Teoría de Lenguajes

Autómatas con Salida
Autómatas de 2 cintas

Autómatas con Salida

- con los Autómatas Finitos M se verifica si una tira $\boldsymbol{x} \in L(M)$

Reconocedores

- con los Autómatas con Salida, se genera una nueva tira $\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y}$ que incluso puede pertenecer a otro alfabeto

Traductores

Autómatas con Salida (cont.)

- en cada momento, los estados y el símbolo de la entrada, determinan el símbolo que se genera y si existe o no un cambio de estado
- van a existir dos "*buffers*", uno de entrada (como en los AFs) y otro de salida
- Modelos
  - Mealy
  - Moore

Autómata de Mealy

$M : (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$

- Q: conjunto de estados
- Σ: alfabeto de entrada
- Δ: alfabeto de salida
- δ: función de transición / $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ (son ***determinístas***)
- λ: función de salida / $\lambda: Q \times \Sigma \rightarrow \Delta$
- q_o: estado inicial / $q_o \in Q$

Se genera la salida inmediatamente después de computar la entrada, símbolo a símbolo

Autómata de Mealy

Extensión para manejar strings

$$\delta^\wedge : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$$

$$\delta^\wedge(q,\varepsilon) = q \quad \forall\, q \in Q$$

$$\delta^\wedge(q,wa) = \delta\left(\delta^\wedge(q,w),a\right) \quad \forall\, q \in Q \quad a \in \Sigma \quad w \in \Sigma^*$$

$$\lambda^\wedge : Q \times \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$$

$$\lambda^\wedge(q,\varepsilon) = \varepsilon \quad \forall\, q \in Q$$

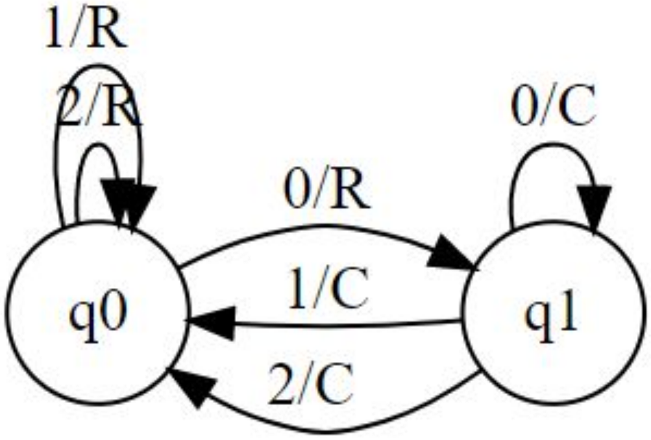
$$\lambda^\wedge(q,wa) = \lambda^\wedge(q,w).\, \lambda\left(\delta^\wedge(q,w),a\right) \quad \forall\, q \in Q \quad a \in \Sigma \quad w \in \Sigma^*$$

Ejemplo Mealy

Dada una tira $x \in \Sigma^*$, siendo $\Sigma = \{0,1,2\}$, escribe **C** si el símbolo anterior es un 0 y **R** en cualquier otra caso

Ejemplos:

1202 → RRRC
001 → RCC
00010 → RCCCR
222120 → RRRRRR



Autómata de Moore

$M : (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$

- Q: conjunto de estados
- Σ: alfabeto de entrada
- Δ: alfabeto de salida
- δ: función de transición / $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ (son ***deterministas***)
- λ: función de salida / $\lambda: Q \rightarrow \Delta$
- q_o: estado inicial / $q_o \in Q$

Se genera la salida dependiendo del estado al cual se llegue después de computar la entrada, símbolo a símbolo

Autómata de Moore

Extensión para manejar strings

δ^: $Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$

δ^ $(q,\varepsilon) = q \quad \forall\, q \in Q$

δ^ $(q,wa) = \delta(\delta\text{^}(q,w),a) \quad \forall\, q \in Q \quad a \in \Sigma \quad w \in \Sigma^*$

λ^: $Q \rightarrow \Delta^*$ entonces....

