}$

La siguiente figura ilustra la definición de interpretación.



A partir de la definición de interpretación, la interpretación de los conceptos y axiomas de lógica descriptiva se define inductivamente. La tabla siguiente muestra la definición de la semántica para la lógica $\mathcal{ALCQ}$, donde $\perp$ es el concepto vacío, $\top$ es todo el dominio, *C* y *D* son conceptos (atómicos o descripciones de conceptos), *R* es un rol atómico, y *x*, *y* son elementos del dominio.

Constructor	DL	Semántica
bottom	$\bot$	$\emptyset$
top	$\top$	$\Delta^{\mathcal{I}}$
negación	$\neg C$	$\Delta^{\mathcal{I}} \backslash C^{\mathcal{I}}$
conjunción	$C \sqcap D$	$C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}}$
disjunción	$C \sqcup D$	$C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}$
restricción existencial	$\exists R.C$	$\{x \mid \exists y.(x,y) \in R^{\mathcal{I}} \wedge y \in C^{\mathcal{I}}\}$
restricción universal	$\forall R.C$	$\{x \mid \forall y.(x,y) \in R^{\mathcal{I}} \rightarrow y \in C^{\mathcal{I}}\}$
restricción de cardinalidad	$>=nR.C$	$\{x \mid \#\{y.(x,y) \in R^{\mathcal{I}} \wedge y \in C^{\mathcal{I}}\} >= n\}$

A continuación, se presentan algunos ejemplos de interpretación de los conceptos atómicos *Persona*, *Madre*, *Padre*, del rol *tieneHijo* y de las descripciones de conceptos *Padre* ⊔ *Madre* y ∃*tieneHijo.Persona*.

<u>Ejemplo 1:</u>

$\mathrm{I} = (\Delta^{\mathrm{I}}, \cdot^{\mathrm{I}})$

$\Delta^{\mathrm{I}} = \{a, b, c, d, e\}$

$Persona^{\mathrm{I}} = \{a, b, c, d\}$

$Madre^{\mathrm{I}} = \{a\}$

$Padre^{\mathrm{I}} = \{b\}$

$tieneHijo^{\mathrm{I}} = \{<a, d>, <b, d>, <c, a>, <a, e>, <d, e>\}$

$(Padre \sqcup Madre)^{\mathrm{I}} = \{a, b\}$

$(\exists tieneHijo.Persona)^{\mathrm{I}} = \{a, b, c\}$

<u>Ejemplo 2:</u>

$\mathrm{I} = (\Delta^{\mathrm{I}}, \cdot^{\mathrm{I}})$

Δ^{I} = {*María, Juan, Pedro, Ana, José*}

$Persona^{\mathrm{I}}$ = {*María, Juan, Pedro, Ana*}

$Madre^{\mathrm{I}}$ = {*María*}

$Padre^{\mathrm{I}}$ = {*Juan, Pedro*}

$tieneHijo^{\mathrm{I}}$ = {<*María, Ana*>, <*Juan, Ana*>}

$(Padre \sqcup Madre)^{\mathrm{I}}$ = {*María, Juan, Pedro*}

$(\exists tieneHijo.Persona)^{\mathrm{I}}$ = {*María, Juan*}

<u>Ejemplo 3:</u>

$\mathrm{I} = (\Delta^{\mathrm{I}}, \cdot^{\mathrm{I}})$

Δ^{I} = {*María, Juan, Pedro, Ana, José*}

$Persona^{\mathrm{I}}$ = {*María, Juan, Pedro, Ana*}

$Madre^{I}$ = {*María, José*}

$Padre^{I}$ = {*Juan, Pedro*}

$tieneHijo^{I}$ = {<*María*, *Ana*>, <*Juan*, *Ana*>, <*Ana*, *José*>, <*Pedro*, *José*>}

$(Padre \sqcup Madre)^{I}$ = {*María, José, Juan, Pedro*}

$(\exists tieneHijo.Persona)^{I}$ = {*María, Juan*}

Obsérvese que *Ana* y *Pedro* no forman parte de la interpretación de ∃*tieneHijo.Persona* porque *José* no es un elemento de $Persona^{I}$.

