Modelado de sólidos

Basado en: **Capítulo 10**

Del Libro: **Introducción a la Graficación por Computador**

Foley – Van Dam – Feiner – Hughes - Phillips

Resumen del capítulo

- Representación de sólidos
- Operaciones regularizadas de conjuntos booleanos
- Generación de ejemplares de primitivas
- Representación de barrido
- Representación de fronteras
- Representación de partición espacial
- Geometría sólida constructiva

Representación de sólidos

Representación de sólidos

Capacidad de representación de sólidos.

¿Qué representación es adecuada para representar sólidos?

Considerar representaciones tales como:

Colecciones de líneas rectas,
curvas,
polígonos,
superficies

Representación de sólidos

Un modelo es una representación de la realidad.

- Permite estudiar y comprender el comportamiento de la realidad bajo análisis.
- En algunos casos, proporcionar medios para predecir la evolución del modelo planteado.

Problemas:

- La realidad es muy compleja.
- No queda otra alternativa que recurrir a simplificaciones.

Representación de sólidos

Los sistemas de representación de sólidos describen objetos.

- Diferentes modelos geométricos se aplican en la construcción de objetos tridimensionales.
- Las diferentes técnicas empleadas persiguen, sin que todas lo consigan:
  - Distinguir partes internas, partes externas, superficies, etc.
  - Determinar las posibles interferencias entre sólidos.
  - Aplicar análisis (simulación) para determinar la respuesta de los sólidos a factores como la tensión, la temperatura, etc.
  - Hacer posible su construcción de forma automática con maquinaria adecuada.

Representación de sólidos

Las dos características a resolver con un modelo geométrico son:

La forma de representación del sólido.

La forma de almacenamiento. Conciliación entre espacio de almacenamiento y tiempo de proceso.

Elementos a considerar de un modelo de representación de sólidos:

- **Precisión**. Representación real de un objeto, sin aproximaciones.
- **Dominio**. Conjunto de objetos que se pueden representar con el modelo.
- **Ausencia de ambigüedad**. No deben existir dudas sobre el objeto representado.
- **Unicidad**. Un sólido se codifica de una única forma.
- **Validez**. Un modelo de representación impide la reproducción de sólidos no válidos.
- **Cierre**. Operaciones sobre sólidos dan como resultado nuevos sólidos.
- **Compacta**. Reducir el espacio de almacenamiento, mejorándose el rendimiento del sistema.
- **Eficiencia**. Algoritmos eficientes en el cálculo de las propiedades físicas de los sólidos, así como su representación en pantalla.

Modelado de alambre:

Hoy en día es considerado una forma de representación más que un método de modelado.

Útil en aplicaciones tipo CAD.

Un objeto es representado mediante una colección de aristas. El esqueleto del objeto.

- Ninguna información sobre las propiedades superficiales.

Modelado de alambres

Ventajas:

Simplicidad de cálculos. Únicamente muestra la composición de la escena.

Desventajas:

Ambigüedad en la representación. No se pueden eliminar líneas ocultas, no existen caras.

La información sobre el volumen real es inexistente.

Incapacidad de representar perfiles curvados. Las superficies curvas se intuyen, pero no se representan (ejemplo, cilindro).

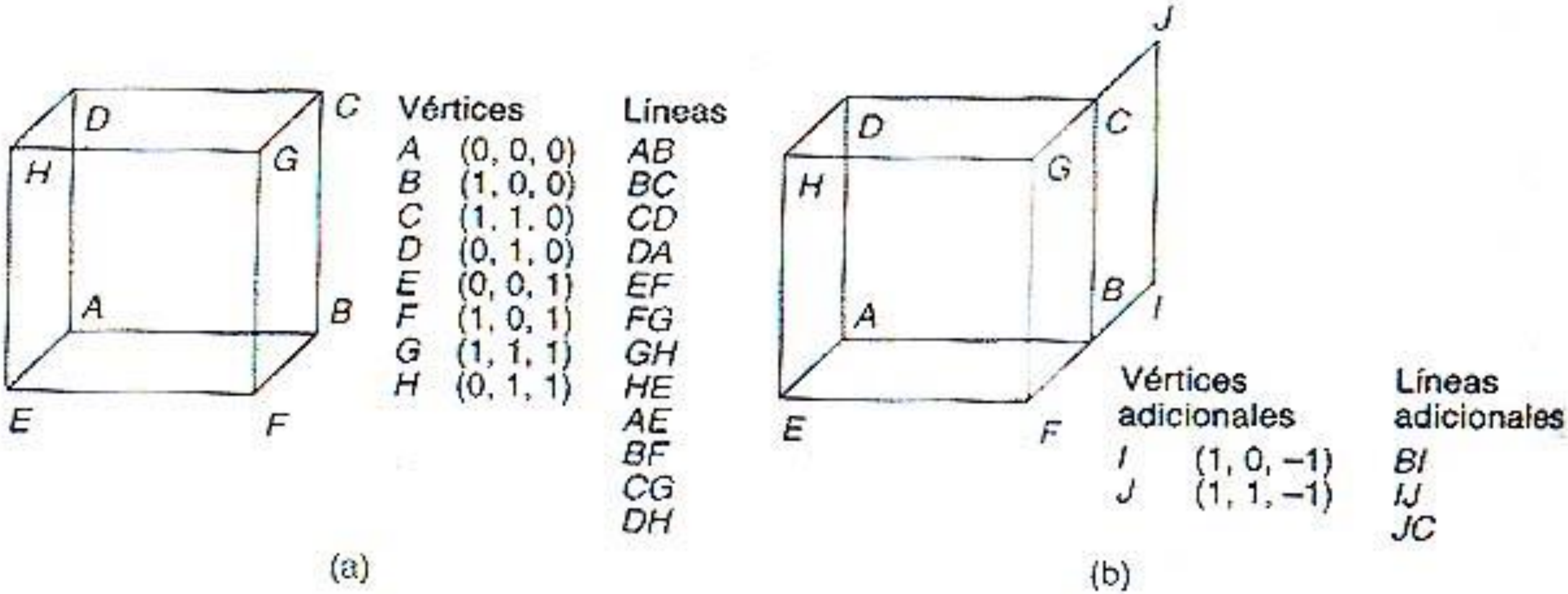
Incapacidad de detectar interferencias entre objetos. Se desconocen los límites del objeto.

Dificultades en el cálculo de las propiedades físicas de los objetos.

Incapacidad para aplicar métodos de iluminación y sombreado. Realismo muy pobre.

Representación de sólidos

¿En las siguientes figuras se definen objetos sólidos?



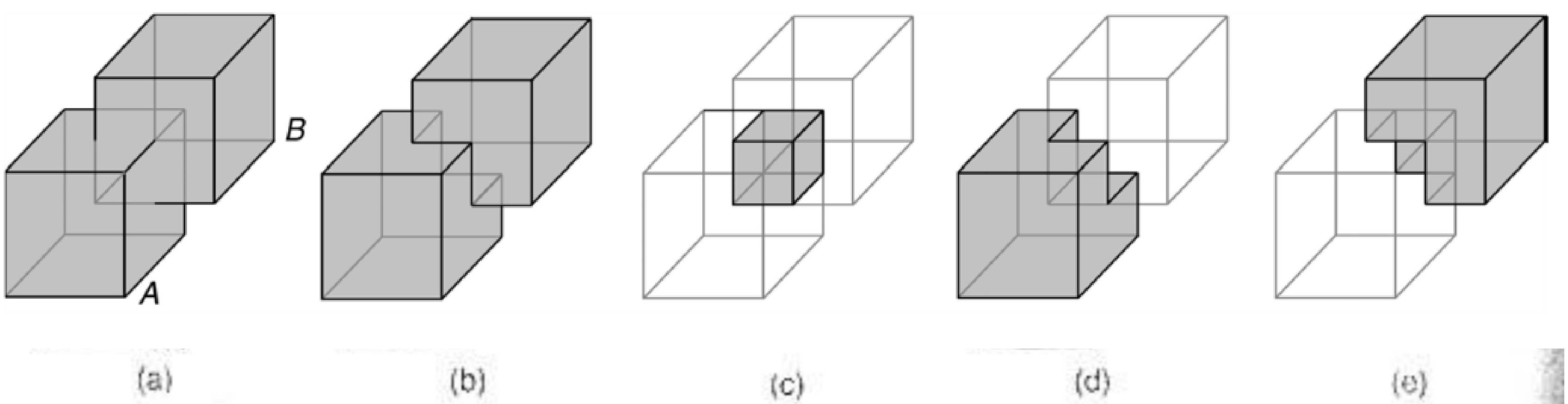
(a) Cubo alambrado compuesto por 12 líneas rectas. (b) Cubo alambrado con una cara adicional.

Operaciones regularizadas de conjuntos booleanos

Operaciones regularizadas de conjuntos booleanos

Las operaciones comunes para combinar objetos son las operaciones booleanas de conjuntos, como la unión, la diferencia y la intersección como se muestra en la siguiente figura:

Modelado de sólidos



Operaciones booleanas. (a) Objetos A y B, (b) $A \cup B$, (c) $A \cap B$, (d) $A - B$ y (e) $B - A$.

La aplicación de una operación booleana ordinaria de conjuntos a dos objetos sólidos, produce necesariamente un objeto sólido?

Operaciones regularizadas de conjuntos booleanos

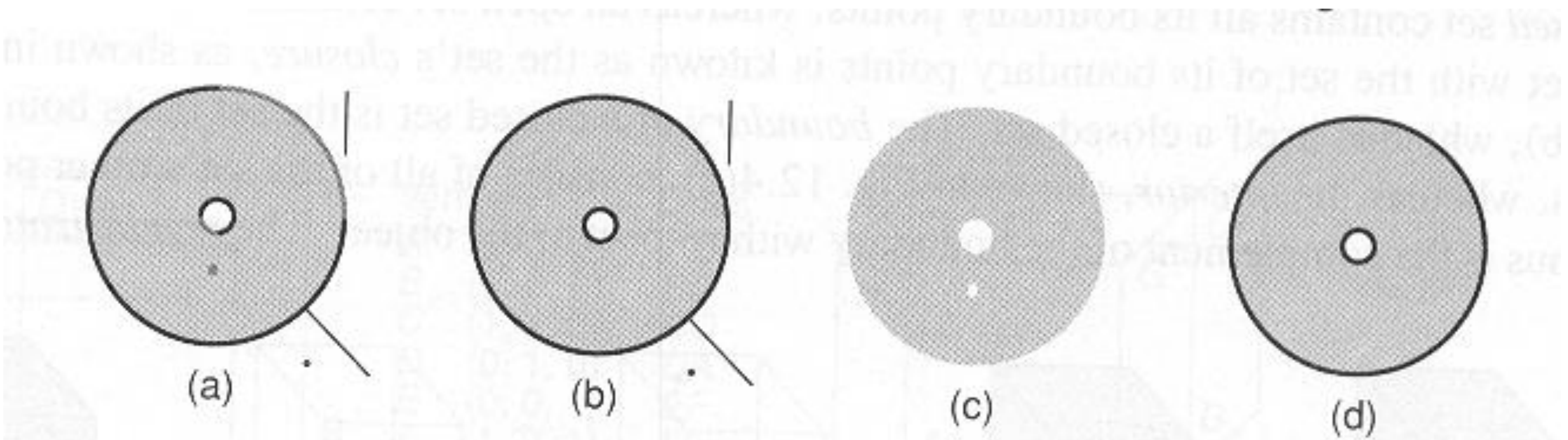
NO. En lugar de emplear los operadores booleanos ordinarios de conjuntos, usaremos los operadores booleanos regularizados de conjuntos denotados como $\cup^*, \cap^*, -^*$ y definidos de manera que las operaciones con sólidos siempre generen sólidos.

