Práctico 3

Análisis de proceso autorregresivo de orden 2
Proceso WSS filtrado

José Lezama & Pablo Musé & Sergio Martinez & Elías Masquil
{jlezama,pmuse,sematag,emasquil}@fing.edu.uy

Estimación y predicción en series temporales

Departamento de Procesamiento de Señales
Instituto de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ingeniería

Curso 2021

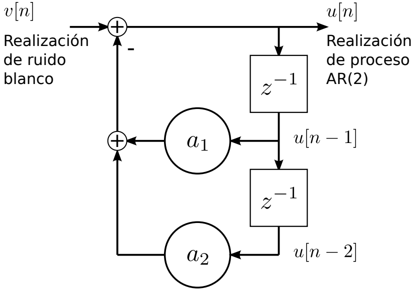
Análisis de un proceso AR(2)

Problema [Haykin, 1995]

Se considera el proceso AR(2) real gobernado por la siguiente ecuación en diferencias

$$u[n] + a_1 u[n-1] + a_2 u[n-2] = v[n]$$

1. Dada la función de autocorrelación del proceso, calcular los coeficientes del modelo.
2. Dado el modelo, calcular la función de autocorrelación del proceso.
3. Determinar las condiciones que tienen que cumplir los coeficientes para que el proceso sea asintóticamente estacionario.



Análisis de un proceso AR(2)

1. Cálculo de los coeficientes del modelo

- Las ecuaciones de Yule-Walker vinculan los coeficientes del modelo con la función de autocorrelación del proceso.
- La autocorrelación cumple la misma ecuación en diferencias que el proceso,

$$r[m] + a_1 r[m-1] + a_2 r[m-2] = 0, \qquad m > 0 \tag{1}$$

  o equivalentemente, definiendo $w_k = -a_k$,

$$r[m] = w_1 r[m-1] + w_2 r[m-2], \qquad m > 0.$$

- Considerando que el proceso es real y evaluando en $m = 1,\, 2$,

$$\begin{pmatrix} r[0] & r[1] \\ r[1] & r[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r[1] \\ r[2] \end{pmatrix}$$

- Resolviendo el sistema 2×2 se llega a que,

$$w_1 = \frac{r[1](r[0] - r[2])}{r^2[0] - r^2[1]} \qquad\qquad w_2 = \frac{r[0]r[2] - r^2[1]}{r^2[0] - r^2[1]}$$

Análisis de un proceso AR(2)

2. Función de autocorrelación

- La autocorrelación cumple que,

$$r[m] + a_1 r[m-1] + a_2 r[m-2] = 0, \qquad m > 0$$

- Para que quede completamente determinada, hay que especificar $r[0]$ y $r[1]$.
- Nuevamente, evaluando la ecuación 1 en $m = 1,\, 2$,

$$\begin{aligned} a_1 r[0] + (1 + a_2) r[1] &= 0 \\ a_2 r[0] + a_1 r[1] + r[2] &= 0 \end{aligned}$$

- Evaluando en $m = 0$, la autocorrelación cumple que

$$r[0] + a_1 r[1] + a_2 r[2] = \sigma_v^2$$

- Las 3 ecuaciones conducen a un sistema lineal 3×3,

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ a_1 & 1 + a_2 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r[0] \\ r[1] \\ r[2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_v^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Análisis de un proceso AR(2)

2. Función de autocorrelación

- Despejando $r[1]$ de la segunda ecuación, $\quad r[1] = \dfrac{-a_1}{1+a_2} r[0]$
- Despejando $r[2]$ de la tercer ecuación $\quad r[2] = -a_1 r[1] - a_2 r[0]$
- y sustituyendo $r[1]$ queda $\quad r[2] = \left(\dfrac{a_1^2}{1+a_2} - a_2\right) r[0]$
- Se tiene $r[1]$ y $r[2]$ en función de $r[0]$. Sustituyendo en la primer ecuación se tiene
$$r[0] - \frac{a_1^2}{1+a_2} r[0] + a_2 \left(\frac{a_1^2}{1+a_2} - a_2\right) r[0] = \sigma_v^2$$
- Operando y considerando que $r[0] = \sigma_u^2$ se llega a que,
$$r[0] = \sigma_u^2 = \frac{1+a_2}{(1-a_2)\left[(1+a_2)^2 - a_1^2\right]} \sigma_v^2.$$
- Ahora se tiene $r[0]$ y $r[1]$. Usando la ecuación en recurrencia (ec. 1), se conoce $r[m]$ para todo m.