λ': $Q \times \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$

$\lambda'(q,\varepsilon) = \varepsilon \quad \forall\, q \in Q$

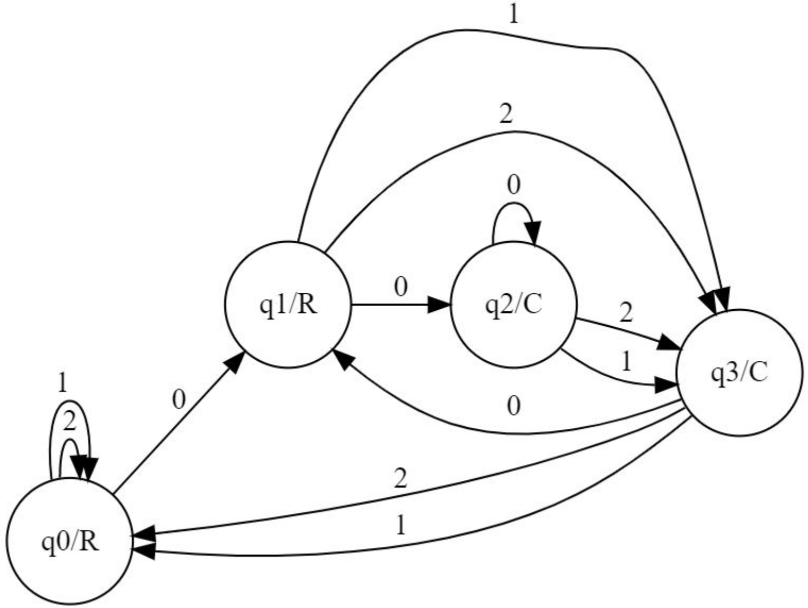
$\lambda'(q,wa) = \lambda'(q,w).\,\lambda(\delta(\delta\text{^}(q,w),a)) \quad \forall\, q \in Q \quad a \in \Sigma \quad w \in \Sigma^*$

Ejemplo Moore

Dada una tira $x \in \Sigma^*$, siendo $\Sigma = \{0,1,2\}$, escribe **C** si el símbolo anterior es un 0 y **R** en cualquier otra caso

Ejemplos:

1202 → RRRC
001 → RCC
00010 → RCCCR
222120 → RRRRRR



Equivalencia Mealy $\Leftrightarrow$ Moore

1) Mealy $\Rightarrow$ Moore

Me : $(Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$ $\rightarrow$ Mo : $(Q', \Sigma, \Delta, \delta', \lambda', q'_0)$

donde si se tiene $\delta(q,a) = p \quad \wedge \quad \lambda(q,a) = b$

se genera lo siguiente:

un estado $p^b \in Q'$ / $\lambda'(p^b) = b \quad \wedge \quad \delta'(q^s,a) = p^b \quad \forall\ q^s,\ s \in \Delta$

Equivalencia Mealy ⇔ Moore

2) Moore $\Rightarrow$ Mealy

$Mo : (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0) \rightarrow Me : (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda', q_0)$

donde si se tiene $\delta(q,a) = p \quad \wedge \quad \lambda(p) = b \quad q,p \in Q,\ a \in \Sigma,\ b \in \Delta$

se genera lo siguiente:

$\lambda'(q,a) = b$

(Notar que el δ es el mismo para ambos autómatas)

Equivalencia de autómatas con salida

- $q_1 \; E \; q_2$ si $\quad \lambda\hat{}(q_1,x) = \lambda\hat{}(q_2,x) \quad \forall \, x \in \Sigma^*$

  de donde se deduce que si $q_1 \; E \; q_2$ entonces $\delta\hat{}(q_1,x) \; E \; \delta\hat{}(q_2,x)$

