

Solución del ejercicio 1 del parcial 2020

1) Modelo del actuador

1.a) Es razonable suponer que el motor (acoplado a la válvula de entrada) se puede modelar como un sistema lineal e invariante en el tiempo de primer orden sin ceros:

$\frac{\omega}{v}(s) = \frac{G_A}{T_A s + 1}$, donde $\omega = \dot{\phi}$ es la velocidad angular del eje del motor. En tal caso, la respuesta ante un escalón $v(t) = 3 \text{ V} \cdot Y(t)$ es:

$$\omega(t) = G_A \left(1 - e^{-\frac{t}{T_A}} \right) \cdot 3 \text{ V} \cdot Y(t).$$

A partir de la respuesta graficada en la Figura 2

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t) = 3 \text{ V} \cdot G_A \approx 6 \text{ rad/s} \\ \omega(0,376 \text{ s}) = 3 \text{ V} \cdot G_A \left(1 - e^{-\frac{0,376 \text{ s}}{T_A}} \right) \approx 2,25 \text{ rad/s} \end{cases}$$

de donde $\begin{cases} G_A \approx 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1} \\ T_A \approx 0,8 \text{ s} \end{cases}$.

Verificación de la suposición con otros puntos de la respuesta:

$$\omega(1,60 \text{ s}) = 3G_A \left(1 - e^{-\frac{1,60 \text{ s}}{T_A}} \right) \approx 5,19 \text{ rad/s} \text{ y } \omega(3,36 \text{ s}) = 3G_A \left(1 - e^{-\frac{3,36 \text{ s}}{T_A}} \right) \approx 5,91 \text{ rad/s}.$$

Entonces, como $\omega(s) = s\phi(s)$, la transferencia identificada para el actuador es:

$$A(s) = \frac{\phi}{v}(s) = \frac{G_A}{s(T_A s + 1)}.$$

2) Modelo del sistema hidráulico

2.a) Balance volumétrico: $\dot{V} = q_I - q_O$ (1).

Volumen del cono de líquido: $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ (2).

Trigonometría: $\tan \alpha = \frac{r}{h}$ (3).

Caudal de entrada: $q_I = b\phi$ (4).

Caudal de salida: $q_O = c\sqrt{h}$ (5).

De (2) y (3): $V = \frac{\pi (h \tan \alpha)^2 h}{3} = \frac{\pi \tan^2 \alpha}{3} h^3$. Derivando: $\dot{V} = \pi \tan^2 \alpha h^2 \dot{h}$ (6).

Sustituyendo (4), (5) y (6) en (1): $\pi \tan^2 \alpha h^2 \dot{h} = b\phi - c\sqrt{h}$, de donde:

$$\dot{h} = \left(\frac{1}{\pi \tan^2 \alpha} \right) \frac{b\phi - c\sqrt{h}}{h^2}.$$

2.b) Si $\phi = \Phi$ (constante), en equilibrio: $0 = \left(\frac{1}{\pi \tan^2 \alpha} \right) \frac{b\phi - c\sqrt{H}}{H^2} \Rightarrow H = \left(\frac{b\phi}{c} \right)^2$.

Sean $\tilde{h} = h - H$ y $\tilde{\phi} = \phi - \Phi$. Modelo linealizado:

$$\dot{\tilde{h}} = \left(\frac{1}{\pi \tan^2 \alpha} \right) \left(\left(\frac{3c}{2H^2} - \frac{2b\Phi}{H^3} \right) \tilde{h} + \frac{b}{H^2} \tilde{\varphi} \right) = \left(\frac{1}{\pi \tan^2 \alpha} \right) \left(-\frac{1}{2} \frac{c^6}{(b\Phi)^5} \tilde{h} + \frac{c^4 b}{(b\Phi)^4} \tilde{\varphi} \right)$$