Análisis de un proceso AR(2)

3. Condición de estacionaridad asintótica

- La condición de estacionaridad asintótica es que el filtro generador sea estable.
- La función de transferencia del filtro generador es,

$$H(z) = \frac{U(z)}{V(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

- Los polos p_1, p_2 del sistema son

$$1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_1,\, p_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

- Para estabilidad los polos deben estar dentro del círculo unidad

$$|p_1|,\, |p_2| < 1.$$

Análisis de un proceso AR(2)

3. Condición de estacionaridad asintótica

Encontrar las condiciones sobre a_1, a_2 tal que $\left|\dfrac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}\right| < 1$

(a) Raíces reales: $a_1^2 - 4a_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 \leq \dfrac{a_1^2}{4}$

(1) Caso $a_1 \geq 0$. La raíz de módulo mayor es negativa: raíz dominante negativa

$$\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \geq -1 \quad \Rightarrow \quad 2 - a_1 \geq \sqrt{a_1^2 - 4a_2}$$

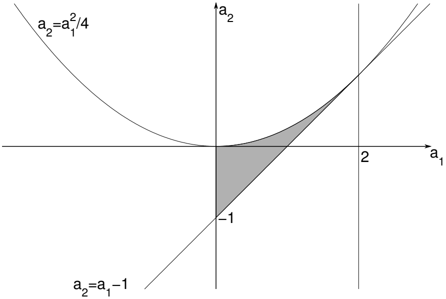
(i) $2 - a_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 \leq 2$

(ii) $(2 - a_1)^2 \geq a_1^2 - 4a_2$

$$\Rightarrow \quad a_2 \geq a_1 - 1$$

Por lo tanto, las condiciones son

$$a_2 \leq \frac{a_1^2}{4}$$
$$0 \leq a_1 \leq 2$$
$$a_2 \geq a_1 - 1$$



Análisis de un proceso AR(2)

3. Condición de estacionaridad asintótica

Encontrar las condiciones sobre a_1, a_2 tal que $\left|\dfrac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}\right| < 1$

(a) Raíces reales: $\quad a_1^2 - 4a_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 \leq \dfrac{a_1^2}{4}$

(2) Caso $a_1 < 0$. La raíz de módulo mayor es positiva: raíz dominante positiva

$$\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 2 + a_1 \geq \sqrt{a_1^2 - 4a_2}$$

(i) $2 + a_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 \geq -2$

(ii) $(2 + a_1)^2 \geq a_1^2 - 4a_2$

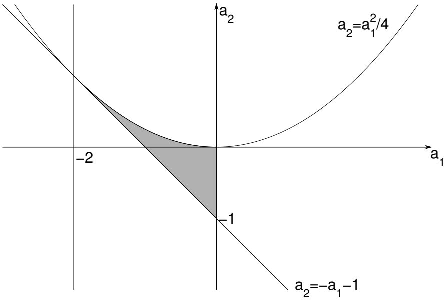
$$\Rightarrow \quad a_2 \geq -a_1 - 1$$

Por lo tanto, las condiciones son

$$a_2 \leq \frac{a_1^2}{4}$$

$$-2 \leq a_1 < 0$$

$$a_2 \geq -a_1 - 1$$



Análisis de un proceso AR(2)

3. Condición de estacionaridad asintótica

(b) Raíces complejas: $a_1^2 - 4a_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 > \frac{a_1^2}{4}$

