Comunicaciones Digitales

Práctico 4
Modulación digital pasabanda

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cuál indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil.

✦ Ejercicio 1

Asuma que una línea telefónica está ecualizada para permitir transmitir en el rango de frecuencias de 600 a 3000 Hz con pulsos de Nyquist. Se utilizan pulsos SRRC con el siguiente espectro:

$$P(f) = \begin{cases} \sqrt{T_s} & |f| < \frac{r_s}{2}(1-\alpha) \\ \sqrt{T_s} cos\left(\frac{\pi|f|T_s}{2\alpha} - \frac{\pi(1-\alpha)}{4\alpha}\right) & \frac{r_s}{2}(1-\alpha) < |f| < \frac{r_s}{2}(1+\alpha) \\ 0 & |f| > \frac{r_s}{2}(1+\alpha) \end{cases}$$

(a) Calcular el ancho disponible para la transmisión y la frecuencia central.

(b) Diseñar un sistema QPSK de 2400 bit/seg. Mostrar que el ancho de banda del canal es suficiente para esta señal con $\alpha = 1$. Hallar el ancho de banda de la señal.

(c) Repetir lo anterior para un PSK de 8 fases con una tasa de transferencia de 4800 bit/seg.

✷ Ejercicio 2

Se quiere analizar el desempeño de distintos sistemas de modulación digital trasmitidos en presencia de ruido blanco gaussiano y recibiendo con pulso apareado. El ruido cumple con las hipótesis usuales con densidad espectral de potencia $G_n(f) = \frac{1}{2}\eta$.
En primera instancia se analizará el desempeño de un sistema 16-QAM con la constelación de la Figura 1a.

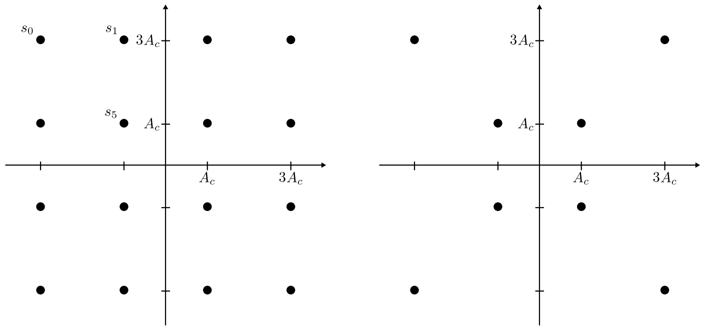
(a) Realizar un diagrama de bloques del sistema completo.

(b) Dibujar las fronteras de las regiones de decisión.

(c) Calcular la probabilidad de recibir correctamente el símbolo s_5 en función de A_c y η.

(d) Repetir la parte anterior para los símbolos s_0 y s_1.

(e) Determinar la probabilidad de error para esta constelación.



(a) (b)

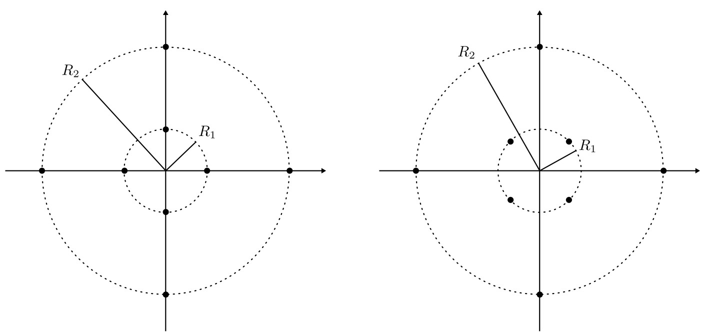
Figura 1

La segunda constelación a evaluar se muestra en la Figura 1b.

(f) Dibujar las fronteras de las regiones de decisión y dar una expresión para la probabilidad de error en este caso.

Se busca comparar el desempeño de las dos constelaciones en la Figura 2 entre sí y respecto a la constelación en la Figura 1b si $R_1 = \sqrt{2}A_c$ y $R_2 = 3R_1$.

(g) ¿Cuál de las constelaciones tiene menor probabilidad de error en las mismas condiciones de transmisión?



(a) (b)

Figura 2

✶Ejercicio 3

Sea un sistema BPSK con $P_0 = P_1$, $s_1(t) = \cos(\omega_0 t)$ y $s_0(t) = -\cos(\omega_0 t)$ y tiempo de bit T_b.

La detección se realiza con un filtro acoplado de respuesta al impulso:

$$h_R(t) = \cos\left(\omega_0 t + \phi\right) \Pi\left(\frac{t}{T_b}\right)$$

donde ϕ es un error de fase constante, y se puede asumir que $\omega_0 T_b = n2\pi$ con $n \in I\!N$.