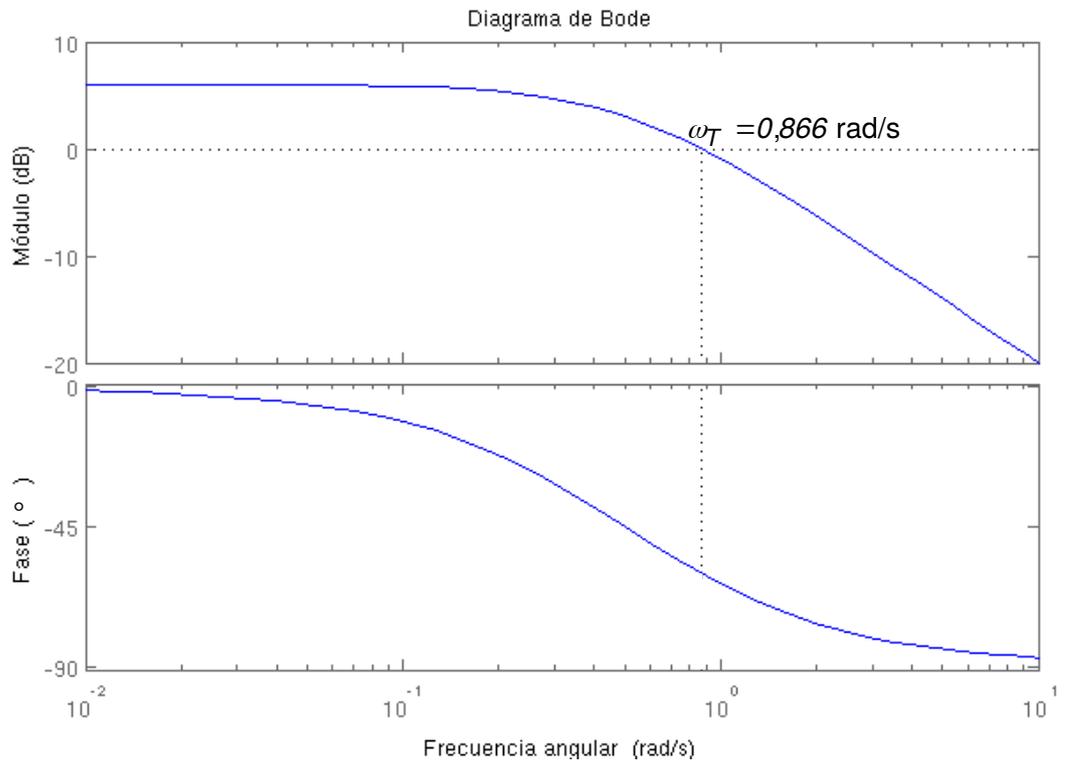
$$\dot{\tilde{h}} = \left(\frac{1}{\pi \tan^2 \alpha} \right) \left(-\frac{c}{\frac{5}{2H^2}} \tilde{h} + \frac{b}{H^2} \tilde{\varphi} \right).$$

2.c) La función de transferencia del modelo linealizado en torno al punto de operación $h = H$ es:

$$P(s) = \frac{\tilde{h}(s)}{\tilde{\varphi}(s)} = \frac{\left(\frac{1}{\pi \tan^2 \alpha} \right) \frac{b}{H^2}}{s + \left(\frac{1}{\pi \tan^2 \alpha} \right) \frac{c}{\frac{5}{2H^2}}} = \frac{G_P}{T_P s + 1},$$

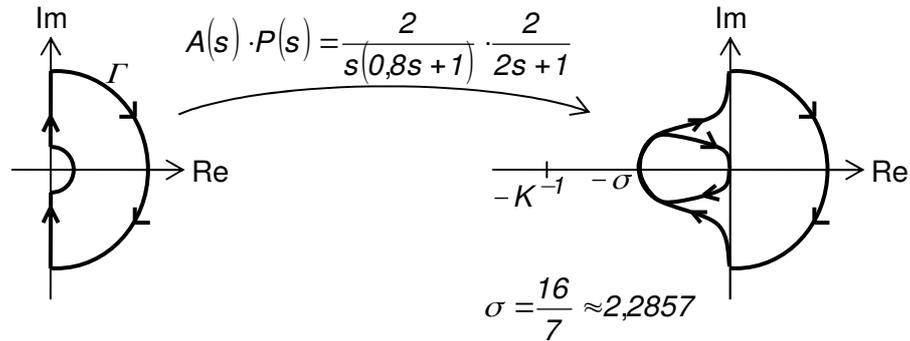
donde $G_P = \frac{2\sqrt{H}}{c} b$ y $T_P = \left(\pi \tan^2 \alpha \right) \frac{2\sqrt{H}}{c} H^2$. Para $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad, $b = \pi \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{rad}^{-1}$, $c = \pi \text{ m}^{5/2} \cdot \text{s}^{-1}$ y $H = 1 \text{ m}$: $G_P = 2 \text{ m/rad}$ y $T_P = 2 \text{ s}$.

2.d) Diagrama de Bode de $P(s)$:



3) Controlador serie proporcional

3.a) Criterio de estabilidad de Nyquist aplicado al sistema realimentado de la Figura 3 para el caso $C(s) = K$ (con K en V/m):



$$z = n + p, \text{ donde } p = 0 \text{ y } n = \begin{cases} 0 & \text{si } -K^{-1} < -\sigma \\ 2 & \text{si } -\sigma < -K^{-1} < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < -K^{-1} \end{cases}$$

El sistema realimentado es estable si y solamente si $K < \frac{1}{\sigma} = \frac{7}{16} = 0,4375$.