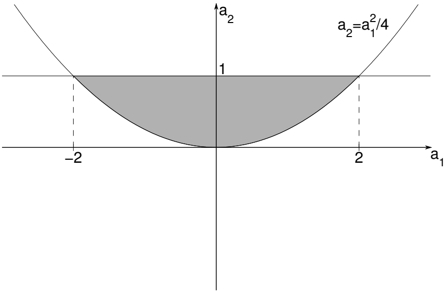
- Las raices son $p_1,\, p_2 = \dfrac{-a_1 \pm j\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}$
- con módulo $|p_1|^2 = |p_2|^2 = \dfrac{a_1^2}{4} + \dfrac{4a_2 - a_1^2}{4}$

Imponiendo la condición,

$$\frac{a_1^2}{4} + \frac{4a_2 - a_1^2}{4} \leq 1$$
$$\Rightarrow a_2 \leq 1$$

Finalmente, las condiciones son

$$a_2 > \frac{a_1^2}{4}$$
$$a_2 \leq 1$$



Análisis de un proceso AR(2)

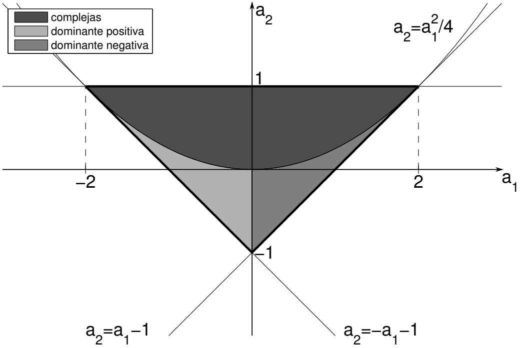
3. Condición de estacionaridad asintótica

Condiciones de estacionaridad asintótica:

$$a_2 \leq 1$$

$$a_2 \geq a_1 - 1$$

$$a_2 \geq -a_1 - 1$$

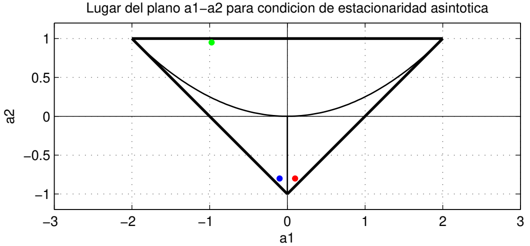


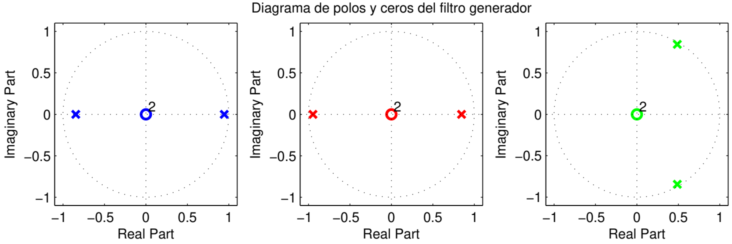
$$r[m] = Ap_1^m + Bp_2^m$$

- Raíz dominante positiva: La autocorrelación es siempre positiva.
- Raíz dominante negativa: Las muestras impares son negativas y las muestras pares positivas.
- Raices complejas: La autocorrelación es sinusoidal.

Análisis de un proceso AR(2)

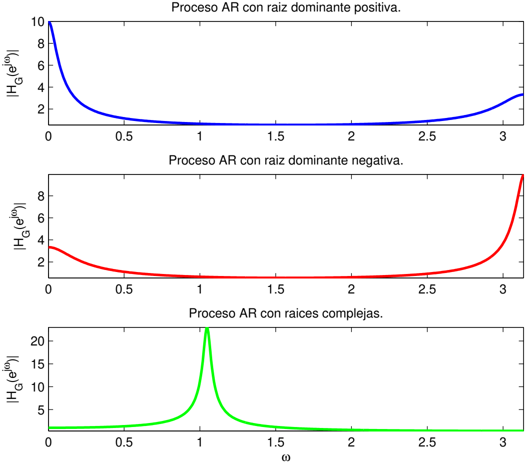
4. Simulación: parámetros del modelo





Análisis de un proceso AR(2)