Por ejemplo,

la intersección booleana regularizada de dos cubos que se unen en un solo vértice es el objeto nulo.

Operaciones regularizadas de conjuntos booleanos

Para examinar la diferencia entre los operadores ordinarios y los regularizados, se puede considerar cualquier objeto como definido por un conjunto de puntos y dividido en puntos interiores y puntos de frontera como se muestra en la siguiente figura



Definiciones:

Conjunto abierto: es aquel que está formado por elementos que sólo están rodeados por elementos del mismo conjunto.

Puntos de frontera de un conjunto: son aquellos puntos que están rodeados tanto por elementos del conjunto como de su complemento.

Cerradura: Es la unión de un conjunto con el conjunto de sus puntos de frontera.

Conjunto cerrado: es aquel que es igual a su cerradura.

Interior de un conjunto C: Está formado por aquellos puntos tales que tienen un entorno que está completamente incluido en el conjunto. Es el complemento del conjunto frontera. Es el conjunto abierto más grande contenido en C.

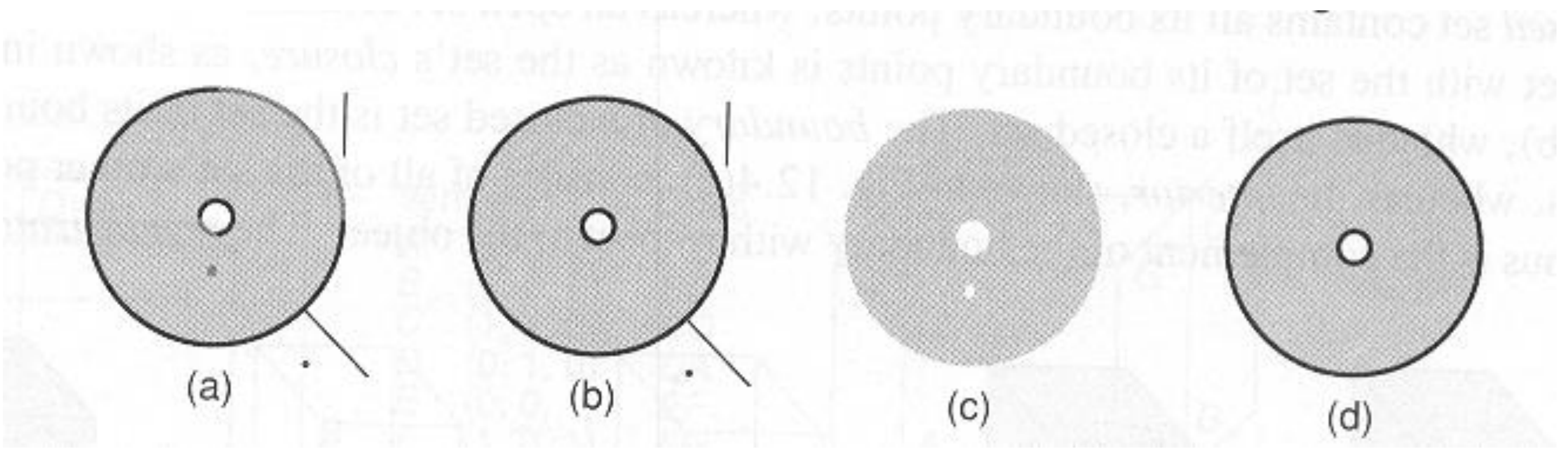
Operaciones regularizadas de conjuntos booleanos

La regularización de un conjunto se define como la cerradura de los puntos interiores del conjunto.

– (b) es la cerradura de (a).

– (c) es el interior de (a).

– (d) es la cerradura del interior de (a).



Operaciones regularizadas de conjuntos booleanos

Un conjunto regular no puede contener ningún punto de frontera que no sea adyacente a un punto interior, es decir no puede tener puntos, líneas o superficies de frontera ¨colgantes¨.

Se puede definir un operador booleano regularizado de conjuntos en función de un operador ordinario como

$$A \ op^* \ B = \text{cerradura}(\text{interior}(A \ op \ B)),$$

Donde op son las operaciones unión, intersección o resta normales.

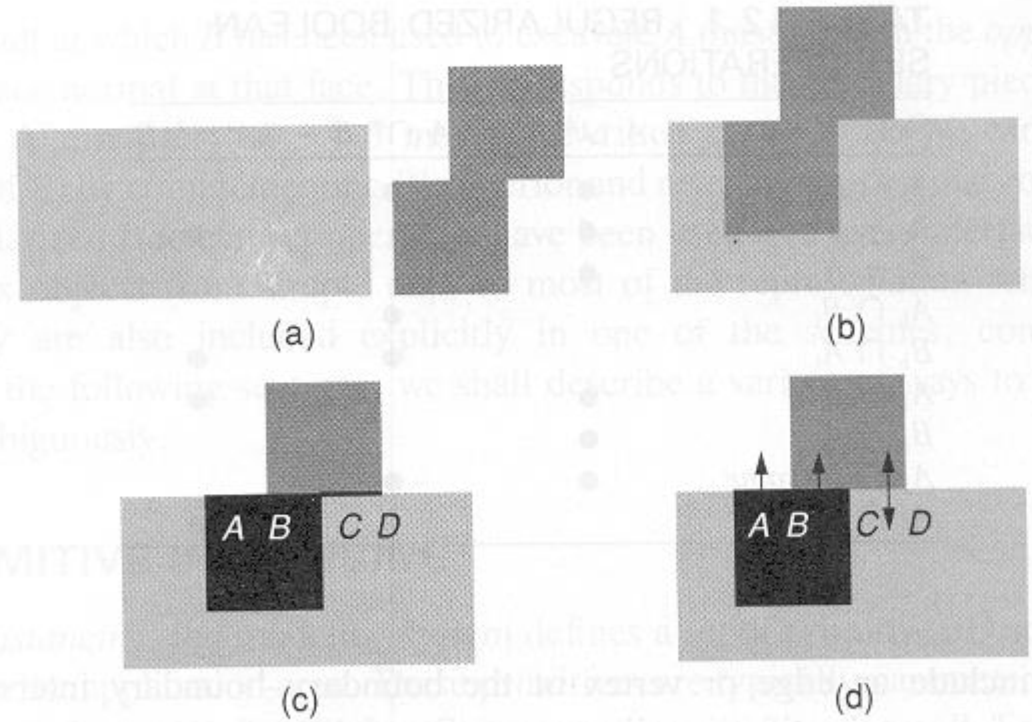
Operaciones regularizadas de conjuntos booleanos

Comparación entre operaciones booleanas ordinarias y regularizadas de conjuntos aplicadas a conjuntos regulares.

Se consideran dos objetos en la siguiente figura:

Operaciones regularizadas de conjuntos booleanos

Modelado de sólidos



Intersección booleana. (a) Dos objetos, mostrados en sección transversal. (b) Posiciones de los objetos antes de la intersección. (c) Intersección booleana ordinaria que produce una cara colgante, mostrada como la línea *CD* en la sección transversal. (d) Intersección booleana regularizada que incluye una porción de la frontera compartida en la frontera resultante si los dos objetos yacen en el mismo lado (*AB*), y la excluye si los objetos yacen en lados opuestos (*CD*). Las intersecciones frontera-interior (*BC*) siempre se incluyen.

Operaciones regularizadas de conjuntos booleanos

Los resultados de cada operador regularizado se pueden definir en función de los operadores ordinarios aplicados a las fronteras y a los interiores de los objetos.

En la siguiente tabla se indica la manera en que se definen los operadores regularizados para objetos A y B cualesquiera.

A_b y A_i son la frontera y el interior de A respectivamente.

A_b inter A_b iguales es la parte de la frontera compartida por A y B donde A_i y B_i están en el mismo lado.

Operaciones regularizadas de conjuntos booleanos

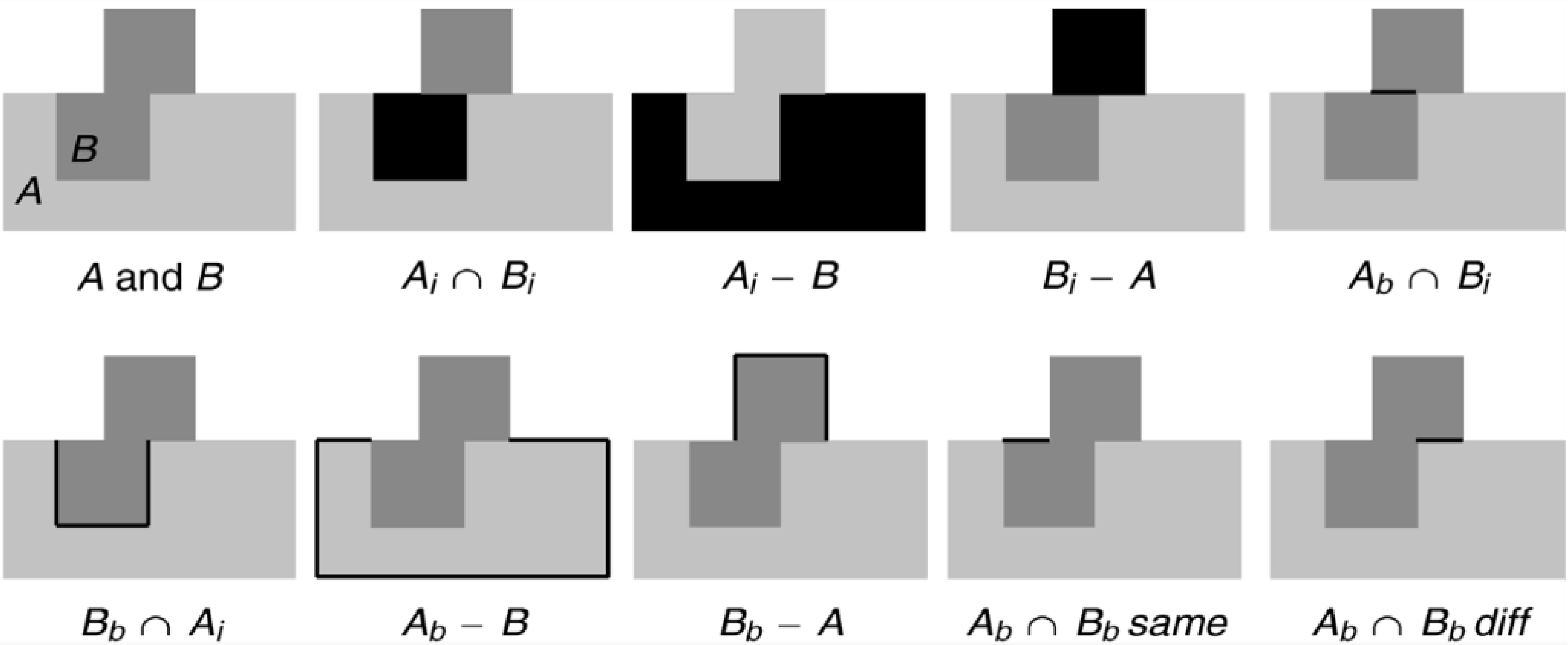
A_b inter B_b diferentes, es la parte de la frontera compartida por A y B para la cual A_i y B_i caen en lados opuestos.