(a) Calcular el valor de ϕ que aumenta la probabilidad de error del sistema de 2×10^{-3} a 3×10^{-3} correspondiente a que no exista error de fase para un canal que introduce un ruido que se puede modelar como aditivo, blanco y gaussiano, con densidad espectral de potencia $\eta/2$.

Observación : Notar que la fase ϕ se puede interpretar como un *Error de Sincronismo* entre el Receptor y el Transmisor.

(b) Sugerir un sistema Transmisor-Receptor alternativo que sea *inmune* a un error de sincronismo.

(c) Explicar el funcionamiento del sistema sugerido en la parte anterior.

✶Ejercicio 4

La internet de las cosas ya es una realidad en Uruguay hace algunos años, con algunos despliegues de distintas tecnologías como LoRa o NBIoT. El último en desembarcar al país es la empresa Sigfox, con su tecnología del mismo nombre. Como ingeniera en telecomunicaciones de una empresa dedicada al sensado remoto (sobre todo urbano, como ser contaminación sonora y del aire), se le encarga la evaluación de esta tecnología. Naturalmente, comienza estudiando el sentido uplink, por el cual los sensores comunican las medidas a la radiobase, pues es el más interesante para su empresa. En particular, le gustaría verificar si la promesa del representante comercial de Sigfox de 10km de cobertura puede ser cierta.
Desde un punto de vista técnico, Sigfox utiliza BPSK a 600 bps y una potencia total de transmisión de 24 dBm. Como pulso conformador se utiliza un SRRC con factor de rolloff $\rho = 1/3$. Cada transmisión consta de una carga útil de 12 bytes más 12 bytes de preámbulos (i.e. 24 bytes en total). A su vez, cuando un sensor envía una medida, elige tres frecuencias pseudo-aleatoriamente (401 canales de separados 100 Hz y centrados entre 920.780 y 920.820 MHz) y envía el mismo paquete repetido por las tres frecuencias. La radiobase está escuchando en todos los canales.

(a) ¿Cuántos canales no-solapados pueden existir como máximo?

(b) Realice el diagrama completo del par nodo-radiobase. En la etapa de recepción puede enfocarse en un único canal.

(c) ¿Cuál puede ser la máxima densidad espectral de potencia del ruido en recepción si el alcance es realmente de 10 km? Suponga que una probabilidad de error de bit de como máximo 10^{-4} es necesaria. Además, para calcular la atenuación (en dB) podrá usar la siguiente fórmula empírica para entornos urbanos:

$$L(d, f) = 46.32 + 26.07 \log_{10} f + 33.77 \log_{10} d, \qquad (1)$$

con d la distancia en kilometros y f la frecuencia en MHz.

(d) Veamos si es posible aumentar un poco la densidad de potencia máxima hallada en la parte anterior utilizando el envío por triplicado. Suponiendo que la decisión sobre cada bit se hace por votación (i.e. si en dos o más de los tres canales la decisión fue 0, entonces la decisión final será 0; idem para 1), calcule la nueva densidad espectral de potencia máxima. Explicite y justifique las hipótesis necesarias en su cálculo.

(e) El técnico de la empresa representante le indica que en recepción en realidad sí se utilizan las señales de los tres canales, pero a nivel de símbolos: se toman los tres símbolos recibidos, se realiza la suma, y con eso se toma la decisión. Calcule la nueva densidad espectral de potencia máxima, y nuevamente explicite y justifique las hipótesis necesarias en su cálculo.

✶Ejercicio 5

Se quiere implementar un enlace de microondas que utilice QPSK como esquema de modulación, entre el estadio Centenario y un canal de televisión ubicado a 5 km de distancia. La señal transmisida será

$$x_c(t) = \sum_k a_k p(t - kTs)cos(2\pi f_c t + \phi) - \sum_k b_k p(t - kTs)sen(2\pi f_c t + \phi),$$

con $\{a, b\}_k$ tomando valores 1 y -1 para transmitir 1 y 0 respectivamente. En recepción se agrega ruido blanco y gaussiano, de media nula y densidad espectral de potencia $\frac{\eta}{2}$. El transmisor utiliza pulsos de Nyquist con roll-off factor 20 %, el ancho de banda disponible para la transmisión es 60 MHz y el receptor utiliza pulsos apareados.

(a) Realice un diagrama de bloques del sistema completo.

(b) Los enlaces de microondas requieren línea de vista e idealmente no sufren de multicamino. Si $f_c = 10\ GHz$, calcule la atenuación por espacio libre y dé una expresión para $h(t)$, la respuesta al impulso del canal. Halle una expresión para la respuesta en frecuencia del canal.

(c) Calcule el valor máximo de η si la potencia transmitida $S_T = 10\ W$ y se quiere tener una probabilidad de error de bit inferior a 10^{-4}.

