

Equivalencias para PROP

Lógica

(actualizado Abril 2025)

En este documento presentaremos una lista de equivalencias que se pueden usar en el curso. Recordemos que dos fórmulas α y β son equivalentes cuando $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una tautología:

$$\alpha \text{ eq } \beta \Leftrightarrow \models \alpha \leftrightarrow \beta$$

Todas estas equivalencias se pueden probar utilizando cualquiera de los métodos vistos en el curso para probar tautologías, por ejemplo tableau semántico.

Leyes algebraicas

- Asociativa¹:

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \text{ eq } \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$$

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \text{ eq } \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

- Conmutativa:

$$\alpha \vee \beta \text{ eq } \beta \vee \alpha$$

$$\alpha \wedge \beta \text{ eq } \beta \wedge \alpha$$

- Distributiva:

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \text{ eq } (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \text{ eq } (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$

¹Para todas las equivalencias que utilizan sólo los conectivos \neg , \vee o \wedge hay una *dual*: la misma equivalencia vale cambiando \vee por \wedge y viceversa en ambas fórmulas. Esto se formaliza en el teorema de dualidad 2.3.14 del libro.

- De Morgan:

$$\neg(\alpha \vee \beta) \text{ eq } \neg\alpha \wedge \neg\beta$$

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \text{ eq } \neg\alpha \vee \neg\beta$$

- Absorción

$$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \text{ eq } \alpha$$

$$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \text{ eq } \alpha$$

- Neutro:

$$\alpha \vee \perp \text{ eq } \alpha$$

$$\alpha \wedge \neg\perp \text{ eq } \alpha$$

- Anulación:

$$\alpha \vee \neg\perp \text{ eq } \neg\perp$$

$$\alpha \wedge \perp \text{ eq } \perp$$

- Idempotencia:

$$\alpha \vee \alpha \text{ eq } \alpha$$

$$\alpha \wedge \alpha \text{ eq } \alpha$$

- Doble negación:

$$\neg\neg\alpha \text{ eq } \alpha$$

- Tercero excluido:

$$\alpha \vee \neg\alpha \text{ eq } \neg\perp$$

Equivalencias entre conectivos

- Si y solo si:

$$\alpha \leftrightarrow \beta \text{ eq } (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$$

- Implica:

$$\alpha \rightarrow \beta \text{ eq } \neg\alpha \vee \beta$$

- Or con implica:

$$\alpha \vee \beta \text{ eq } \neg\alpha \rightarrow \beta$$

- Or con and:

$$\alpha \vee \beta \text{ eq } \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

- Conjunción:

$$\alpha \wedge \beta \text{ eq } \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$$

- Negación:

$$\neg\alpha \text{ eq } \alpha \rightarrow \perp$$

- Bottom (Principio de no contradicción):

$$\perp \text{ eq } \alpha \wedge \neg\alpha$$

Otras propiedades de conectivos

- Contrareciproco:

$$\alpha \rightarrow \beta \text{ eq } \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$$

- Conmutativa del \leftrightarrow :

$$\alpha \leftrightarrow \beta \text{ eq } \beta \leftrightarrow \alpha$$