- $q_1 \; E_n \; q_2$ si $\quad \lambda\hat{}(q_1,x) = \lambda\hat{}(q_2,x) \quad \forall \, x \in \Sigma^* \, , \; |x| = n$

Equivalencia de autómatas con salida

Dadas $M_1 : (Q_1, \Sigma, \Delta, \delta_1, \lambda_1, q_0)$ y $M_2 : (Q_2, \Sigma, \Delta, \delta_2, \lambda_2, p_0)$

- $q \; E \; p$ si $\quad \lambda^\wedge{}_1(q,x) = \lambda^\wedge{}_2(p,x) \quad \forall x \in \Sigma^* \quad q \in Q_1 \quad p \in Q_2$

- $M_1 \; E \; M_2 \Leftrightarrow \forall q \in Q_1 \, , \, \exists p \in Q_2 \; / \; q \; E \; p$

Minimización de autómatas con salida

- Dado un $M : (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0) \rightarrow M' : (Q', \Sigma, \Delta, \delta', \lambda', q'_0)$
- Se tratan de agrupar estados que sean equivalentes de longitud ***n***
- Se basa en la misma idea del algoritmo de AFD
- El tema es ver cual es la partición inicial Π_0
- Π_0 se calcula de la siguiente manera:
  - $\forall\ p,q \in Q$, si se cumple $\lambda(p,a) = \lambda(q,a)\ \forall\ a \in \Sigma$ entonces p y q van a estar en la misma clase en la Π_0
- Luego se aplica para cada conjunto de la Π_0 lo mismo que el algoritmo de minimización de AFD, es decir, $\delta(p,a)$ y $\delta(q,a)\ \ \forall\ a \in \Sigma$ y $\forall\ p,q$ de cada clase

Minimización de autómatas con salida (cont.)

$M' : (Q', \Sigma, \Delta, \delta', \lambda', q'_0)$ queda determinado de la siguiente manera:

- Q': { C_k / cada C_k es una clase de la Π_{final} }
- q'_0: C_k que contiene a q_0
- $\delta'(C_k, a) = C_j$ si $\delta(q,a) = p$ $\quad \forall\, a \in \Sigma$, siendo $q \in C_k$ y $p \in C_j$
- $\lambda'(C_k, a) = \lambda(q,a)$ $\quad \forall\, a \in \Sigma$, siendo $q \in C_k$

Otros formalismos...

- Extensión de Autómatas con Salida, que admiten transiciones epsilon

- Autómatas Finitos Deterministas de 2 cintas, que computan pares de tiras de entrada $<w_1,w_2>$

Autómata Finito Determinista de 2 cintas

Descripción formal del AFD de dos cintas

Un autómata finito determinista de dos cintas es una tupla $M = (Q_1, Q_2, \Sigma, \delta, F, q_0)$ dónde:

- Σ es el alfabeto del autómata
- $q_0 \in (Q_1 \cup Q_2)$ estado inicial del autómata
- $F \subseteq (Q_1 \cup Q_2)$ conjunto de estados finales del autómata
- $\delta : (Q_1 \cup Q_2) \times \Sigma \to (Q_1 \cup Q_2)$ función de transición
- $\delta' : (Q_1 \cup Q_2) \times \Sigma^* \times \Sigma^* \to (Q_1 \cup Q_2)$ función de transición extendida:
  - $\delta'(q_i, ax, y) = \delta'(\delta(q_i, a), x, y)$ si $q_i \in Q_1$
  - $\delta'(q_i, x, ay) = \delta'(\delta(q_i, a), x, y)$ si $q_i \in Q_2$
  - $\delta'(q_i, \epsilon, \epsilon) = q_i$

Un par de tiras $(v, w) \in L(M) \Leftrightarrow \delta'(q_0, v, w) \in F$.

Autómata Finito Determinista de 2 cintas

Aplicación

$L = \{<a^k b^p c^{t-1}, b^{k-1} a c^t>$, con $k,t>0$, $p \geq 0\}$ (Parcial 1 – 2019)