Una interpretación $I = (\Delta^{I}, \cdot^{I})$ **satisface el axioma TBox** $C \sqsubseteq D$ si $C^{I} \subseteq D^{I}$, y se denota $I \models C \sqsubseteq D$

Una interpretación I **satisface el axioma ABox** $C(a)$ si $a^{I} \in C^{I}$, y se denota $I \models C(a)$

Una interpretación I **satisface el axioma ABox** $R(a, b)$ si $\langle a^{I}, b^{I}\rangle \in R^{I}$, y se denota $I \models R(a, b)$

Una interpretación I **satisface el axioma ABox** $a = b$ si $a^{I} = b^{I}$, y se denota $I \models a = b$

Una interpretación I **satisface el axioma ABox** $a \neq b$ si $a^{I} \neq b^{I}$, y se denota $I \models a \neq b$

A partir de las definiciones anteriores definimos el concepto de *modelo de una base de conocimiento*.

Sea $I = (\Delta^{I}, \cdot^{I})$ **una interpretación** y $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$ una base de conocimiento,

I **es un modelo de** $\mathcal{K}$ si:

- $C^{I} \subseteq D^{I}$ para todo $C \sqsubseteq D$ en $\mathcal{T}$
- $a^{I} \in C^{I}$ para todo $C(a)$ en $\mathcal{A}$
- $\langle a^{I}, b^{I}\rangle \in R^{I}$ para todo $R(a, b)$ en $\mathcal{A}$
- $a^{I} = b^{I}$ para todo $a = b$ en $\mathcal{A}$
- $a^{I} \neq b^{I}$ para todo $a \neq b$ en $\mathcal{A}$

Decimos que una **base de conocimiento** $\mathcal{K}$ **es consistente si existe un modelo** I **de** $\mathcal{K}$.

A continuación, se muestran dos ejemplos de interpretación de la base de conocimiento $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$:

$\mathcal{T}$ = {*Madre* ⊑ *Persona*, *Padre* ⊑ *Persona*, *Padre* ⊓ *Madre* ⊑ ⊥}

$\mathcal{A}$ = {*Persona(maría)*, *Persona(juana)*, *Persona(pedro)*, *Madre(maría)*, *Padre(pedro)*}

Ejemplo 1:

$I = (\Delta^{I}, \cdot^{I})$

$\Delta^{I} = \{a, b, c\}$

$Persona^{I} = \{a, b, c\}$

$Madre^{I} = \{a\}$

$Padre^{I} = \{b\}$

$maria^{I} = a$

juana $^{\mathrm{I}}$ = *c*

pedro $^{\mathrm{I}}$ = *b*

Esta interpretación satisface todos los axiomas de $\mathcal{K}$ puesto que para los axiomas de Tbox:

$\{a\} \subseteq \{a, b, c\}$, $\{b\} \subseteq \{a, b, c\}$, $\{a\} \sqcap \{b\} \sqsubseteq \bot$

También se cumple para los axiomas de Abox.

Por lo tanto, I es un modelo de $\mathcal{K}$, por lo que $\mathcal{K}$ es consistente.

Ejemplo 2:

$\mathrm{I} = (\Delta^{\mathrm{I}}, \cdot^{\mathrm{I}})$

$\Delta^{\mathrm{I}} = \{a, b, c\}$

Persona$^{\mathrm{I}}$ = $\{a, b\}$

Madre$^{\mathrm{I}}$ = $\{a\}$

Padre$^{\mathrm{I}}$ = $\{a\}$

maria $^{\mathrm{I}}$ = *a*

juana $^{\mathrm{I}}$ = *b*

pedro $^{\mathrm{I}}$ = *a*

Esta interpretación no satisface todos los axiomas de $\mathcal{K}$ puesto que:

$\{a\} \subseteq \{a, b\}$, $\{a\} \subseteq \{a, b\}$, pero $\{a\} \sqcap \{a\} \sqsubseteq \bot$ no es verdadero.