O sea: son los puntos frontera (b) comunes de A y B, que no son cercanos (adyacentes) a ningún punto interior (i) común para A y B.

Cada uno de los operadores regularizados está definido por la unión de los conjuntos asociados con las filas que tienen un punto en la columna del operador

Operaciones booleanas regularizadas de conjuntos

Conjunto	$A \cup^* B$	$A \cap^* B$	$A -^* B$
$A_i \cap B_i$	•	•	
$A_i - B$	•		•
$B_i - A$	•		
$A_b \cap B_i$		•	
$B_b \cap A_i$		•	•
$A_b - B$	•		•
$B_b - A$	•		
$A_b \cap B_b$ iguales	•	•	
$A_b \cap B_b$ diferentes			•



Operaciones booleanas ordinarias aplicadas a subconjuntos de dos objetos.

Generación de ejemplares de primitiva

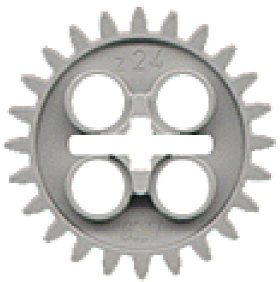
Generación de ejemplares de primitivas

- El método de modelado define un conjunto (base de datos) de formas sólidas básicas tridimensionales (llamadas primitivas).
- Las primitivas pueden parametrizarse: disponen de puntos de control modificables por el usuario.

  Ejemplo: Una pirámide regular donde el usuario define el número de caras que se unen en el ápice.
- Método de uso frecuente en el diseño de objetos de alta complejidad.

  Ejemplo. Diseño de tuercas y engranajes. Un engranaje puede ser caracterizado por su diámetro y el número de dientes.

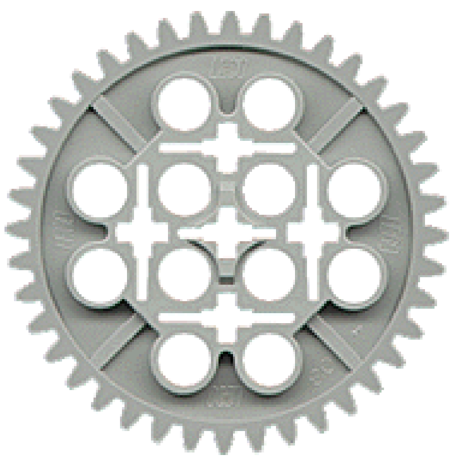
Generación de ejemplares de primitivas



Diámetro 4.3

Agujeros 4

Dientes 25



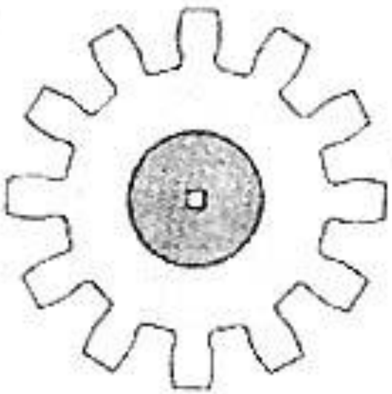
Diámetro 8.2

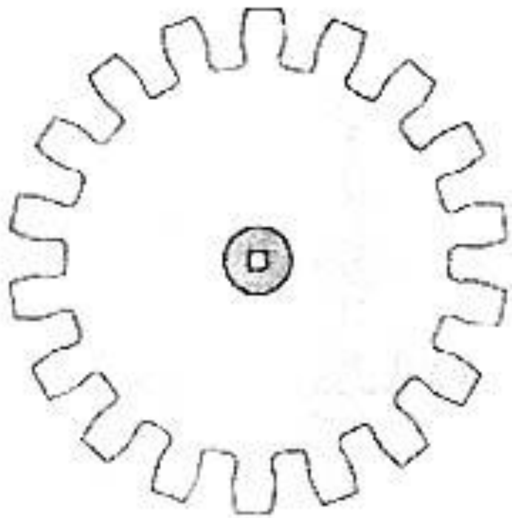
Agujeros 8

Dientes 60

Generación de ejemplares de primitivas

Modelado de sólidos





Dos engranes definidos por la generación de ejemplares de primitivas.

Generación de ejemplares de primitivas

Aunque se pueda construir una jerarquía de ejemplares de primitivas, cada ejemplar de nodo hoja sigue siendo un objeto definido por separado.

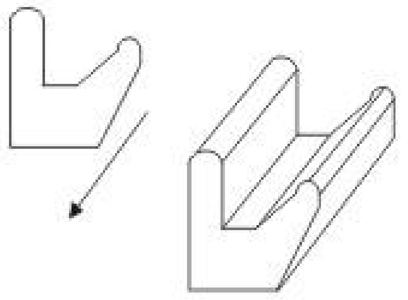
En la generación de ejemplares de primitivas no hay medios para combinar objetos y crear uno nuevos de mayor nivel usando por ejemplo las operaciones booleanas regularizadas de conjuntos.

Por lo tanto la única forma de crear un nuevo tipo de objeto es escribiendo el código que lo define.

Representación de barrido

Representación de barrido

El desplazamiento de un área a lo largo de una trayectoria define un nuevo objeto, llamado barrido.



Barrido traslacional

Dos tipos de desplazamientos:

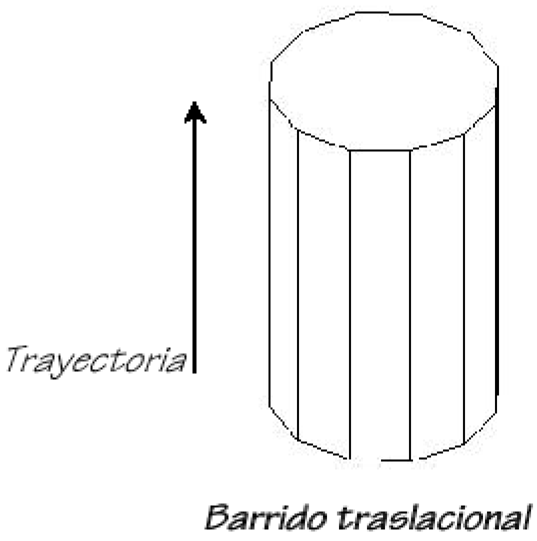
Desplazamiento traslacional o extrusión.

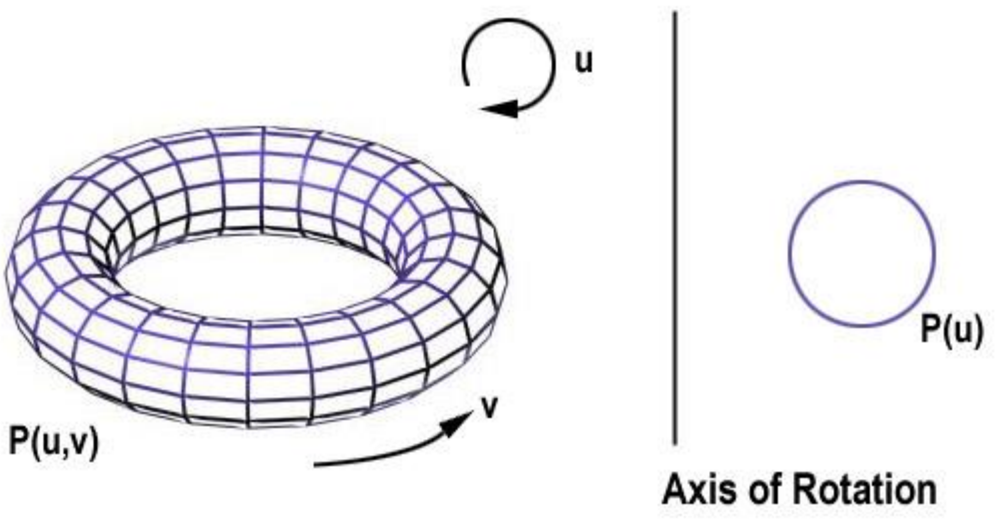
Un área bidimensional desplazado a lo largo de una trayectoria lineal, normal al plano del área, genera un volumen. Ejemplo. Un cilindro se puede definir a partir de una circunferencia, que sería su base.

Representación de barrido

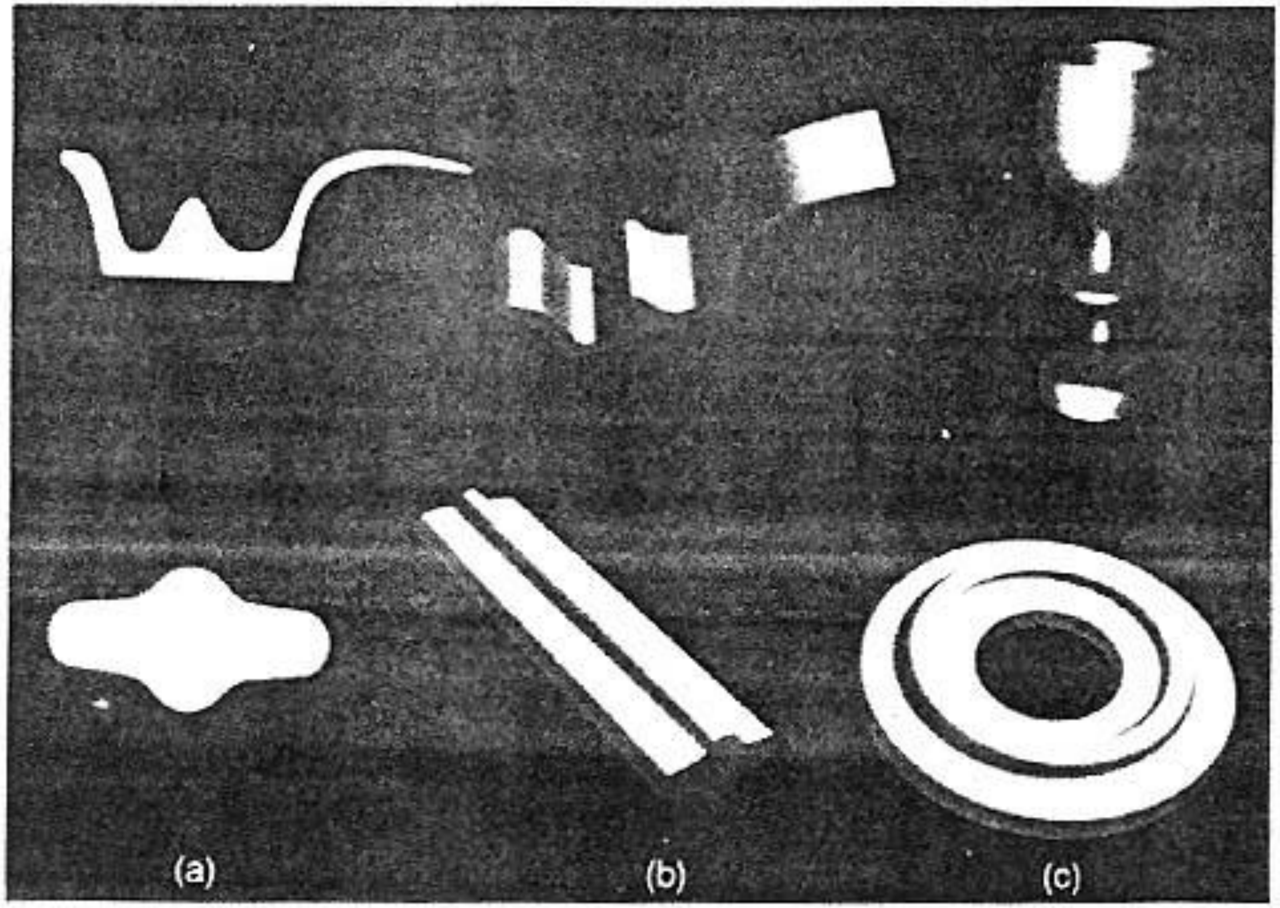
Desplazamiento rotacional.