4. Simulación: transferencia del filtro generador

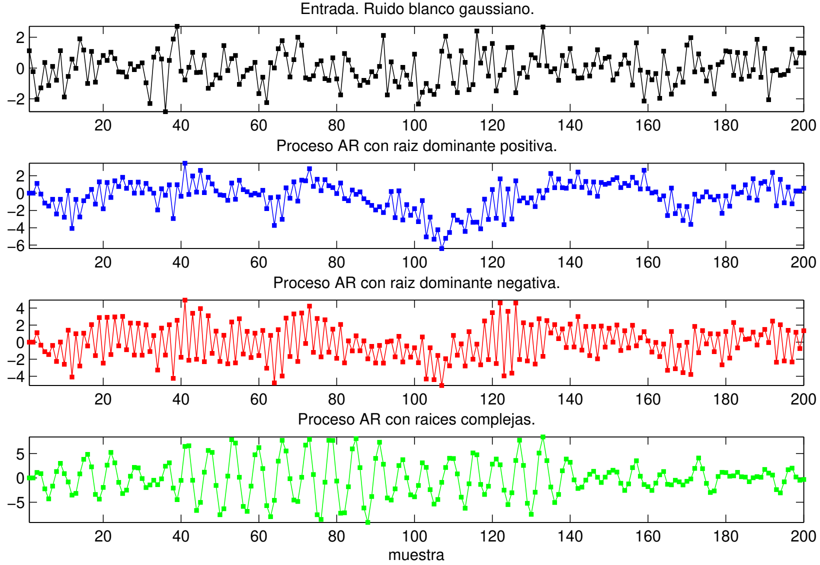


$$H_G(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$H_G(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + a_1 e^{-j\omega} + a_2 e^{-2j\omega}}$$

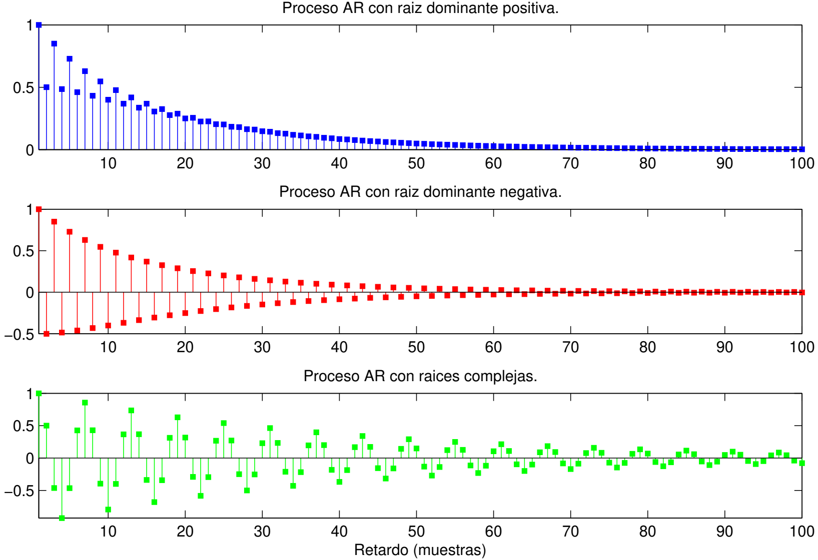
Análisis de un proceso AR(2)

4. Simulación: realizaciones



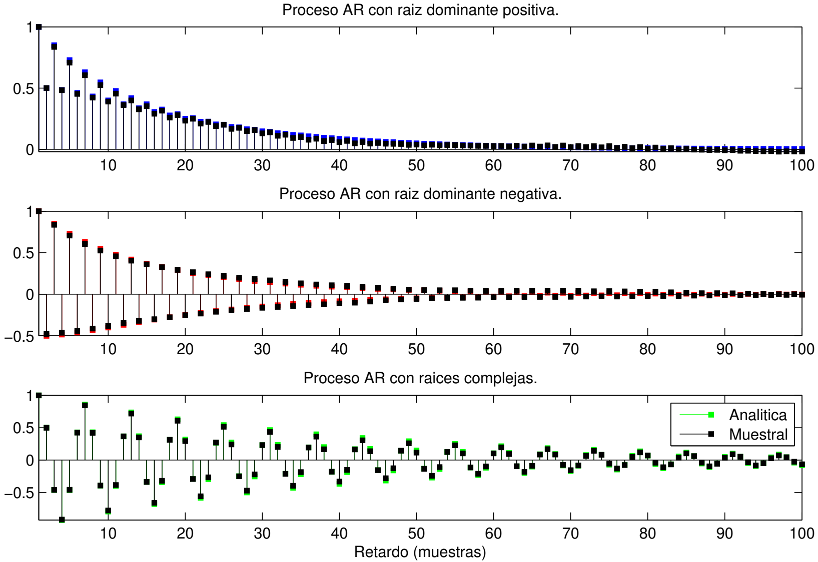
Análisis de un proceso AR(2)