4) Controlador serie de estructura libre

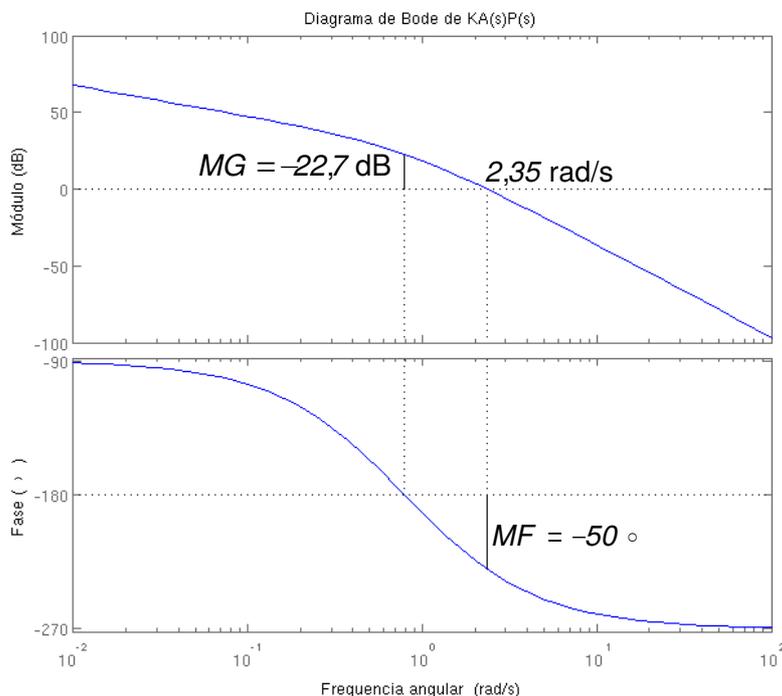
4.a) La función de transferencia $A(s)P(s)$ tiene un polo en $s = 0$. Sea $C(s) = KC'(s)$ tal que $C'(0) = 1$, de forma tal que el sistema realimentado sea de tipo 1. De esta manera, el error en régimen estacionario ante una rampa unitaria es $e_{\infty}^{rampa} = \frac{1 \text{ m/s}}{K_V}$ donde

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s)A(s)P(s). \text{ Se requiere: } e_{\infty}^{rampa} = \frac{1 \text{ m/s}}{K_V} < 0,05 \text{ m} \Rightarrow K_V > 20 \text{ s}^{-1}.$$

$$K_V = K \cdot 2 \frac{\text{rad}}{\text{s} \cdot \text{V}} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{rad}} > 20 \text{ s}^{-1} \Rightarrow K > 5 \text{ V/m}.$$

Tomando un margen de seguridad del 20 % se elige $K = 6 \text{ V/m}$.

Sea $P'(s) = KA(s)P(s) = 6 \cdot \frac{2}{s(0,8s+1)} \cdot \frac{2}{2s+1}$ (se omiten las unidades). El diagrama de Bode de $P'(s)$ es el siguiente:



Claramente, la elección $C(s) = K = 6 \text{ V/m}$ da lugar a un sistema realimentado inestable (margen de fase: $MF = -50^\circ$, margen de ganancia: $MG = -22,7 \text{ dB}$). Es necesario compensar el sistema para obtener los márgenes de estabilidad requeridos.

Se propone, un compensador por atraso de fase: $C'(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$.

Margen de fase deseado: $MF_D = 40^\circ$. Tomando $\Delta\varphi = 7^\circ$, se busca ω_c tal que $\text{Arg}(P'(j\omega_c)) = -180^\circ + MF_D + \Delta\varphi = -133^\circ \Rightarrow \omega_c = 0,289 \text{ rad/s}$.

Se toma $a = \frac{1}{|P'(j\omega_c)|} = \frac{1}{70,05} \approx 0,0143$ y $T = \frac{10}{a\omega_c} \approx 2424 \text{ s}$ para que $\frac{1}{aT} \ll \omega_c$.

Verificación:

- Frecuencia de ganancia unitaria: $\omega_c = 0,29 \text{ rad/s}$ a menos de una década de $\omega_T = 0,866 \text{ rad/s}$.
- Margen de fase: $MF' = 41^\circ > 40^\circ$.
- Margen de ganancia: $MG' = 13 \text{ dB} > 10 \text{ dB}$

Entonces, para cumplir con los requerimientos alcanza con tomar:

$$C(s) = KC'(s) = K \frac{1 + aTs}{1 + Ts}, \text{ donde } K = 6 \text{ V/m}, a = 0,0143 \text{ y } T = 2424 \text{ s}.$$

4.b) Diagrama de Bode de $C(s)A(s)P(s)$:

