COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE MATERIALES

Propiedades de Áreas

Año 2024

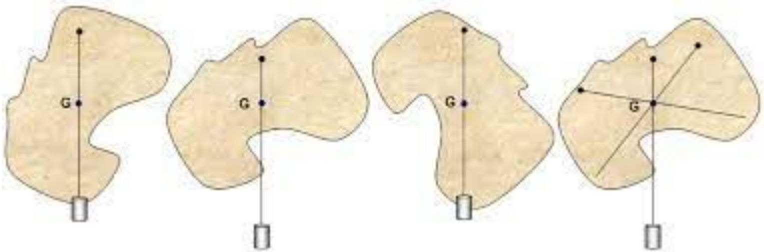
ADMINISTRACIÓN NACIONAL DE EDUCACIÓN PÚBLICA

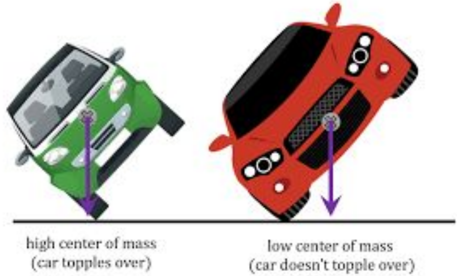
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

INSTITUTO DE INGENIERIA MECANICA Y PRODUCCION INDUSTRIAL

Introducción

Hasta ahora hemos modelado los pesos de los cuerpos como fuerzas puntuales aplicadas en el centro de masa. No obstante, la gravedad es una ***fuerza de atracción distribuida sobre cada partícula del cuerpo.*** Para un cuerpo rígido esta se puede aplicar en el centro de masa. pero… ***¿Dónde se encuentra el centro de masa de un cuerpo?***



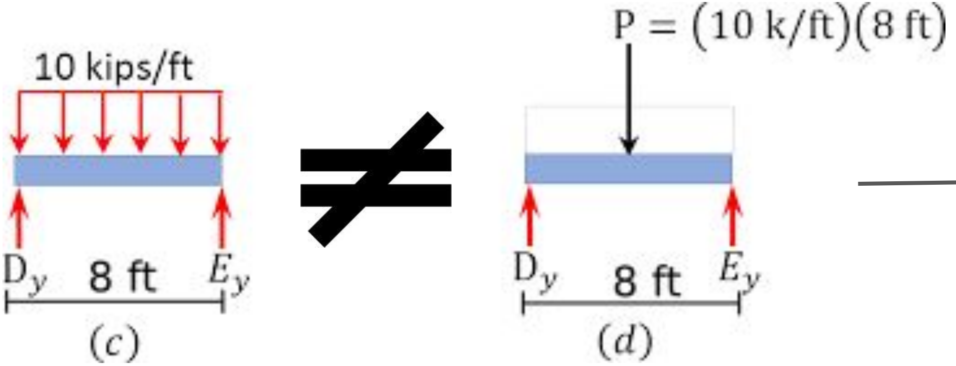


Introducción

La representación del peso como una fuerza puntual es válida **ÚNICAMENTE** *para cuerpos rígidos y el cálculo de reacciones externas en cuerpos deformables.*

Los cuerpos que estudiaremos durante este curso poseen densidad uniforme, por ende las propiedades de masas se traducen en propiedades de área.

Estas propiedades no solo son importantes para determinar el centro de masa de un cuerpo sino que influyen directamente en la ***relación carga-esfuerzo*** (Esto lo veremos más adelante en el curso).



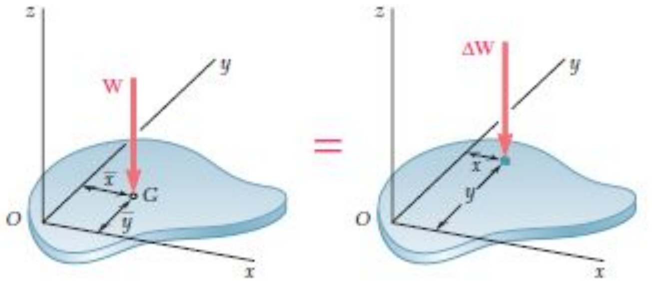
Las deformaciones al interior del cuerpo son diferentes en ambos casos aunque las reacciones Dy y Ey sean idénticas.

Centro de gravedad G de una sección

Asumiendo que el cuerpo presenta una sección transversal constante a lo largo de cierto eje de revolución se define G como el punto donde se concentra el peso total W de la sección.

Para que ambos sistemas sean equivalentes ***el momento neto que ejerce la carga W debe ser idéntico al que ejercen las fuerzas de gravedad sobre cada elemento diferencial*** del elemento. Esto debe cumplirse para los ejes x e y:

$$\Sigma M_y: \quad \bar{x}W = x_1\,\Delta W_1 + x_2\,\Delta W_2 + \cdots + x_n\,\Delta W_n$$
$$\Sigma M_x: \quad \bar{y}W = y_1\,\Delta W_1 + y_2\,\Delta W_2 + \cdots + y_n\,\Delta W_n$$



$$\Sigma M_y: \quad \bar{x}W = \Sigma x\,\Delta W$$
$$\Sigma M_x: \quad \bar{y}W = \Sigma y\,\Delta W$$

Figura 5.1 Centro de gravedad de una placa.

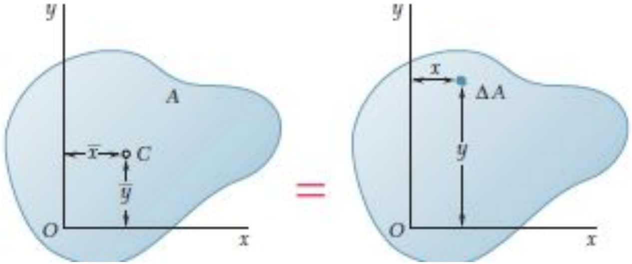
Por lo que el centro de gravedad (o de masa) queda definido:

$$\bar{x} = \frac{x_1\Delta W_1 + x_2\Delta W_2 + x_3\Delta W_3 + \ldots}{W}$$
$$\bar{y} = \frac{y_1\Delta W_1 + y_2\Delta W_2 + y_3\Delta W_3 + \ldots}{W}$$

Como nosotros trabajamos siempre con materiales de densidad uniforme, el centro de masa se encuentra sobre el centroide de la figura: entonces se puede sustituir W por A

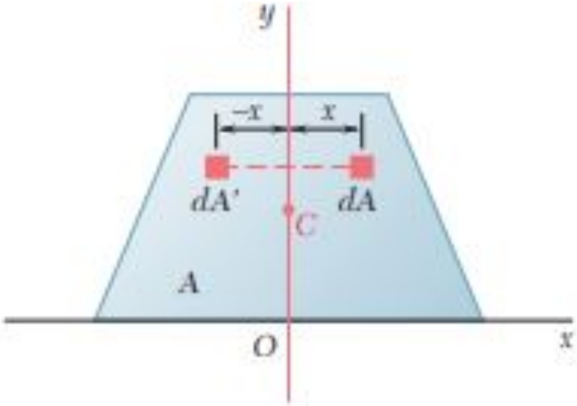
Primer momento de inercia Q

$$Q_y = \int_A x dA \qquad Q_x = \int_A y dA$$



- El momento de inercia mínimo ***en módulo*** ocurre en los ejes centroidales donde el primer momento de inercia es nulo. Se deduce directamente por definición.
- Si un eje es de simetría, entonces, el primer momento de inercia es igual a 0.
- El momento de inercia se calcula rápidamente conociendo su centroide como: $\overline{y}A = Q_x \qquad \overline{x}A = Q_y$

Primer momento de inercia Q



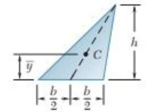
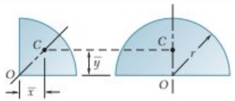
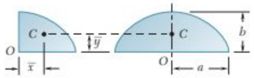
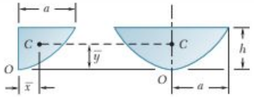
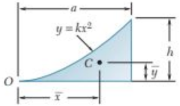
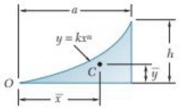
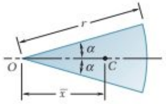
$$Q_y = Q_y^{A1} + Q_y^{A2} = \int_{A1} x dA_1 + \int_{A1} -x dA_1 = 0 \rightarrow y \text{ es de simetria}$$

Es una condición suficiente pero no necesaria. ¿Se te ocurre algún eje de una figura que sea centroidal pero de inercia no nula?

Para su tranquilidad...

- La inmensa mayoría de perfiles se pueden descomponer en figuras que ya se conocen sus centroides.
- Para perfiles I U C o T las los centroides e ***inercias se encuentran tabuladas*** por tablas por lo que no es necesario calcularlas .
- Las tablas se encuentran en la plataforma EVA

¡NO VAMOS A CALCULAR INTEGRALES!

Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Un cuarto de área elíptica		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Área semielíptica		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Enjuta parabólica		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Enjuta general		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
Sector circular		$\frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

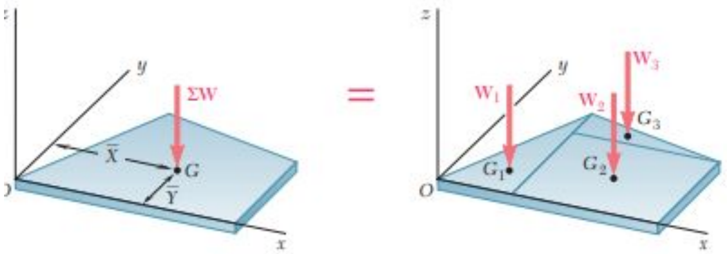
Ejemplo compuesto:

- Supóngase que se quiere calcular el centro de masa de la placa de la figura a la derecha. ***Procedemos a descomponerla en figuras conocidas*** que sepamos su centro de masa y realizamos el ***producto ponderado*** por las distancias.
- Ya vimos que el centro de masa y el centroide para secciones extruidas y de densidad constante coinciden por ende para hallar el centroide de una figura compuesta procedemos aplicando la siguiente fórmula:

$$X_c = \frac{\sum_i^N Q_{yi}}{A_{tot}} = \frac{\sum_i^N \overline{X_i} A_i}{A_{tot}}$$

$$\Sigma M_y: \quad \overline{X}(W_1 + W_2 + \cdots + W_n) = \bar{x}_1 W_1 + \bar{x}_2 W_2 + \cdots + \bar{x}_n W_n$$

$$\Sigma M_x: \quad \overline{Y}(W_1 + W_2 + \cdots + W_n) = \bar{y}_1 W_1 + \bar{y}_2 W_2 + \cdots + \bar{y}_n W_n$$



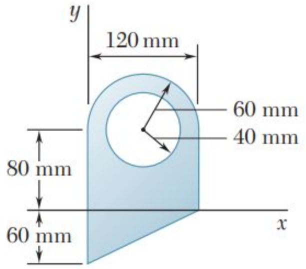
$$\Sigma M_y: \quad \overline{X}\,\Sigma W = \Sigma \bar{x} W$$

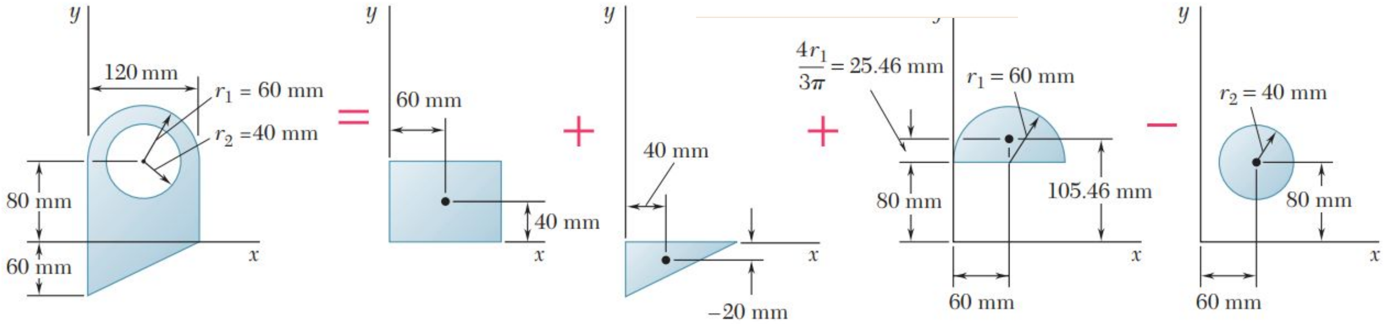
$$\Sigma M_x: \quad \overline{Y}\,\Sigma W = \Sigma \bar{y} W$$

Ejemplo:

Para el área plana mostrada en la figura, determine:

A. Los primeros momentos con respecto a los ejes x e y
B. La ubicación de su centroide.





Componente	A, mm^2	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}A$, mm^3	$\bar{y}A$, mm^3
Rectángulo	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Triángulo	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	-20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
Semicírculo	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
Círculo	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma\bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma\bar{y}A = +506.2 \times 10^3$

Solución:

a) Primeros momentos del área.

$$Q_x = \Sigma \bar{y}A = 506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3 \qquad Q_x = 506 \times 10^3 \text{ mm}^3 \quad \blacktriangleleft$$
$$Q_y = \Sigma \bar{x}A = 757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3 \qquad Q_y = 758 \times 10^3 \text{ mm}^3 \quad \blacktriangleleft$$

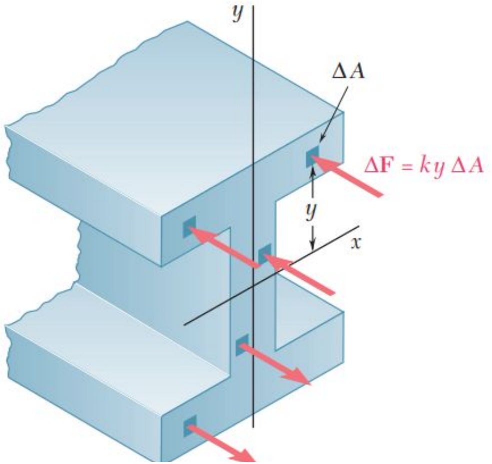
b) Ubicación del centroide. Si se sustituyen los valores dados en la tabla, dentro de las ecuaciones que definen el centroide de un área compuesta se obtiene

$$\bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x}A: \qquad \bar{X}(13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3$$
$$\bar{X} = 54.8 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

$$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y}A: \qquad \bar{Y}(13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3$$
$$\bar{Y} = 36.6 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

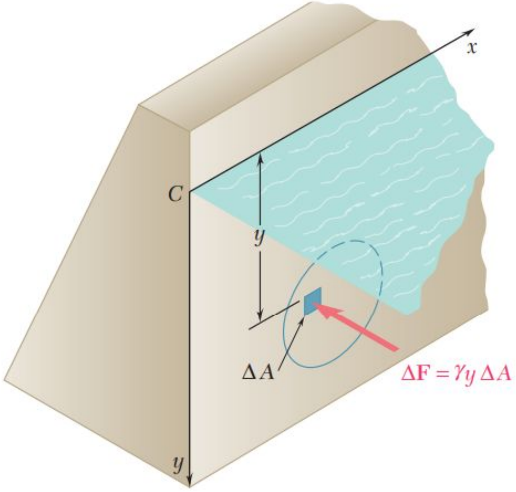
Segundo momento de inercia I

- Anteriormente vimos el vínculo existente entre cargas (momentos), que son proporcionales a la distancia, y que actúan de forma distribuida como el peso. Ahora bien, *¿Qué sucede si además del momento, la fuerza depende de la distancia y se también se aplica de forma uniformemente distribuida*?
- Esto sucede en las vigas a flexión como se ve en la Figura a)
- Esto ocurre en las cargas de hidrostática sobre un cuerpo inmerso en un fluido en reposo.
- Las fuerzas resultantes también se pueden representar en un punto que realice el mismo momento. Esta resultante y momento se pueden hallar mediante la siguientes expresiones:



$$R = \int \gamma y \, dA = \gamma \int y \, dA$$

$$M_x = \int \gamma y^2 \, dA = \gamma \int y^2 \, dA$$



Definición segundo momento de inercia I

Un razonamiento semejante al aplicado anteriormente en momentos de inercia se considera para este caso donde podemos agrupar en la resultante y el momento, términos dinámicos y geométricos. A partir de esto se definen los segundos momentos de inercia para dos ejes x e y.

$$I_y = \int_A x^2 dA \qquad I_x = \int_A y^2 dA$$

Propiedades:

1. Es ***siempre positivo.***
2. Depende fuertemente de los ejes.
3. Es mínimo para los ejes centroidales.

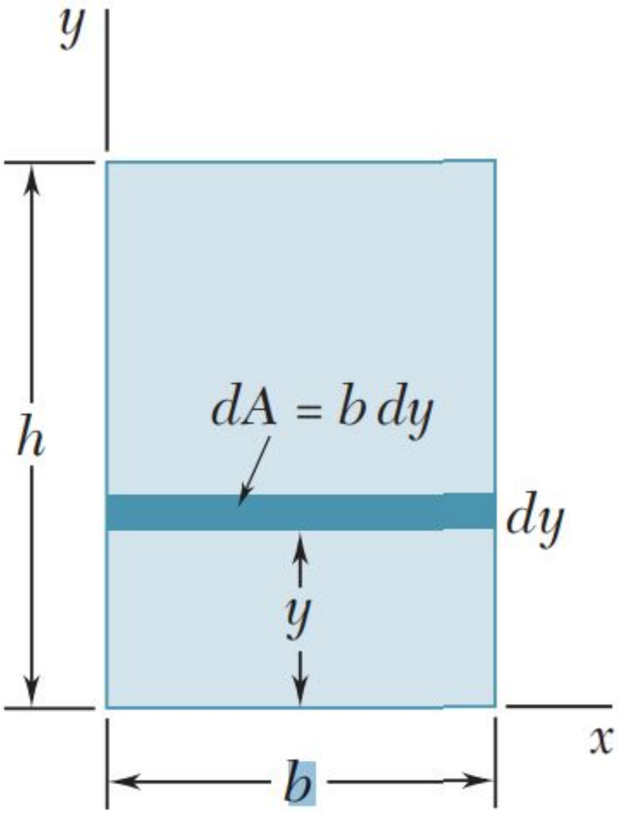
Advertencia! :