(d) En algunos casos no ideales (por ejemplo en la presencia de lagos en el camino) puede generarse multicamino debido a algún rayo reflejado. ¿Qué distancia debe recorrer el rayo secundario para que en recepción haya un retraso de 2 μs? ¿A cuántos símbolos corresponde? ¿Qué problema ve con que suceda esto?

(e) Calcule la atenuación del rayo secundario y dé una nueva expresión para $h(t)$, la respuesta al impulso del canal. Halle una expresión para la respuesta en frecuencia del canal.

(f) ¿Qué espera de la respuesta en frecuencia anterior si se comienzan a sumar nuevos caminos en recepción?

Solución

Ejercicio 1

(a) El ancho de banda del canal es $3000\ Hz - 600\ Hz = 2400\ Hz$, con frecuencia media $f_c = \frac{600\ Hz + 3000\ Hz}{2} = 1800\ Hz$.

(b) Primero que nada, selecciono la frecuencia de la portadora igual a la frecuencia media del canal, es decir, $f_c = 1800\ Hz$.

Además, sé que $r_b = 2400\ bit/s$, y como se transmiten $log_2(4) = 2$ bits por símbolo, se tendrá que $r_s = \frac{2400\ bit/s}{2\ bit/símb} = 1200\ símb/s$.

El ancho de banda de la señal (**que es una señal pasabanda**) es $B_T = r_s(1 + \alpha)$.

Como debe cumplirse que $B_{canal} \geq B_T$, entonces $2400 \geq 1200(1 + \alpha)$, o, lo que es lo mismo, $\alpha \leq 1$, como quería probar.

En consecuencia, el ancho de banda de la señal que transmitiré será $B_T = 2400\ Hz$.

(c) Nuevamente, considero la frecuencia de la portadora en $1800\ Hz$.

En este caso, $r_b = 4800\ bit/s$, y se transmiten $\log_2(8) = 3$ bits por símbolo, por lo que $r_s = \frac{4800\ bit/s}{3\ bit/símb} = 1600\ símb/s$.

El ancho de banda de la señal será $B_T = r_s(1 + \alpha) = 1600(1 + \alpha)$, y debe cumplirse que $B_{canal} \geq B_T$, por lo que se tendrá que verificar la condición $2400 \geq 1600(1 + \alpha)$ que equivale a que se cumpla $\alpha \leq 0.5$.

Ejercicio 2

(a) El diagrama se presenta en la figura 3. Asumimos símbolos equiprobables, y que el muestreo se realiza en el instante óptimo.

(b) Asumiendo símbolos equiprobables, y con el dato de que el ruido es blanco y gaussiano, las regiones de decisión de cada símbolo son los puntos para los cuales el símbolo en cuestión es el más cercano de los 16. En este caso, resulta en los que se muestran en la figura.

(c) Definiendo S como el símbolo enviado (en este caso fijo en s_5), Y_i e Y_q como los números (aleatorios) en fase y cuadratura obtenidos del filtro de recepción, y por las hipótesis ya mencionadas (en particular, las referidas al

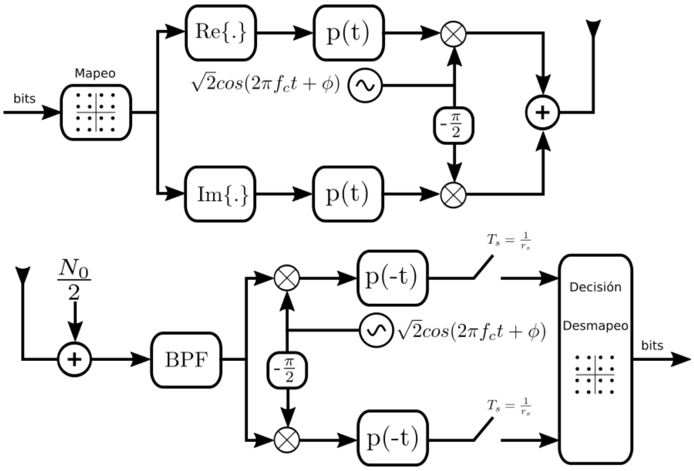


Figura 3: Diagrama de bloques de un sistema 16QAM.