Rotación de un área respecto de un eje. De esta manera, se define un cilindro a partir de un rectángulo, tomando como eje de rotación uno de sus lados.





Representación de barrido



Barridos de (a) áreas bidimensionales que se usan para definir, (b) barridos traslacionales y (c) barridos rotacionales. (Creados con el sistema de modelado Alpha_1. Cortesía de University of Utah.)

Representación de barrido

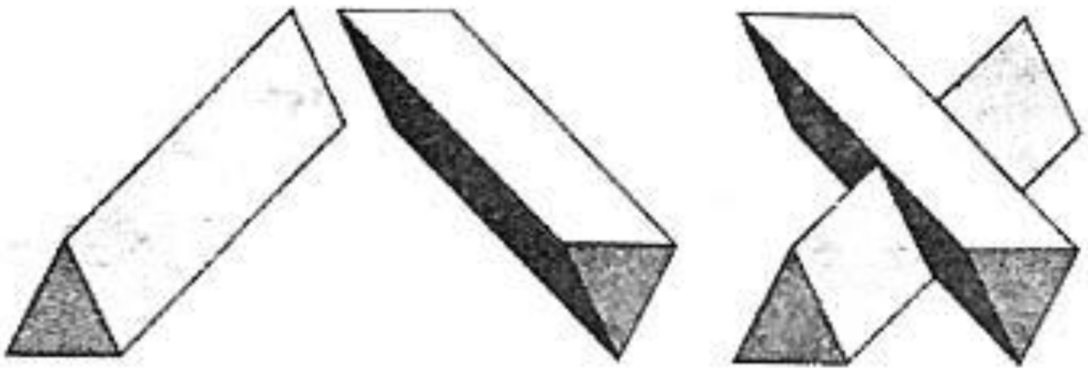
En términos generales es difícil aplicar las operaciones regularizadas de conjuntos booleanos a los barridos sin antes convertirlos a otra representación.

Incluso los barridos más simples no son cerrados con las operaciones booleanas regularizadas de conjuntos.

Por ejemplo la unión de dos barridos simples generalmente no es un barrido simple, como se ve en la siguiente figura.

Representación de barrido

Modelado de sólidos



(a) (b)

(a) Dos barridos simples de objetos bidimensionales (triángulos). (b) La unión de los barridos presentados en (a) no es un barrido simple de un objeto bidimensional.

Representación de frontera

Representación de frontera

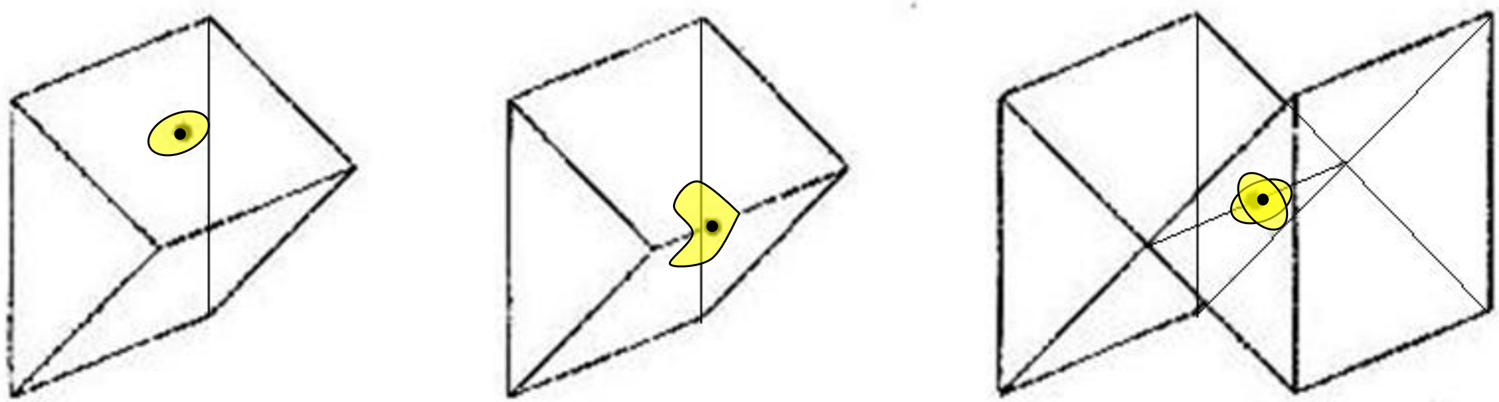
También conocida como Boundary representation o B-rep.

En este método se definen los objetos en función de la superficie que los encierra (su frontera), describiendo sus vértices, aristas y caras.

En algunos métodos especializados B-rep se restringen las caras a solamente triángulos y polígonos convexos.

Esta generalización hace que muchos modelos pierdan cierta resolución. Las caras curvas se aproximan por medio de polígonos. Aumentan las necesidades de memoria para almacenar estructuras de datos.

Representación de frontera



(a) (b) (c)

En una 2-variedad cada punto tiene una vecindad de puntos que lo rodean y forman un disco topológico, mostrado en gris en (a) y (b). (c) Si un objeto no es una 2-variedad, entonces no tiene puntos cuya vecindad sea un disco topológico.

Representación de frontera

Un poliedro es un sólido acotado por un conjunto de polígonos cuyas aristas pertenecen a un número par de polígonos.

– Un poliedro simple es aquel que puede deformarse para obtener una esfera, es decir, un poliedro que a diferencia de un toro, no tiene agujeros.
– La representación de frontera de un poliedro simple satisface la Fórmula de Euler.

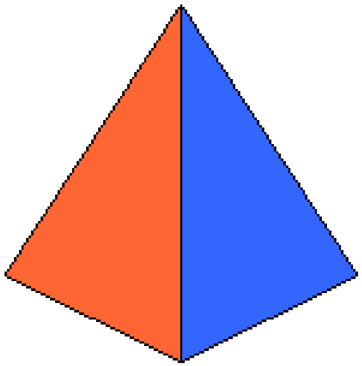
$$V - A + C = 2$$

V Número de vértices

A Número de aristas

C Número de caras

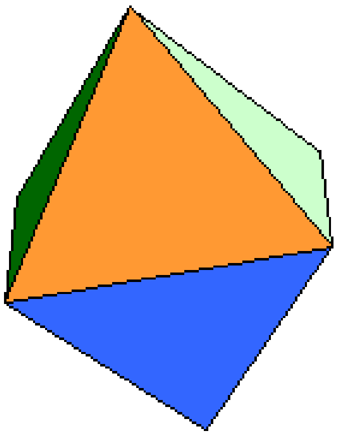
Representación de frontera



V 5

A 8

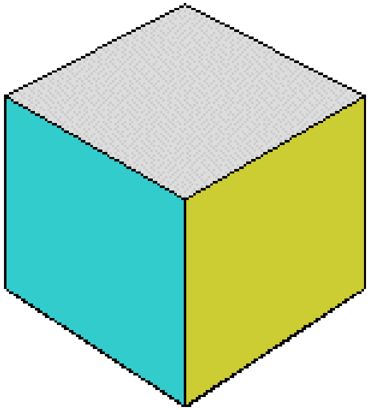
C 5



V 6

A 12

C 8



V 8

A 12

C 6

Representación de frontera

La fórmula de Euler aún es aplicable si se permiten aristas curvas y caras no planas.

La fórmula de Euler establece condiciones necesarias, aunque no suficientes, para que un objeto sea un poliedro simple.

- Se pueden construir objetos que satisfagan la fórmula de Euler, pero no acotan un volumen, sin más que añadir una o más caras o aristas colgantes a un sólido que de otra manera sería válido.
- Se requieren otras restricciones para garantizar que un objeto sea un sólido.

Representación de frontera

Restricciones:

- Cada arista debe conectar dos vértices.
- Cada arista debe estar compartida por exactamente dos caras.
- Al menos tres aristas deben unirse en cada vértice.
- Las caras no deben ser interpenetrables.

Representación de frontera

Una generalización de la Fórmula de Euler, en la que se consideran caras con agujeros y componentes separados.

$$V - A + C - H = 2(D - G)$$

V Número de vértices

A Número de aristas

C Número de caras

H Número de agujeros en las caras

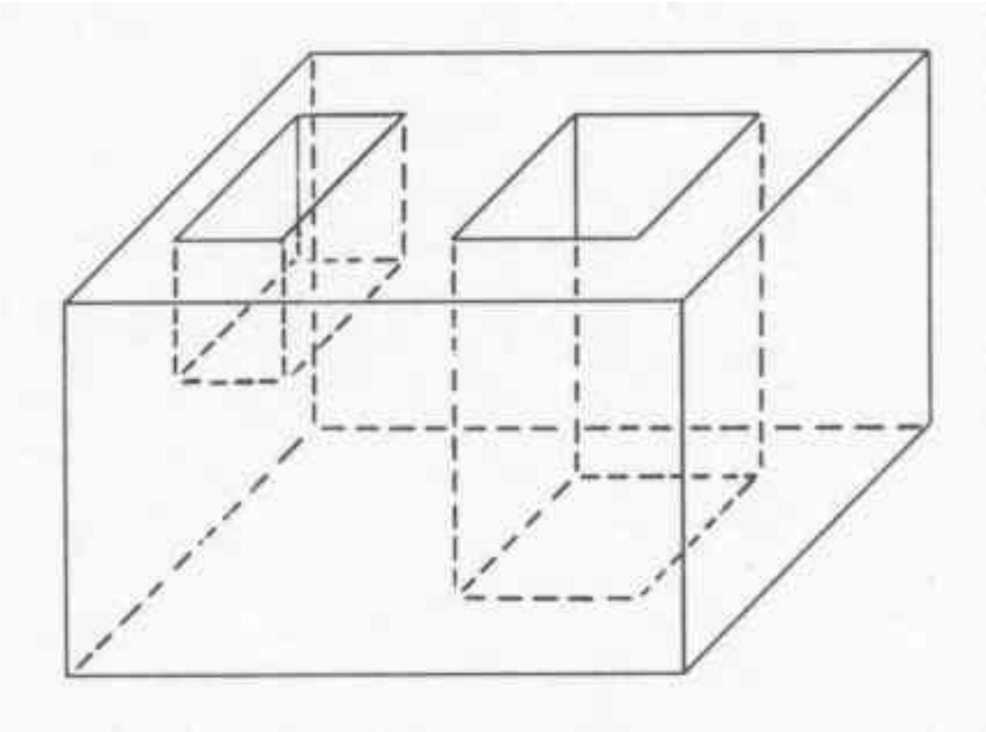
D Número de componentes separados del objeto