4. Simulación: autocorrelación



Análisis de un proceso AR(2)

4. Simulación: autocorrelación muestral



Proceso WSS filtrado

Problema [Hayes, 1996]

- Sea $x[n]$ un proceso WSS con función de autocorrelación $r_x[k]$.
- Si $x[n]$ es filtrado con un filtro LTI estable con respuesta al impulso $h[n]$, la salida es

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]x[n-l]$$

Se pide

1. Calcular $\quad r_{yx}[n+k,n] = E(y[n+k]x^*[n])$
2. Calcular $\quad r_y[n+k,n] = E(y[n+k]y^*[n])$
3. Calcular la densidad espectral de potencia $P_y(e^{j\omega})$
4. Calcular $P_y(z)$

Proceso WSS filtrado

1. Correlación cruzada entre la entrada y la salida

$$
\begin{aligned}
r_{yx}[n+k,n] &= E(y[n+k]x^*[n]) \\
&= E\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]x[n+k-l]x^*[n]\right) \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]E\left(x[n+k-l]x^*[n]\right) \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]r_x[n+k-l,n] \\
&\overset{x[n]\ \text{WSS}}{=} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]r_x[k-l]
\end{aligned}
$$

$$r_{yx}[k] = r_x[k] * h[k]$$

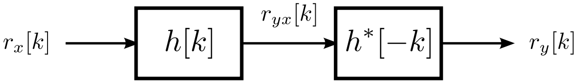
$$r_x[k] \longrightarrow \boxed{h[k]} \longrightarrow r_{yx}[k]$$

Proceso WSS filtrado

2. Autocorrelación de la salida

$$
\begin{aligned}
r_y[n+k,n] &= E(y[n+k]y^*[n]) = E\left(y[n+k]\sum_{l=-\infty}^{\infty} x^*[l]h^*[n-l]\right) \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h^*[n-l]E\left(y[n+k]x^*[l]\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h^*[n-l]r_{yx}[n+k-l] \\
&\overset{m=n+k-l}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^*[m-k]r_{yx}[m] \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^*[-(k-m)]r_{yx}[m]
\end{aligned}
$$

$$r_y[k] = r_{yx}[k]*h^*[-k]$$



Proceso WSS filtrado

2. Autocorrelación de la salida

Sustituyendo la autocorrelación cruzada se llega a

$$r_y[k] = r_x[k] * h[k] * h^*[-k] \tag{2}$$

3. Densidad espectral de potencia (PSD)

Teniendo en cuenta que,

$$h[k] \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} H(e^{j\omega}) \qquad \Longrightarrow \qquad h^*[-k] \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} H^*(e^{j\omega})$$

si se aplica la DTFT a la ecuación 2 se llega a que

$$\begin{aligned} P_y(e^{j\omega}) &= P_x(e^{j\omega})H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) \\ &= P_x(e^{j\omega})|H(e^{j\omega})|^2. \end{aligned}$$

Proceso WSS filtrado

4. PSD en el dominio z

Teniendo en cuenta que,

$$h[k] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} H(z) \qquad \Longrightarrow \qquad h^*[-k] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} H^*(1/z^*)$$

si se aplica la transformada z a la ecuación 2 se llega a que

$$P_y(z) = P_x(z)H(z)H^*(1/z^*).$$

Referencias I

Hayes, M. H. (1996).
Statistical Digital Signal Processing and Modeling, chapter 3.
Wiley, 1st edition.

Haykin, S. (1995).
Adaptive Filter Theory, chapter 2.
Prentice Hall, 3rd edition.