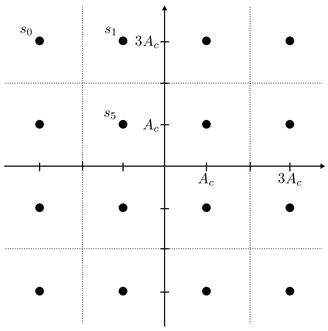


Figura 4: Regiones de decisión para la constelación de la figura 1a.

ruido), en este caso la probabilidad de recibir correctamente s_5 resulta

$$\begin{aligned}
P(\text{éxito} \,|\, S = s_5) &= P(-2A_c < Y_i < 0; 0 < Y_q < 2A_c \,|\, S = s_5) \\
&= P(-2A_c < Y_i < 0 \,|\, S = s_5)P(-2A_c < Y_q < 0 \,|\, S = s_5) \\
&= [1 - P(Y_i < -2A_c \cup Y_i > 0 \,|\, S = s_5)] \cap [1 - P(Y_q > 2A_c \cup Y_q < 0 \,|\, S = s_5)] \\
&= \left(1 - 2Q\left(\frac{A_c}{\sigma}\right)\right)^2.
\end{aligned}$$

Al recibir con pulso apareado, es posible ver que $\sigma^2 = \frac{\eta}{2}$, finalmente:

$$P(\text{éxito} \,|\, S = s_5) = \left(1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{2A_c^2}{\eta}}\right)\right)^2.$$

(d) Para el símbolo s_0 resulta, de manera similar a lo anterior:

$$
\begin{aligned}
P(\text{éxito}\,|\,S=s_0) &= P(Y_i<-2A_c;Y_q>2A_c\,|\,S=s_0) = \\
&= P(Y_i<-2A_c\,|\,S=s_0)P(Y_q>2A_c\,|\,S=s_0) \\
&= \left(1-Q\left(\sqrt{\frac{2A_c^2}{\eta}}\right)\right)^2,
\end{aligned}
$$

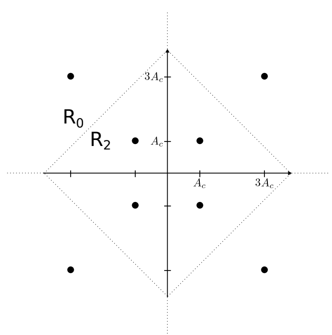
y para el símbolo s_1:

$$
\begin{aligned}
P(\text{éxito}\,|\,S=s_1) &= P(-2A_c<Y_i<0;Y_q>2A_c\,|\,S=s_0) \\
&= P(-2A_c<Y_i<0\,|\,S=s_0)P(Y_q>2A_c\,|\,S=s_0) \\
&= \left(1-2Q\left(\sqrt{\frac{2A_c^2}{\eta}}\right)\right)\left(1-Q\left(\sqrt{\frac{2A_c^2}{\eta}}\right)\right).
\end{aligned}
$$

(e) En este caso no puedo asumir que se envíe algún símbolo en particular, por lo que asumiremos, al igual que en la primera parte, que los símbolos son equiprobables. Además, la constelación y el ruido tienen una cierta simetría: por ejemplo, la probabilidad de error es igual para los símbolos $(s_0, s_3, s_{12}, s_{15})$, así como para los símbolos $(s_1, s_2, s_4, s_7, s_8, s_{11}, s_{13}, s_{14})$ y (s_5, s_6, s_9, s_{10}). Como ya tenemos calculadas las probabilidades de éxito para los símbolos s_0, s_1 y s_5, tenemos:

$$
\begin{aligned}
P(\text{error}) = 1-P(\text{éxito}) &= 1-\sum_{i=0}^{15} P(\text{éxito}\,|\,S=s_i)P(S=s_i) \\
= 1-\frac{4}{16}P(\text{éxito}\,|\,S=s_5) &- \frac{4}{16}P(\text{éxito}\,|\,S=s_0)-\frac{8}{16}P(\text{éxito}\,|\,S=s_1).
\end{aligned}
$$

(f) Las región de decisión de cada símbolo, haciendo las mismas hipótesis que en la primera parte, son los puntos más cercanos al símbolo en cuestión respecto al resto. En este caso, se pueden obtener de trazar las mediatrices entre los símbolos más cercanos, resultando en las que se muestran en la figura:



Para hallar la probabilidad de error se razona de la misma manera que en la parte anterior. En particular, por simetría tenemos dos grupos de símbolos con la misma probabilidad de error: los “interiores” y los “exteriores”. Siguiendo la numeración de las partes anteriores para los símbolos, tenemos entonces la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
P(\text{error}) = 1 - P(\text{éxito}) &= 1 - \sum_{i=0}^{7} P(\text{éxito} \,|\, S = s_i) P(S = s_i) \\
&= 1 - \frac{4}{8} P(\text{éxito} \,|\, S = s_0) - \frac{4}{8} P(\text{éxito} \,|\, S = s_2),
\end{aligned}
$$

donde

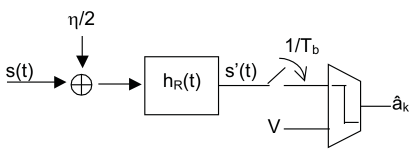
$$
\begin{aligned}
P(\text{éxito} \,|\, S = s_0) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{(x,y)\in R_0} e^{\frac{(x+3A_c)^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{(y-3A_c)^2}{2\sigma^2}} dxdy \\
P(\text{éxito} \,|\, S = s_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{(x,y)\in R_2} e^{\frac{(x+A_c)^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{(y-A_c)^2}{2\sigma^2}} dxdy
\end{aligned}
$$

con $\sigma^2 = \eta$ y R_0 y R_2 son las regiones de decisión de los símbolos s_0 y s_2 (marcadas en la figura) respectivamente. Esta es una expresión exacta de la probabilidad de error, donde la integral no será fácil de evaluar. Existe la posibilidad de realizar varias aproximaciones. Por ejemplo, si suponemos que la SNR es relativamente alta, podemos asumir que realizará un error para un símbolo en particular decidiendo únicamente por el/los símbolos más cercanos. Por ejemplo, para s_2 asumir que el error será por "confundirlo" en recepción con s_3 y s_4 y despreciando las otras posibilidades.
Tanto la expresión exacta como una aproximación debidamente justificada se toman como correctas.

(g) La primer constelación es la misma que se analizó en el ejercicio anterior, a excepción de un giro de $\pi/4$. Como el ruido es simétrico respecto a un giro, el desempeño es el mismo. La segunda constelación tiene los símbolos "interiores" más alejados de los "exteriores", por lo que tendrá una menor probabilidad de error.

Ejercicio 3

(a) El sistema que se tiene es como el de la figura.



Entonces, $s'(t) = (s(t) + n(t)) * h_R(t)$. Si transmití $'1'$, entonces $s(t) = s_1(t) = \cos(\omega_0 t)$, mientras que si transmití $'0'$, $s(t) = s_0(t) = -\cos(\omega_0 t)$. En consecuencia, se analizará sólo uno de los casos ya que el resultado para el caso restante será idéntico a menos del signo.

El análisis se hará para el caso de haber transmitido un $'1'$:

$$\begin{aligned}
s_1'(t) &= s_1(t) * h_R(t) + \underbrace{n(t) * h_R(t)}_{\hat{n}(t)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_0 \tau) \Pi\left(\frac{u}{T_b}\right) \cos(\omega_0(\tau - t) + \phi) d\tau + \hat{n}(t) \\
&= \int_{-\frac{T_b}{2}}^{+\frac{T_b}{2}} \cos(\omega_0 \tau) \cos(\omega_0(\tau - t) + \phi) d\tau + \hat{n}(t) \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{T_b}{2}}^{+\frac{T_b}{2}} [\cos(2\omega_0 \tau - \omega_0 t + \phi) + \cos(\omega t - \phi)] d\tau + \hat{n}(t).
\end{aligned}$$

En el resultado anterior es posible ver que la integral de $\cos(2\omega_0\tau - \omega_0 t + \phi)$ entre $\pm\frac{T_b}{2}$ vale cero por estar integrando en un número entero de períodos. El segundo término es una constante, ya que no depende de la variable de integración. Por lo tanto

$$s_1'(t) = \frac{T_b}{2} \cos(\omega t - \phi) + \hat{n}(t),$$

y si tomamos muestras en el instante óptimo ($t = 0$), obtenemos que

$$s_1'(0) = a_k^1 = \frac{T_b}{2} \cos(\phi) + \hat{n}_k,$$

con $\hat{n}_k$ una V.A. discreta con media nula y varianza que calcularemos a continuación. Véase que el análisis en caso de haber transmitido un $'0'$ es análogo y el resultado hubiera sido el mismo, pero con el signo opuesto:

$$s_0'(0) = a_k^0 = -a_k^1 = -\frac{T_b}{2} \cos(\phi) + \hat{n}_k$$

Hallamos ahora sí la potencia del ruido, que por tener media cero coincide con su varianza σ^2:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 G_n(f) df \\
&= \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df \\
&= \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |h_R(t)|^2 dt \\
&= \frac{\eta}{2} \int_{-\frac{T_b}{2}}^{+\frac{T_b}{2}} \underbrace{\cos^2(\omega_0 t + \phi)}_{\frac{1+\cos(2\omega_0 t + 2\phi)}{2}} dt \\
&= \frac{\eta T_b}{4}
\end{aligned}$$

Podemos ahora plantear la probabilidad de error para BPSK como la conocemos:

$$P_e = \left(\frac{A}{\sigma}\right),$$

donde A en este caso corresponde a $\frac{T_b}{2}\cos(\phi)$, y $\sigma^2 = \frac{\eta T_b}{4}$. Por lo tanto:

$$P_e = \left(\sqrt{\frac{T_b}{\eta}} \cos(\phi) \right).$$

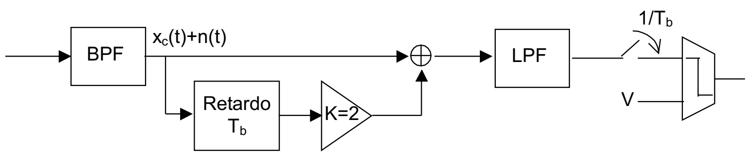
Si $\phi = 0$ (no hay error de sincronismo), sé que $P_e = Q(C) = 2 \times 10^{-3}$. Luego, debo encontrar qué valor de k hace que $Q(kC) = 3 \times 10^{-3}$.

De la forma de la cola gaussiana, se tiene que el valor de C que satisface $Q(C) = 2 \times 10^{-3}$ es de aproximadamente 2.8, mientras que el valor de kC que satisface $Q(kC) = 3 \times 10^{-3}$ es de aproximadamente 2.7. Luego, $\cos(\phi) = \frac{kC}{C} = \frac{2.7}{2.8} \approx 0.964$, por lo que se debe cumplir que $\cos(\phi) = 0.964$. Finalmente $\phi \approx 15.4°$.

(b) Dado que en BPSK la información del mensaje reside en la fase, es imposible hacer una detección no coherente. Sin embargo, hay una solución diferente, la de DPSK (Diferentially Coherent PSK), que permite independizarse de los errores de sincronismo.

(c) La idea de este sistema consiste en multiplicar en recepción por la propia señal que llega, retrasada un tiempo igual a T_b, en lugar de hacerlo por una sinusoide sincronizada (donde se pueden introducir errores de sincronismo).

De esta forma, se tiene el sistema receptor de la figura:



La señal que llega es: $x_c(t) = A_c p_{T_b}(t - kT_b)\cos(\omega_c t + \phi + a_k\pi)$, con $a_k = 0$ o 1, y t variando entre kT_b y $(k+1)T_b$.

Si no hay ruido, el producto en el k-ésimo intervalo queda:

$$2x_c(t)x_c(t - T_b) = 2A_c^2 \cos(\omega_c t + \phi + a_k\pi)\cos(\omega_c(t - T_b) + \phi + a_{k-1}\pi)$$

$$= 2A_c^2 \left[\frac{\cos(\omega_c T_b + (a_k - a_{k-1})\pi) + \cos(2\omega_c t - \omega_c T_b + 2\phi + (a_k + a_{k-1})\pi)}{2} \right]$$

$$\overset{\omega_c T_b = 2\pi n}{=} A_c^2[\cos((a_k - a_{k-1})\pi) + \cos(2\omega_c t + 2\phi + (a_k + a_{k-1})\pi)]$$

$$\overset{LPF}{=} A_c^2 \cos((a_k - a_{k-1})\pi)$$

Entonces, a la salida del LPF tendremos una señal de valor A_c^2 si $a_k = a_{k-1}$, y de valor $-A_c^2$ si $a_k \neq a_{k-1}$.

Si hacemos codificación diferencial en el transmisor, luego la secuencia se puede reconstruir directamente de los valores a la salida del receptor.

Hacer codificación diferencial implica considerar un valor de a_k inicial cualquiera (por ejemplo, $a_0 = 1$), y luego a partir de ese momento, se envían los bits m_k con el criterio de que si $a_k = a_{k-1}$, entonces $m_k = 1$, y si $a_k \neq a_{k-1}$, entonces $m_k = 0$.

De esta forma, si en detección obtengo A_c^2, sé que $m_k = 1$, mientras que si obtengo $-A_c^2$, sé que $m_k = 0$.

Ejercicio 4

(a) El ancho de banda de cada canal será

$$B_T = r_s(1+\alpha) = 600 \text{ bauds}(1+\frac{1}{3}) = 800\ Hz,$$

en tanto que el ancho de banda disponible para la transmisión será

$$B_{TOTAL} = 920820400\ Hz - 920779600\ Hz = 40800\ Hz.$$

Es posible entonces tener 51 canales no solapados.

(b) Ver figura 5.

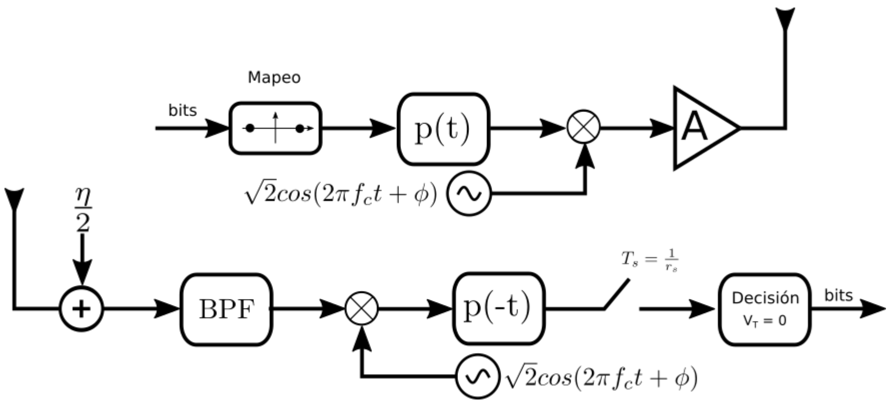


Figura 5: Diagrama completo del par nodo-radiobase.

(c) En una transmisión BPSK la probabilidad de error de bit es

$$P_{eb} = Q\left(\frac{\sqrt{E_S}}{\sqrt{L}\sigma}\right),$$

como transmitimos y recibimos con un SRRC se cumple que

$$\sigma^2 = \frac{\eta}{2}$$

Por otro lado, como la relación entre la energía de símbolo y la potencia transmitida es $S_T = E_S.r_s$, la letra nos pide cumplir con la siguiente desigualdad:

$$P_{eb} = Q\left(\frac{\sqrt{S_T}}{\sqrt{r_s\frac{\eta}{2}L}}\right) \leq 10^{-4},$$

o lo que es lo mismo

$$\sqrt{\frac{2.S_T}{r_s\eta L}} \geq Q^{-1}\left(10^{-4}\right) \approx 3.72.$$

Calculamos ahora la atenuación L para el peor de los casos:

$$L_{dB} = 46.32 + 26.07\log_{10}(920.820\ MHz) + 33.77\log_{10}(10km) \approx 157.4\ dB,$$

o lo que es lo mismo:

$$L \approx 10^{15.74} \approx 5.5 \times 10^{15}.$$

La letra nos dice que la potencia de transmisión son 24 dBm, o lo que es lo mismo

$$S_T = 10^{2.4}mW \approx 251.2\ mW$$

.

Despejando obtenemos que:

$$\eta \leq \frac{2.(0.2512)}{(3.72^2).(5.5 \times 10^{15}).(600)} \approx 1.1 \times 10^{-20}.$$

(d) La probabilidad de error de bit en este caso estará dada por la probabilidad de que dos de los envíos estén errados a la vez, más la probabilidad de que los tres envíos los estén. Por lo tanto:

$$P'_{eb} = 3.P_{eb}.P_{eb}.(1 - P_{eb}) + P_{eb}.P_{eb}.P_{eb} = 3P_{eb}^2 - 2P_{eb}^3 \approx 3P_{eb}^2 \leq 10^{-4},$$

donde la aproximación se da porque asumimos que P_{eb} es muy pequeña
Finalmente:

$$\sqrt{\frac{S_T}{r_s\frac{\eta}{2}L}} \geq Q^{-1}\left(\sqrt{\frac{10^{-4}}{3}}\right) \approx Q^{-1}(0.0058) \approx 2.52$$

Y si volvemos a evaluar la ecuación de la parte anterior:

$$\eta \leq \frac{2.(0.2512)}{(2.52^2).(5.5 \times 10^{15}).(600)} \approx 2.4 \times 10^{-20}$$

Estamos asumiendo que, al ser lugares del espectro distintos, las transmisiones son independientes. Además, asumimos que la suma de distribuciones normales es normal.

(e) Este caso sería igual que nos anteriores, salvo que la ganancia máxima de la señal se multiplicará por tres y sucederá lo mismo con la potencia del ruido. Las ecuaciones quedan planteadas entonces de la siguiente manera:

$$P_{eb} = Q\left(\frac{3\sqrt{S_T/(r_s L)}}{\sqrt{3\frac{\eta}{2}}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{3S_T}{r_s\frac{\eta}{2}L}}\right) \leq 10^{-4},$$

o lo que es lo mismo

$$\sqrt{\frac{6.S_T}{r_s\eta L}} \geq Q^{-1}\left(10^{-4}\right) \approx 3.72.$$

Despejando obtenemos que:

$$\eta \leq \frac{0.2512 \times 6}{(3.72^2).(5.5 \times 10^{15}).(600)} \approx 3.4 \times 10^{-20}.$$

Nuevamente estamos asumiendo que, al ser lugares del espectro distintos, las transmisiones son independientes. Además, asumimos que la suma de distribuciones normales es normal.

Ejercicio 5

(a) Ver figura 6.