G Número de agujeros que atraviesan el objeto

Representación de frontera

$$V - A + C - H = 2(D - G)$$

V 24; A 36; C 15; H 3; D 1; G 1



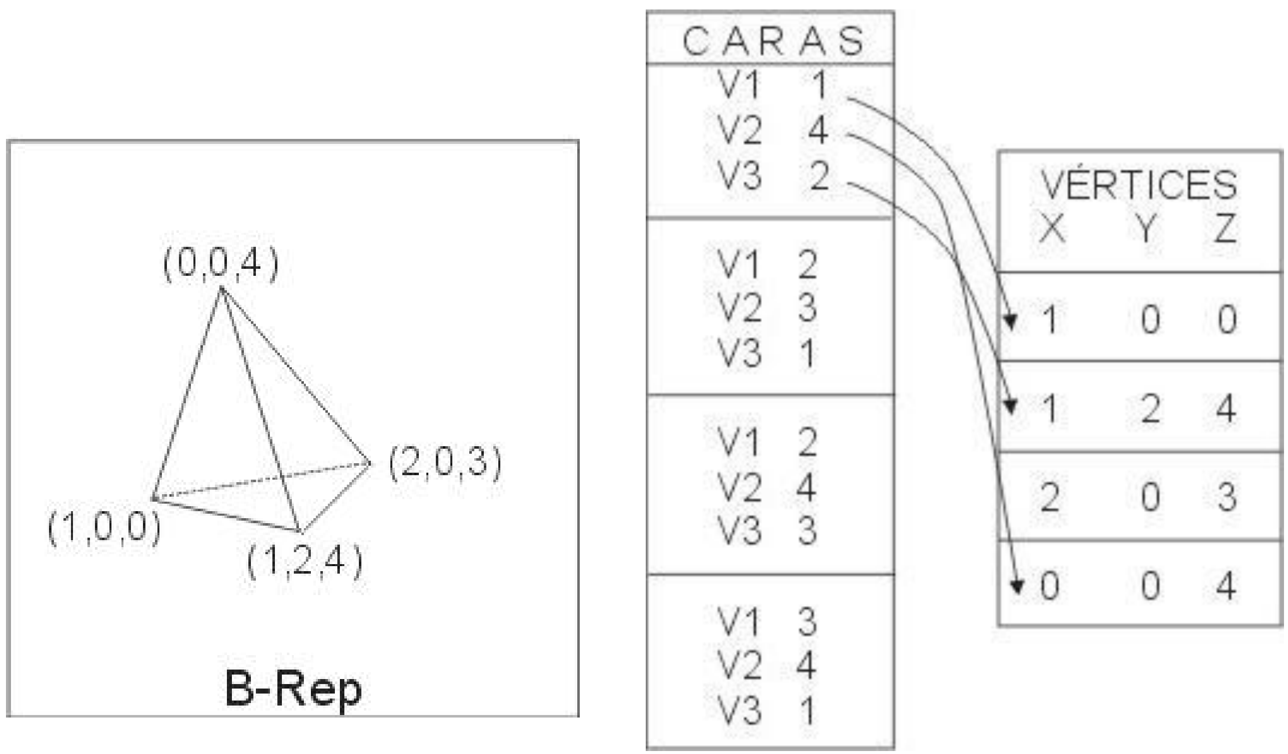
Representación de frontera

Baumgart introdujo los operadores de Euler.

- Un usuario no puede construir cualquier sólido.
- Los operadores de Euler trabajan añadiendo y eliminando vértices, aristas y caras a un poliedro de partida.
- Los operadores de Euler evitan la construcción de poliedros inválidos (operación cerrada).
- Las estructuras de datos para el manejo de representaciones de frontera están basadas en grafos que describen las relaciones topológicas del poliedro.

Representación de frontera

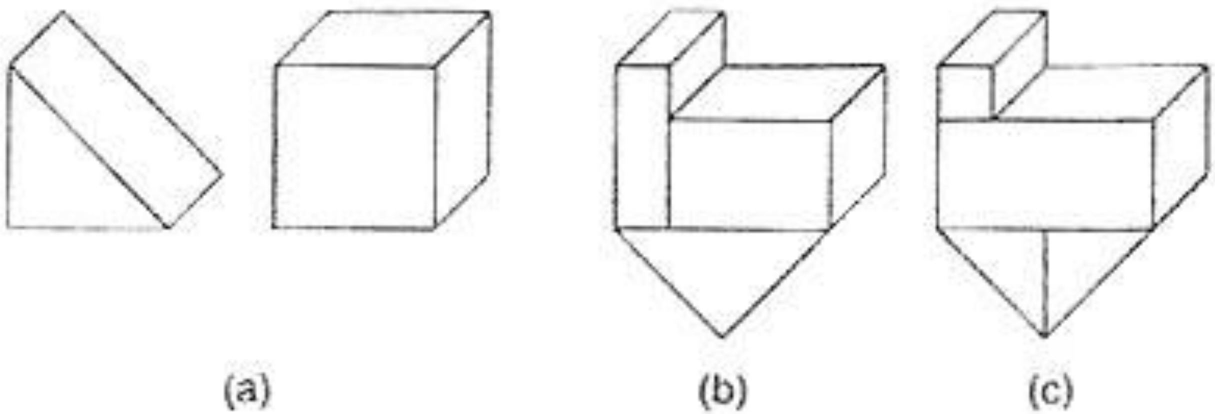
La representación de fronteras más simple es una lista de caras poligonales, cada una de ellas caracterizada por una lista de coordenadas de los vértices.



Representación de partición espacial

Partición espacial: descomposición de celdas

Representaciones de partición espacial



Las celdas presentadas en (a) se pueden transformar de distintas maneras para construir el mismo objeto que aparece en (b) y (c). Incluso un solo tipo de celda es suficiente para ocasionar ambigüedades.

Representación de partición espacial

Dividen el espacio en un conjunto de celdas cúbicas (llamadas voxel. Contracción de las palabras inglesas "elemento de volumen").

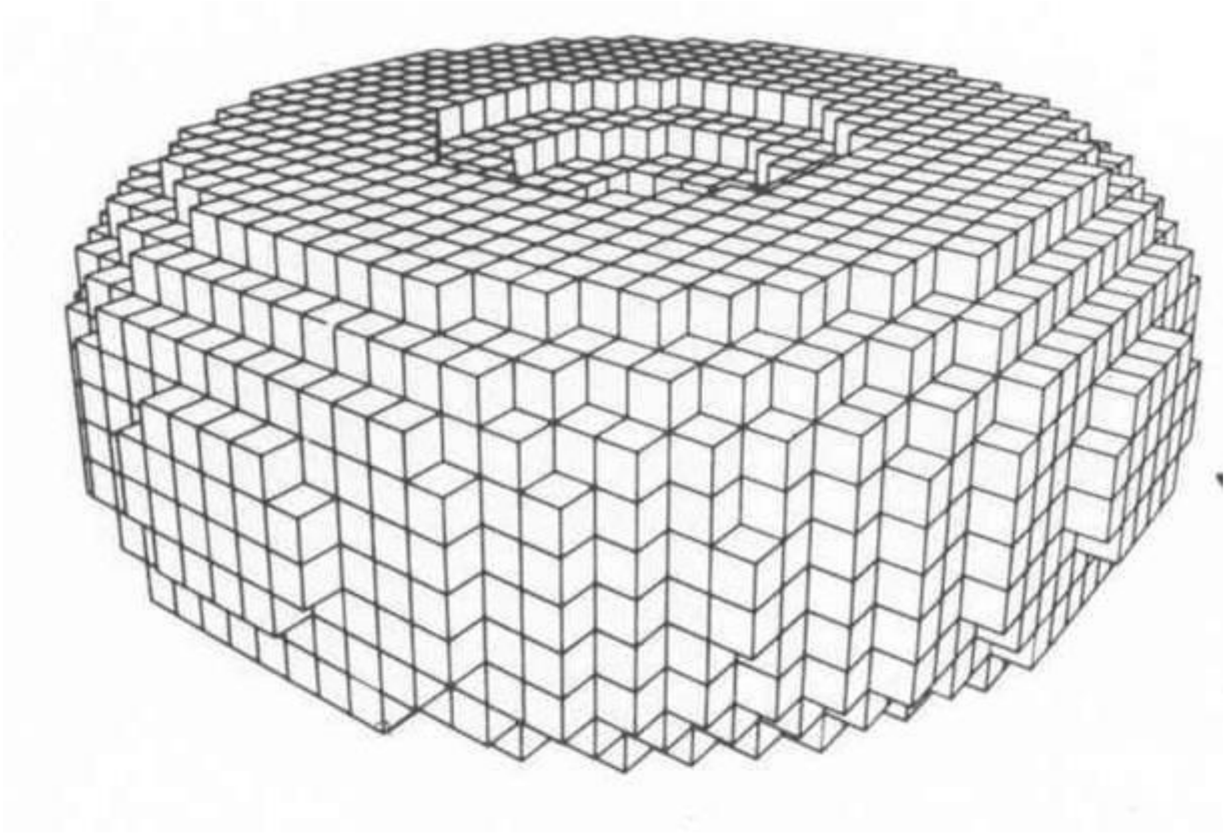
- Dibujar un objeto no es más que estudiar si las celdas están ocupadas (total o parcialmente) o vacías.
- En función del grado de ocupación de las celdas, los métodos de ocupación espacial se diferencian en dos puntos fundamentales:

    ¿Cómo dividir el espacio?.

    ¿Qué hacer cuando se detecta una celda parcialmente ocupada?.

Representación de partición espacial

Método 1: Enumeración de ocupación espacial



Representación de partición espacial

Método 1: Enumeración de ocupación espacial.

- Descompone la escena en un número prefijado de celdas idénticas dispuestas sobre una malla regular fija.
- El tipo más común de celda es el cubo y la representación del espacio como una matriz regular de cubos se denomina cuberil.
- Los objetos se codifican con una lista única y no ambigua de celdas ocupadas.
- No existe el concepto de ocupación parcial.

  Los objetos con superficies curvas sólo pueden aproximarse (falta de precisión).

Representación de partición espacial

Método 1: Enumeración de ocupación espacial.

– Únicamente pueden representarse con exactitud objetos cuyas caras son paralelas a los lados del cubo (en el caso de que las celdas sean cubos) y cuyos vértices corresponden a la malla.