En este curso no estudiamos el Círculo de Mohr de Inercias por lo que: $\boxed{\textit{NO SABEMOS ROTAR INERCIAS}}$

Ejemplo rectángulo:

$$dA = b\ dy \qquad dI_x = y^2 b\ dy$$

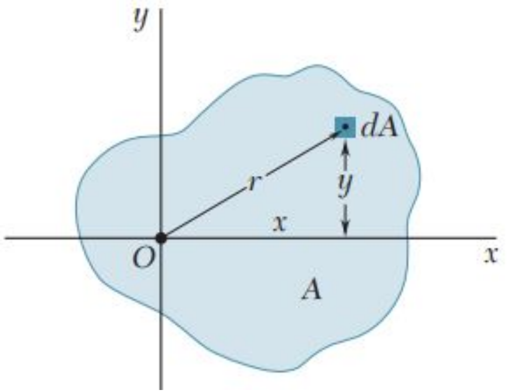
$$I_x = \int_0^h b y^2\ dy = \tfrac{1}{3} b h^3$$



Momento polar de Inercia

En los problemas de torsión aparece una propiedad muy importante en los problemas de torsión es el momento polar de inercia. Este es ***siempre positivo*** y representa ***cómo se distribuye el área respecto a un eje de giro perpendicular al plano que pasa por O.*** Se cálculo como:

$$J_O = \int r^2\, dA = \int (x^2 + y^2)\, dA = \int y^2\, dA + \int x^2\, dA$$



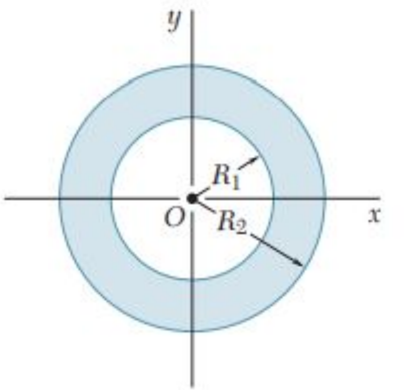
Se puede relacionar con los segundos momentos de inercia respecto a dos ejes perpendiculares x e y según la siguiente expresión:

$$J_o = I_x + I_y$$

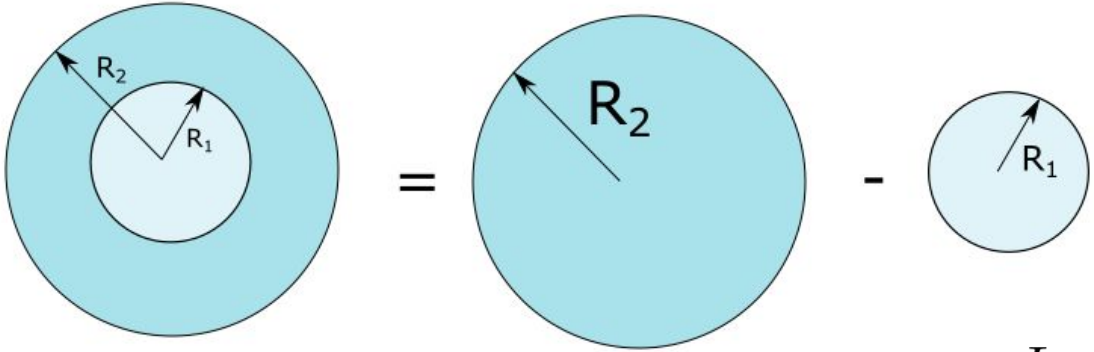
Ejemplo:

Para el área plana mostrada en la figura, determine:

A. El segundo momento de inercia respecto al eje x



La solución consiste en ***descomponer el cuerpo*** según la siguiente figura:



La solución es:

$$I_x = I_y = \frac{\pi R_1^4}{4} - \frac{\pi R_2^4}{4} = \frac{J_0}{2}$$