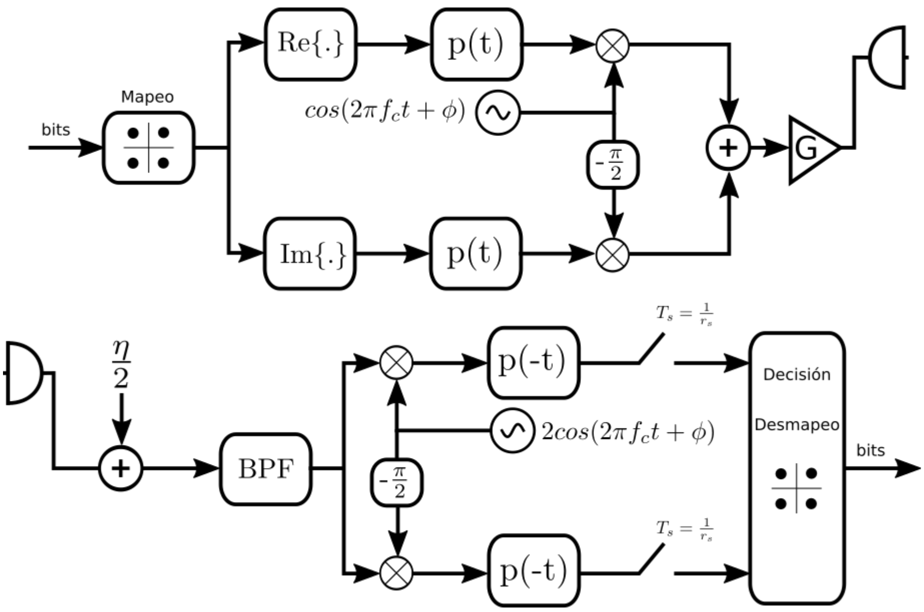


Figura 6: Diagrama de bloques del sistema QPSK propuesto por el ejercicio.

(b) La atenuación por espacio libre puede calcularse aplicando la ecuación de transmisión de Friis:

$$L = \left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2,$$

con d la distancia entre el transmisor y el receptor y $\lambda = \frac{c}{f}$ la longitud de onda de la portadora transmitida. Operando sobre la ecuación anterior:

$$L \approx 4.4 \times 10^{12},$$

o lo que es lo mismo

$$L^{dB} \approx 126.4 \ dB.$$

Por tratarse de una transmisión en espacio libre, la respuesta al impulso del canal tendrá la siguiente forma:

$$h(t) = \beta\delta(t - \tau),$$

con $\beta = \frac{1}{\sqrt{L}}$ y τ el tiempo que tarda el rayo perteneciente a la línea de vista en llegar desde el transmisor hacia el receptor. Ese valor puede ser calculado usando la velocidad de la luz $c \approx 3.0 \times 10^8$ y la distancia $d = 5000 \ m$:

$$\tau = \frac{d}{c} = 6.25 \times 10^{-6} \ s.$$

La respuesta en frecuencia del canal será la transformada de Fourier de $h(t)$,

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-j2\pi f\tau}.$$

(c) Sabemos que la probabilidad de error de bit de un sistema QPSK con atenuación L vale

$$P_{eb} = Q\left(\frac{A}{\sqrt{L}\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{E_s}}{\sqrt{L}\sigma}\right),$$

donde en este ejercicio en particular $\sigma^2 = \eta/2$. Además la relación entre la potencia transmitida y la energía de símbolo es

$$S_T = r_s E_s.$$

Por lo tanto buscamos que

$$Q\left(\sqrt{\frac{S_T}{r_s L \eta}}\right) \leq 10^{-4},$$

o lo que es lo mismo

$$\sqrt{\frac{S_T}{r_s L \eta}} \geq Q^{-1}(10^{-4}) \approx 3.72.$$

Finalmente

$$\eta \leq \frac{S_T}{3.72^2 r_s L} \approx 3.3 \times 10^{-21} \ \frac{W}{Hz}.$$

(d) Sea $c = 3.0 \times 10^8\ m/s$ la velocidad de la luz, como tanto el rayo principal como el secundario se desplazan a esa velocidad, debemos agregar al trayecto secundario una distancia

$$\Delta d = d - d' = c \times 2\mu s = 600\ m,$$

por lo tanto

$$d' = 5600\ m.$$

Esta diferencia de distancia corresponde a $\frac{2\ \mu s}{T_s} = 2\ \mu s \times r_s = 100$ símbolos. Al sumarse en recepción un rayo secundario retardado, lo que tendremos es Interferencia Intersimbólica (ISI).

(e) Para calcular la atenuación del rayo secundario podemos usar nuevamente la fórmula de transmisión de Friis, esta vez con la distancia d':

$$L' = \left(\frac{4\pi d'}{\lambda}\right)^2 \approx 5.5 \times 10^{12},$$

o lo que es lo mismo

$$L'^{dB} \approx 127.4\ dB.$$

La respuesta al impulso en este caso debe contemplar ambos caminos, por lo tanto

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{L}}\delta(t-\tau) + \frac{1}{\sqrt{L'}}\delta(t-\tau'),$$

donde $\tau' = \tau + 2\ \mu s$. La respuesta en frecuencia del canal será ahora

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{-j2\pi f\tau} + \frac{1}{\sqrt{L'}}e^{-j2\pi f\tau'}$$

(f) El canal será cada vez más selectivo en frecuencia.