– Las celdas pueden ser tan pequeñas como se desee, ahora bien si aumenta el número de celdas que componen la malla también aumenta el espacio de almacenamiento.

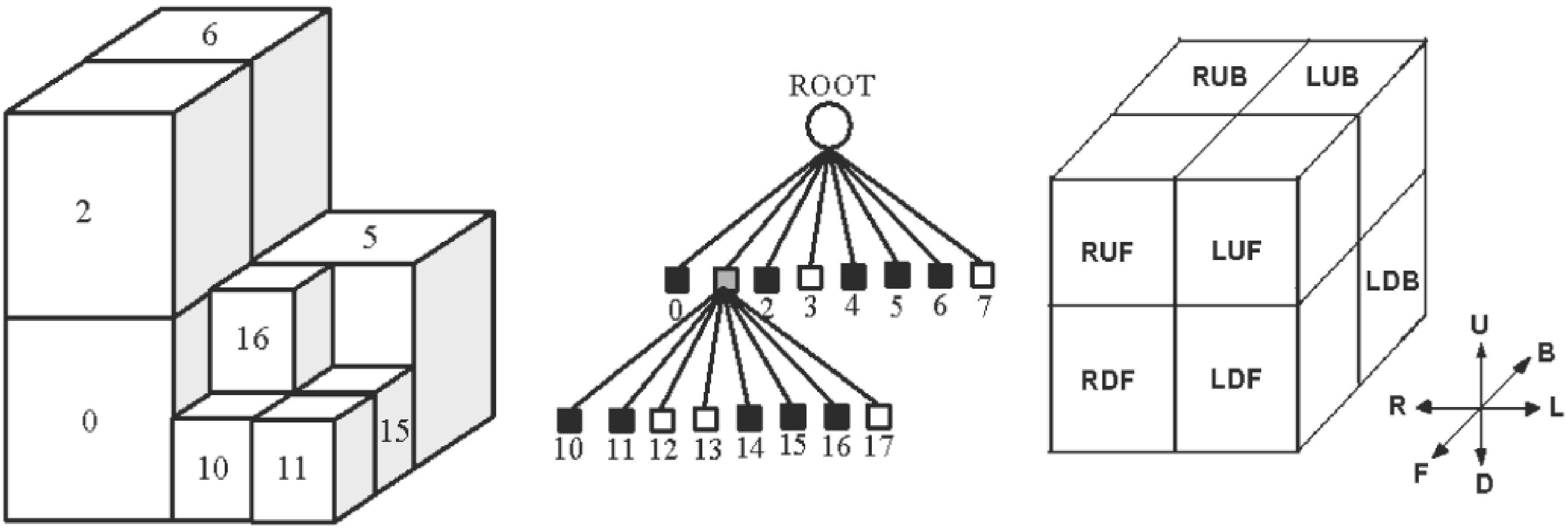
Representación de partición espacial

Método 2: Árboles de octantes (octree).

- Variante jerárquica de la enumeración de ocupación espacial, diseñada para optimizar sus exigentes requisitos de almacenamiento.
- Máxima: "Divide y vencerás."
- Los árboles de octantes se derivan de los árboles de cuadrantes, un formato de representación bidimensional.
- Un árbol de cuadrantes se forma dividiendo sucesivamente un plano bidimensional en sus dos direcciones (X, Y) para formar cuadrantes.
- Cada cuadrante puede estar lleno, parcialmente lleno o vacío.

Representación de partición espacial

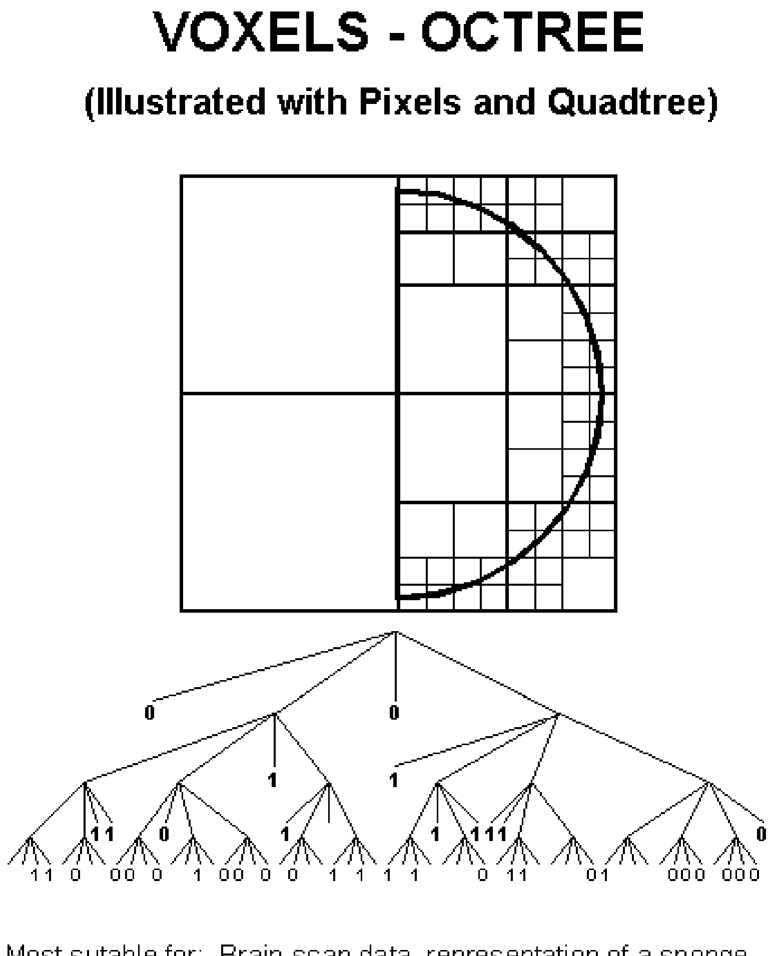
Método 2: Árboles de octantes (octree).



(a) (b) (c)

Representación de partición espacial

Método 2: Árboles de octantes (octree).



Representación de partición espacial

Método 2: Árboles de cuadrantes (quadtree).

- Un cuadrante parcialmente lleno se subdivide recursivamente en subcuadrantes.

  Este proceso de división continúa hasta que todos los cuadrantes sean homogéneos, bien llenos o vacíos (nivel de profundidad).

  Si 4 cuadrantes hermanos están llenos o vacíos se eliminan y su padre se reemplaza por un nodo totalmente lleno o vacío.

  Cualquier nodo parcialmente lleno en la profundidad límite se clasifica como lleno, con lo que tampoco existe el concepto de ocupación parcial, una vez alcanzado el nivel máximo de subdivisión**.**

Representación de partición espacial

Método 2: Árboles de octantes (octree).

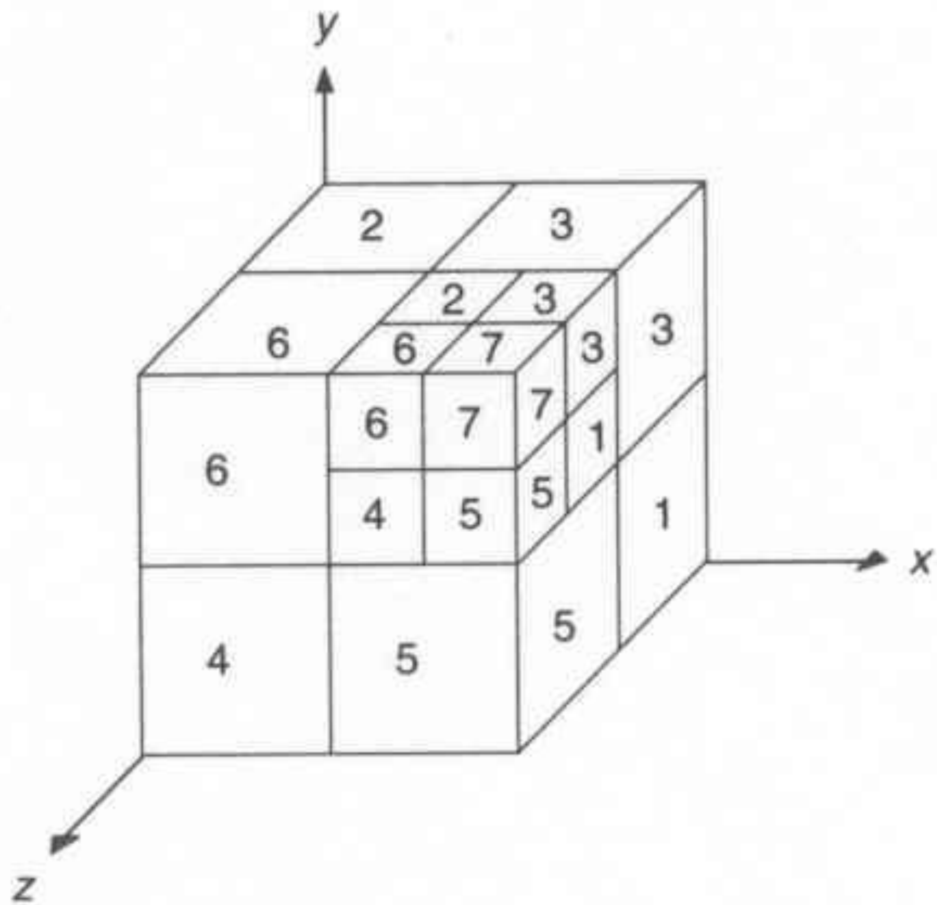
- La idea de los árboles de cuadrantes se generaliza de forma sencilla a tres dimensiones utilizando los árboles de octantes.

- El árbol de octantes es similar al de cuadrantes, excepto que aquel subdivide sus tres dimensiones. De esta forma, se obtiene una descomposición espacial con celdas de distintos tamaños, pudiendo realizarse una gestión más eficaz de la memoria.

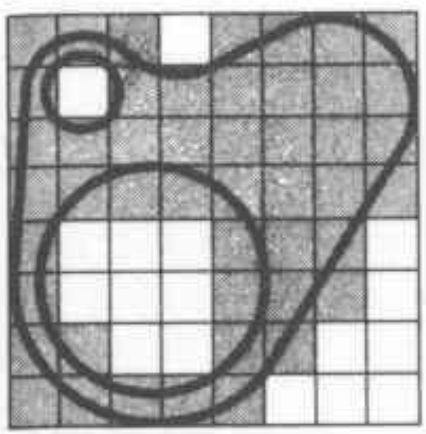
- Se puede demostrar que el número de nodos en una representación del árbol de octantes o de cuadrantes es proporcional a la superficie o al perímetro del objeto.

  La subdivisión de nodos surge exclusivamente por la necesidad de representar la frontera del objeto que se codifica.