Por lo tanto, I no es un modelo de $\mathcal{K}$, pero $\mathcal{K}$ es consistente porque existen interpretaciones que son modelos de $\mathcal{K}$, como la del ejemplo anterior.

Consideremos la siguiente base de conocimiento $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$.

$\mathcal{T}$= {*Madre* ⊑ *Persona*, *Padre* ⊑ *Persona*, *Padre* ⊓ *Madre* ⊑ ⊥}

$\mathcal{A}$ = {*Persona(maría*), *Persona*(*juana*), *Persona*(*pedro*), *Madre*(*maria*), *Padre*(*maria*)}

Obsérvese que cualquiera sea la interpretación I de $\mathcal{K}$, nunca va a satisfacer el axioma de Tbox *Padre* ⊓ *Madre* ⊑ ⊥, dado que por los axiomas de Abox *Madre*(*maria*), *Padre*(*maria*), las interpretaciones de *Madre* y *Padre* deben tener al menos un elemento de Δ^{I} en común, que es *maria*$^{\mathrm{I}}$. Por lo tanto, $\mathcal{K}$ es inconsistente ya que no existe ninguna interpretación que sea un modelo de $\mathcal{K}$.

Mundo abierto y mundo cerrado

La semántica de lógica descriptiva adhiere al paradigma de *mundo abierto*. Básicamente, este paradigma se basa en que **no se puede derivar que una afirmación es falsa, porque no pueda demostrarse que es verdadera**.

Consideremos la siguiente base de conocimiento $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$.

$\mathcal{T}$= {*Madre* ⊑ *Persona*, *Madre* ⊑ ∃*tieneHijo*.*Persona*}

$\mathcal{A}$ = {*Persona(maría*), *Persona*(*juana*), *Madre*(*maria*)}

En este ejemplo se observa que:

- el concepto *Madre* tiene como instancia al individuo *maría*,

- el axioma *Madre* $\sqsubseteq$ $\exists$*tieneHijo*.*Persona* expresa que toda madre debe tener al menos un hijo que sea una persona

- no existe ningún axioma de Abox que vincule al individuo *maría* con otro individuo a través del rol *tieneHijo*.

Sin embargo, de acuerdo al paradigma de mundo abierto, no se puede afirmar que María no tiene hijos, por el solo hecho de no estar declarado en la base de conocimiento. El paradigma de mundo abierto asume que $\mathcal{K}$ puede estar incompleta. Sin embargo, hay que diferenciar esta situación del escenario de una base de conocimiento inconsistente, como se muestra en el último ejemplo de la sección anterior, en el que existe una contradicción, ya que una individuo no puede pertenecer a dos conjuntos disjuntos.

Un posible modelo de $\mathcal{K}$ es la siguiente interpretación:

$\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$

$\Delta^{\mathcal{I}} = \{a, b, c\}$

$Persona^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$

$Madre^{\mathcal{I}} = \{a\}$

$tieneHijo^{\mathcal{I}} = \{<a, c>\}$

$maria^{\mathcal{I}} = a$

$juana^{\mathcal{I}} = b$

Como puede observarse, el elemento del dominio *c* no está asociado a ningún individuo de $\mathcal{K}$, pero forma parte de la interpretación del rol *tieneHijo*.

El paradigma de mundo abierto es coherente con el hecho de que la información en la Web está incompleta. Recordemos que lógica descriptiva es el formalismo en el que se basa el lenguaje de ontologías OWL, que tiene como uno de sus principales cometidos enriquecer la web aportando significado a los recursos que se encuentran publicados. Por el contrario, las bases de datos relacionales, utilizadas en contextos más controlados como las aplicaciones de negocio de las organizaciones, siguen el paradigma de *mundo cerrado.* A diferencia del paradigma de mundo abiero, el paradigma de mundo cerrado asume que la ausencia de información implica que la misma no existe, es decir que la ausencia de verdad sí implica falsedad en este contexto.

Referencia:

[1] Description Logics Handbook: Theory, Implementation, and Applications. Editores Franz Baader, Diego Calvanese,Deborah L. McGuinness,Daniele Nardi y Peter F. Patel-Schneider. 2003.

Capítulos 1 y 2.