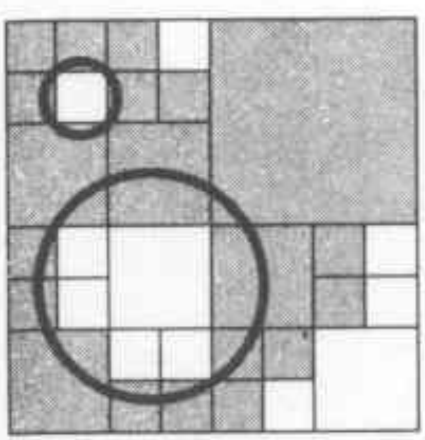
Representación de partición espacial



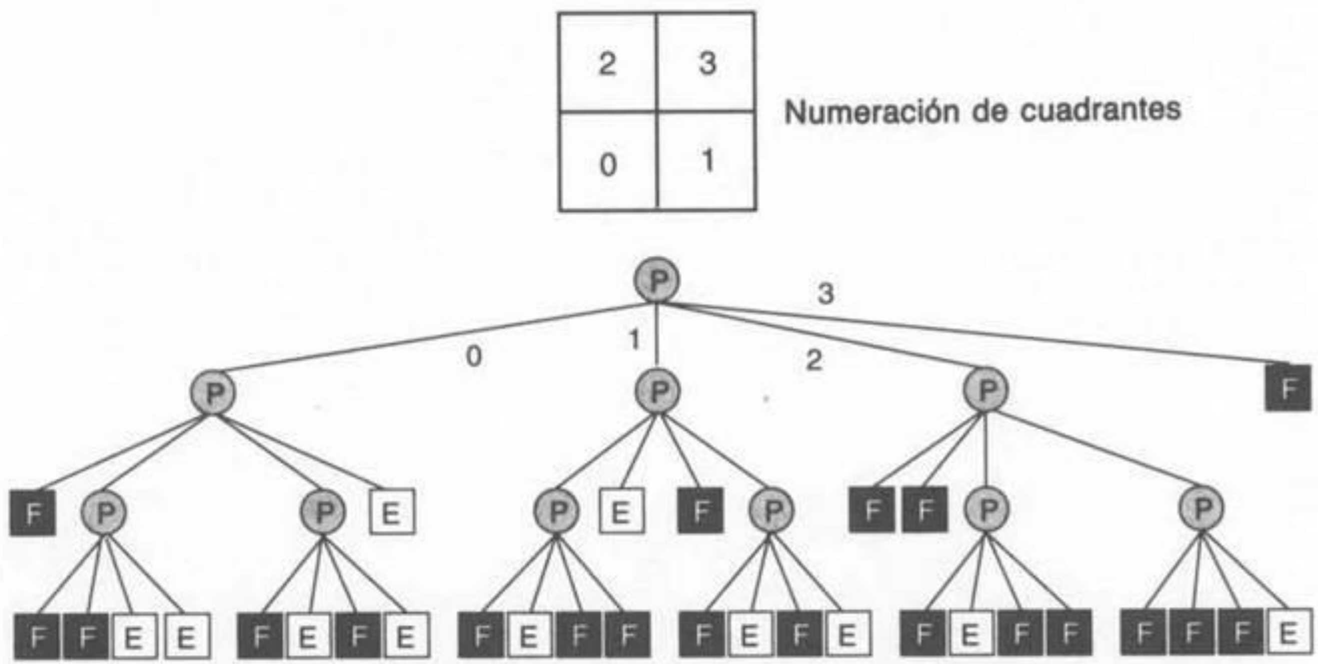
Representación de partición espacial



(a)



(b)



Operaciones booleanas con Representación de partición espacial

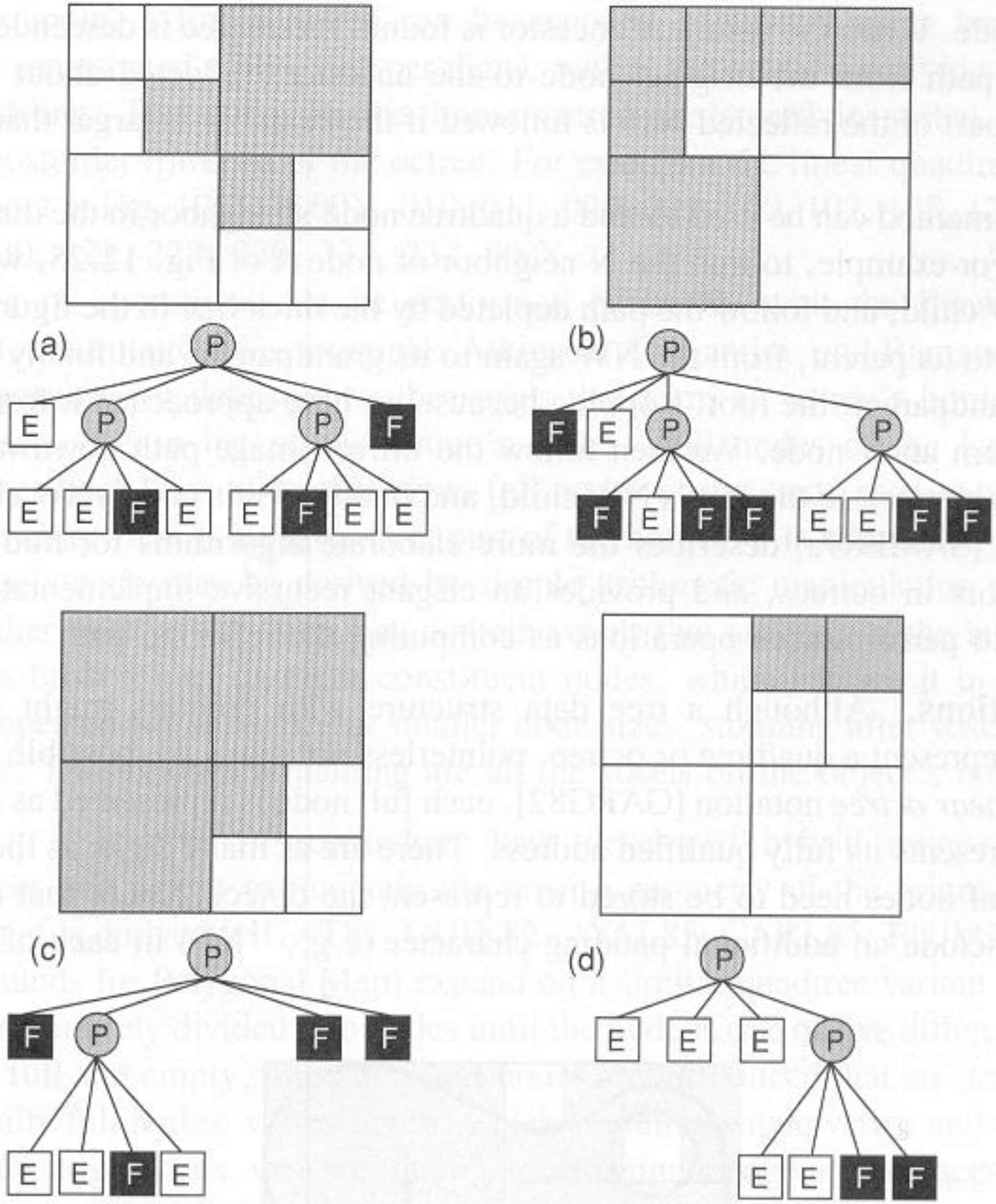


Fig. 12.24 Performing Boolean set operations on quadtrees. (a) Object *S* and its quadtree. (b) Object *T* and its quadtree. (c) $S \cup T$. (d) $S \cap T$.

Geometría sólida constructiva

Geometría sólida constructiva

Las primitivas simples se combinan a través de operadores booleanos de conjunto, incluidos directamente en la representación (AND, OR, NOT).

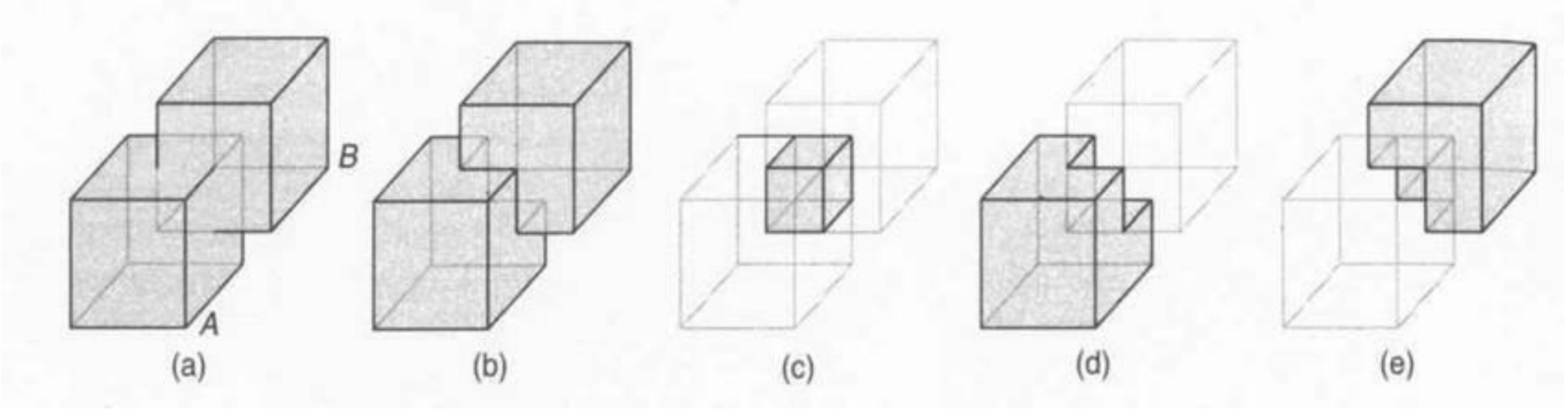
Un objeto se almacena como un árbol binario con operadores en los nodos intermedios y primitivas simples en las hojas.

En algunas implementaciones, las primitivas son sólidos simples, como los cubos o esferas, para asegurar que todas las combinaciones den como resultado sólidos válidos también

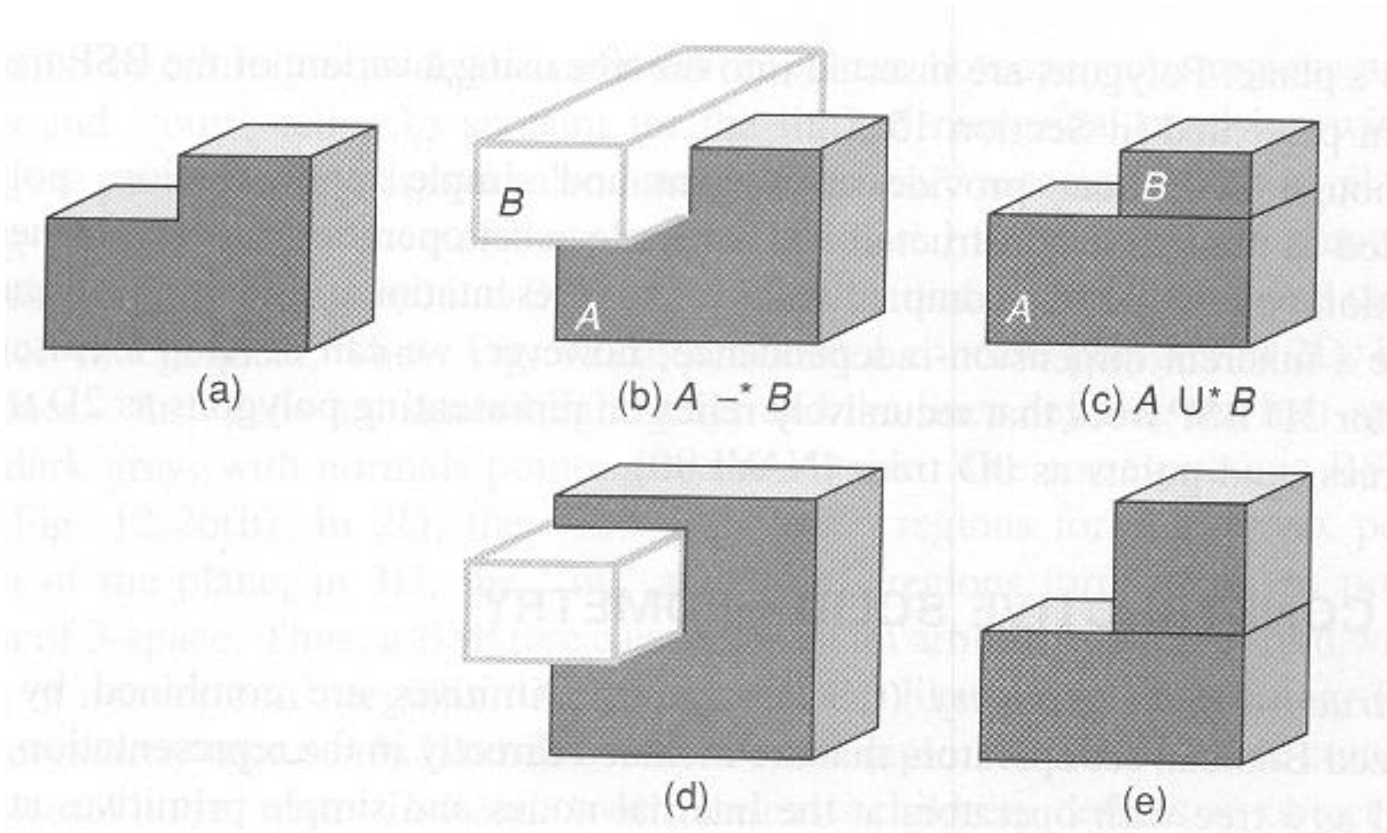
Geometría sólida constructiva

Nos permiten combinar objetos para formar nuevos objetos.

– La aplicación de una operación booleana de conjunto a dos objetos sólidos no necesariamente produce un objeto sólido. Por ejemplo, la intersección ordinaria de dos cubos que se unen en un solo vértice es un punto.

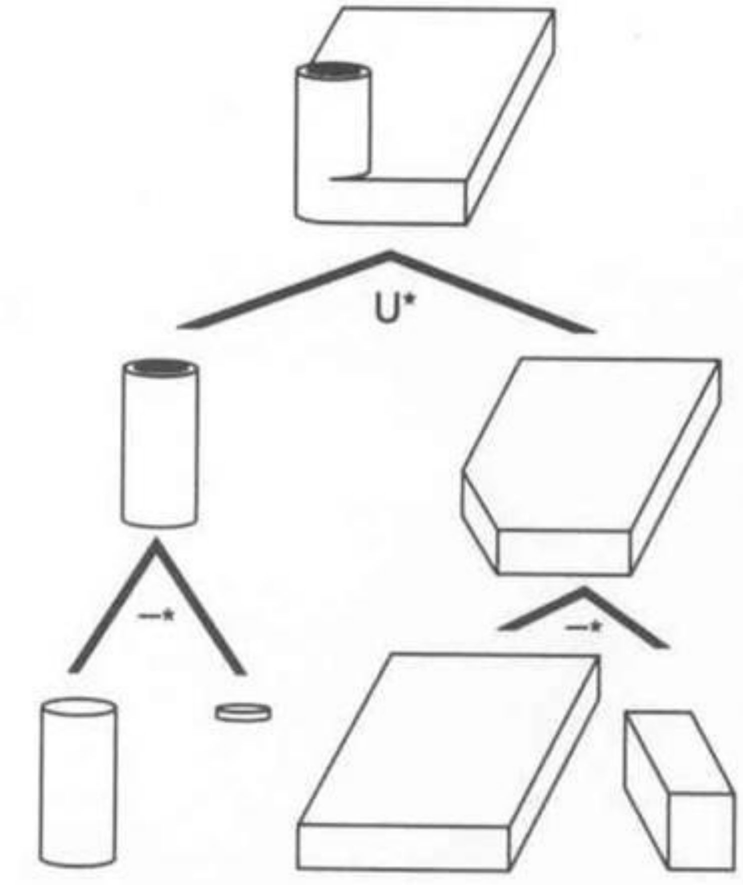


Geometría sólida constructiva



El objeto presentado en (a) se puede definir con varias operaciones CSG, como se ilustra en (b) y (c). El ajuste fino hacia arriba de la cara superior de (b) y (c) produce objetos diferentes, presentados en (d) y (e).

Geometría sólida constructiva



Nodo raíz (objeto)

Nodos intermedios (Operadores)

Primitivas= nodos hoja

Geometría sólida constructiva

En otras implementaciones, las primitivas incluyen semiespacios, que en sí no son sólidos acotados.

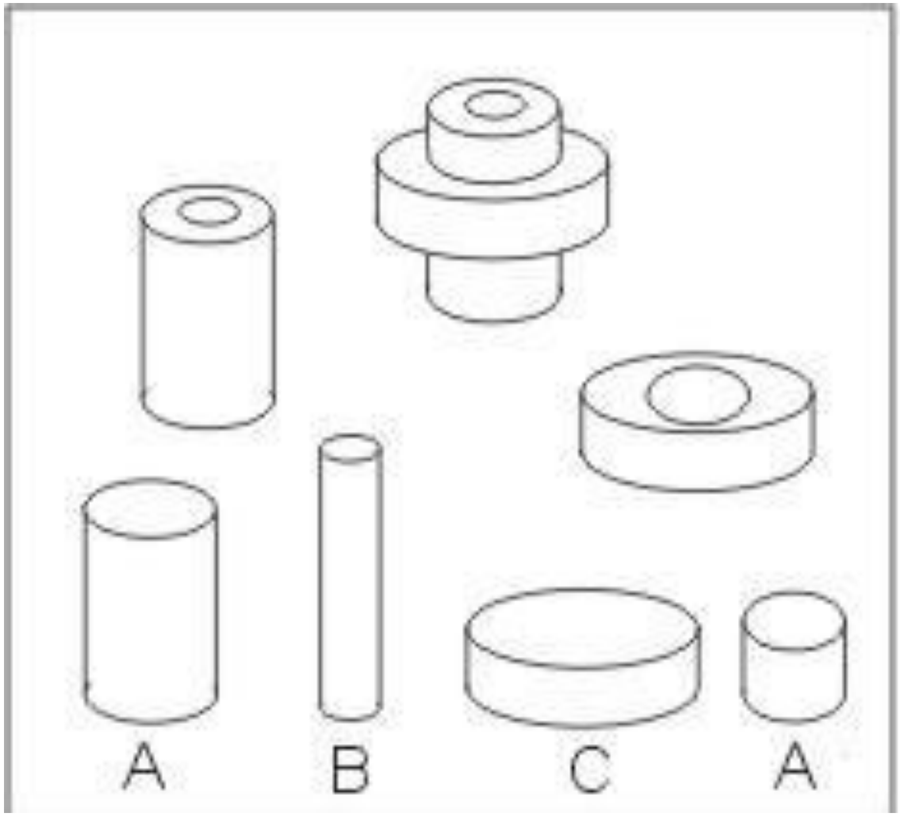
- Por ejemplo, un cubo se puede definir como la intersección de seis semiespacios. Otro ejemplo, un cilindro finito puede definirse como un cilindro infinito limitado en sus extremos por dos semiespacios planos, con forma de circunferencia.

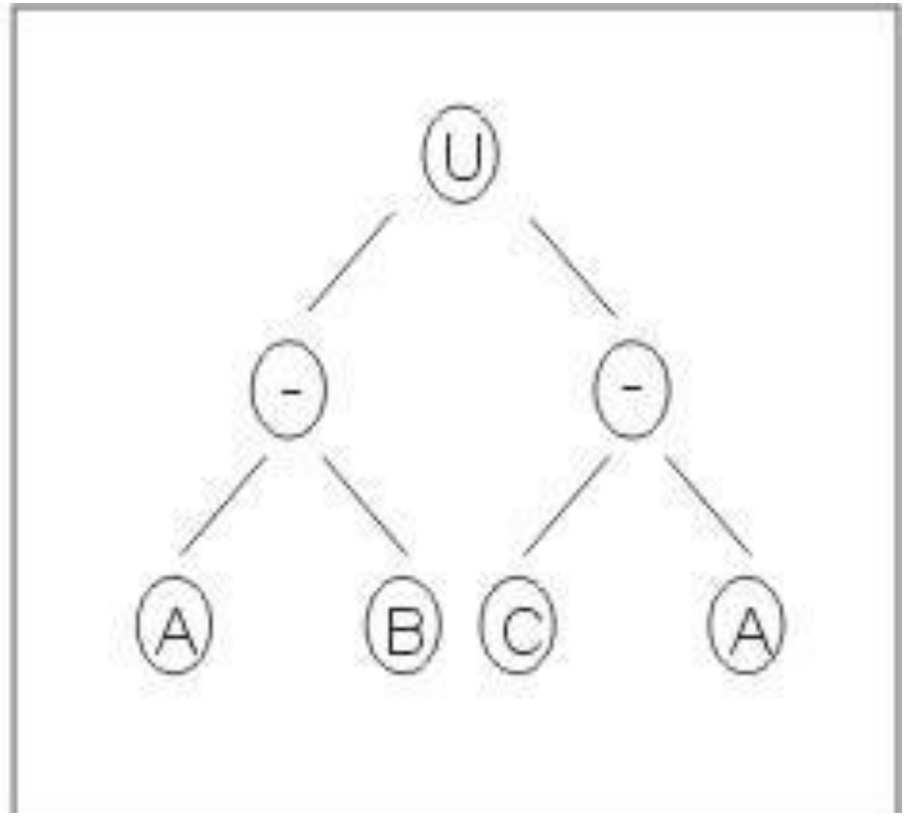
- Problema de validez. No todas las combinaciones producen sólidos válidos.

- Problemas de representación. Los modelos basados en CSG no ofrecen una representación única.

- Al aplicar la misma operación a dos objetos que son inicialmente iguales se pueden generar resultados diferentes.

Geometría sólida constructiva





Geometría sólida constructiva

CSG permite calcular con sencillez las propiedades físicas de los objetos modelados.

- Resuelve con facilidad las interacciones entre objetos.
- Maneja de igual forma superficies curvas y poliédricas.
- Forma natural e intuitiva para el diseño de un gran número de objetos.
- Sin embargo, cada vez que se genera un objeto hay que redibujar el árbol, resolviendo las operaciones booleanas. Consecuencia, la generación de escenas complejas (muchos objetos) puede ser lenta.

FIN